

Министерство просвещения Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ульяновский государственный педагогический университет  
имени И.Н. Ульянова»  
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования  
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебно-методической  
работе  
С.Н.Титов  
  
«24 » июня 2022 г.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Программа учебной дисциплины модуля  
специальных разделов предметной области  
основной профессиональной образовательной программы высшего  
образования – программы бакалавриата по направлению подготовки  
44.03.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы  
Информатика

(заочная форма обучения)

Составитель: Гринина С.А.,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-  
математического и технологического образования, протокол от «25» марта  
2022 г. № 5

Ульяновск, 2022

## **Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Математическая логика» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) модуля специальных разделов предметной области учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Информатика», заочной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках школьного курса математики.

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: Теория алгоритмов, Дискретные модели в информатике, Компьютерная алгебра и для прохождения государственной итоговой аттестации.

### **1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине**

**Целью** освоения дисциплины «Математическая логика» является формирование представлений о методах математической логики, о решении проблем оснований математики и знакомство с основными результатами в этой области.

**Задачей** освоения дисциплины является: сформировать представления об основных понятиях математической логики; уточнить понятие математического доказательства; сформировать представления о методе формализации; построить и изучить логические исчисления; изучить понятия теории первого порядка и её основных характеристик; познакомить с проблемами оснований математики и путями решения этих проблем; познакомить с основными результатами математической логики.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Математическая логика» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	зnaet	умeет	владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации	ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач	ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и	ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает	ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в	ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий,

<p>практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.</p> <p>ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).</p> <p>ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.</p>	<p>структурой, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.</p>	<p>различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.</p>	<p>ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.</p>
<p>ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов.</p> <p>ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).</p>	<p>ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике;</p> <p>ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.</p>	<p>ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов;</p> <p>ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.</p>	<p>ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.</p>

**2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Но мер сем ест ра			Учебные занятия						Форма промежу точной аттестац ии	
	Всег о		Лек ции , час .	Практ ически е заняти я, час.	В т. ч. практ ическа я подгот овка, час.	Лабора торные заняти я, час.	В т. ч. практ ическа я подгот овка, час.	Само стоят . рабо та, час.		
	Трудое мк.	За ч. ед .								
1	2	72	2	6	-	-	-	58	Зачет (6)	
Итого :	2	72	2	6	-	-	-	58		

**3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

№ п/п	Наименование разделов и тем	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
1.	Логика высказываний.	1	-	2	29
2.	Логика предикатов.	1		4	29
<b>Всего</b>		<b>2</b>	<b>-</b>	<b>6</b>	<b>58</b>

**3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины**

**Краткое содержание курса**

**Логика высказываний**

Высказывания. Логические операции над высказываниями. Классификация формул логики высказываний. Тавтологии. Равносильность формул алгебры высказываний. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы. Закон двойственности. Совершенные нормальные формы. Алфавит, система аксиом, правило вывода в

исчислении высказываний. Теорема о дедукции в исчислении высказываний. Применение теоремы о дедукции. Лемма о выводимости. Полнота исчисления высказываний в широком смысле. Непротиворечивость исчисления высказываний. Полнота исчисления высказываний в узком смысле. Независимость системы аксиом исчисления высказываний.

### **Логика предикатов**

Определение  $n$ -местного предиката. Область истинности предиката. Логические операции над предикатами. Кванторы. Формулы логики предикатов. Обобщенные законы де Моргана. Предваренная нормальная форма формул логики предикатов. Проблема разрешимости в логике предикатов (Теорема Черча). Проблема разрешимости в случае одноместных предикатов. Применение языка логики предикатов. Теоремы: прямая, обратная, противоположная, обратная к противоположной. Методы доказательства теорем. Алфавит. Термы. Формулы Связанные и свободные переменные исчисления предикатов. Аксиомы логические и специальные. Языки первого порядка. Теорема о дедукции в исчислении предикатов. Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов в широком смысле без специальных аксиом. Теорема Геделя. Отсутствие полноты исчислений высказываний в узком смысле в исчислении предикатов.

## **2. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляющую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания

по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

### *Задания для типовых контрольных работ*

#### **ОС-1. Самостоятельная работа.**

1. Упростите формулы логики высказываний:

a)  $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$ ; б)  $(A \vee B) \& (A \vee \bar{B})$ ; в)  $\overline{A \vee B} \vee (\bar{A} \& B)$ .

2. Докажите, что следующие формулы логики высказываний являются тавтологиями:

a)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$ ; б)  $((A \rightarrow B) \& \bar{B}) \rightarrow \bar{B}$ ; в)  $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$ .

3. Запишите СКНФ и СДНФ для следующих формул:

a)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ ; б)  $(A \vee \bar{C}) \rightarrow (B \& C)$ ; в)  $(\bar{A} \rightarrow C) \rightarrow \overline{\bar{B} \rightarrow \bar{A}}$ .

4. Докажите, что имеют место следующие выводимости:

a)  $F \vdash A \rightarrow F$ ; б)  $A, \bar{A} \rightarrow B \vdash B$ ; в)  $\vdash (\bar{A} \rightarrow A) \rightarrow A$ .

#### **ОС-2. Контрольная работа.**

1. Введите предикаты на соответствующих множествах и запишите при их помощи следующие высказывания в виде формул логики предикатов:

а) существует такое целое число  $x$ , что  $x^2 - 4 = 0$ ;

б) для любого действительного числа  $x$  существует такое действительное число  $y$ , что  $y^2 = x$ ;

в) для любого целого числа  $x$ , если  $x > 2$ , то  $x^2 > 9$ .

2. Запишите на языке логики предикатов определения:

а) линейно упорядоченного множества (упорядоченное множество называется линейным, если для любых элементов этого множества  $x$  и  $y$  либо  $x = y$ , либо  $x < y$ , либо  $x > y$ );

б) нечетной функции;

в) убывающей функции.

3. Найдите области истинности следующих предикатов:

а) « $\sin x > \frac{1}{2}$ »,  $x \in \mathbf{R}$ ; б) « $x^2 - 5x + 4 = 0$ »,  $x \in \mathbf{R}$ ; в) « $x^2 + y^2 = 0$ »,  $x, y \in \mathbf{Z}$ .

4. Изобразите области истинности следующих предикатов, где  $x, y \in \mathbf{R}$ :

а) « $x^2 + 5x - 6 > 0$ »;    б) « $x = y$ »;    в) « $x^2 + y^2 < 1$ ».

5. Найдите отрицания следующих формул логики предикатов:
  - а)  $\forall x(P(x) \& Q(x))$ ;
  - б)  $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ ;
  - в)  $\forall x(A(x) \rightarrow \forall y B(y))$ .
6. Для каждого из следующих утверждений сформулируйте обратное к нему, противоположное и противоположное к обратному утверждению:
  - 1) если дискриминант квадратного уравнения равен нулю, то его корни совпадают;
  - 2) сумма корней квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$  равна  $p$ , а произведение корней равно  $-q$ ;
  - 3) целый корень квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$  с целыми коэффициентами является делителем свободного члена
7. Введите необходимые функциональные и предикатные переменные и запишите специальные аксиомы, определяющие следующие аксиоматические теории:
  - а) Теорию групп;
  - б) Теорию абелевых групп.

*Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:*

1. Гришина С.А. Математическая логика: Учебно-методические рекомендации для студентов педагогических университетов. – Ульяновск, УлГПУ им. И.Н. Ульянова, 2017.

### **3. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

#### **Организация и проведение аттестации студента**

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволяют выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

**Цель проведения аттестации** – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

**Промежуточная аттестация** осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ, используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	<b>Оценочные средства для текущей аттестации</b> ОС-1 Самостоятельная работа  ОС-2 Контрольная работа	ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики. ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.
	<b>Оценочные средства для промежуточной аттестации зачет (экзамен)</b> ОС-3 Зачет в форме устного собеседования по вопросам	ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а также процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Основы математической логики».

***Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости  
обучающихся по дисциплине***

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

***Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости  
обучающихся по дисциплине***

***ОС-3. Примерный перечень вопросов к зачету***

1. Высказывания. Логические операции над высказываниями. Классификация формул логики высказываний. Тавтологии.
2. Равносильность формул алгебры высказываний.
3. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы. Закон двойственности. Совершенные нормальные формы.
4. Алфавит, система аксиом, правило вывода в исчислении высказываний.
5. Теорема о дедукции в исчислении высказываний. Применение теоремы о дедукции.
6. Лемма о выводимости. Полнота исчисления высказываний в широком смысле.
7. Непротиворечивость исчисления высказываний. Полнота исчисления высказываний в узком смысле.
8. Независимость системы аксиом исчисления высказываний.

9. Определение  $n$ -местного предиката. Область истинности предиката. Логические операции над предикатами.
10. Кванторы. Формулы логики предикатов. Обобщенные законы де Моргана.
11. Предваренная нормальная форма формул логики предикатов.
12. Проблема разрешимости в логике предикатов (Теорема Черча).
13. Проблема разрешимости в случае одноместных предикатов.
14. Применение языка логики предикатов. Теоремы: прямая, обратная, противоположная, обратная к противоположной. Методы доказательства теорем.
15. Алфавит. Термы. Формулы Связанные и свободные переменные исчисления предикатов. Аксиомы логические и специальные. Языки первого порядка.
16. Теорема о дедукции в исчислении предикатов.
17. Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов в широком смысле без специальных аксиом. Теорема Геделя. Отсутствие полноты исчислений высказываний в узком смысле в исчислении предикатов.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

#### **Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине**

##### *Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся*

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачет
<b>1 семестр</b>	Разбалловка по видам работ	6 x 1=6 баллов	10 x 1=10 баллов	152 балла	32 балла
	Суммарный макс. балл	6 баллов max	16 баллов max	168 балла max	200 баллов max

##### *Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра*

	<b>Баллы (2 ЗЕ)</b>
«зачтено»	более 100
«не зачтено»	100 и менее

#### **4. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись лекции – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного

количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

### **Подготовка к практическим занятиям.**

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

### **Планы практических занятий**

#### **Занятие 1. Высказывания и операции над ними. Формулы логики высказываний. Равносильные формулы. Тавтологии.**

1. Определение высказывания. Операции над высказываниями. Формула алгебры высказываний. Виды формул.
2. Тавтология. Основные тавтологии алгебры высказываний. Правило заключения. Правило подстановки.
3. Равносильные формулы. Признак равносильности формул. Основные равносильности алгебры высказываний.

Решить задачи [1]:

1. № 1.1, 1.5, 1.8 (а,б,в), 1.9 (б,з,к), 1.11 (б,в), 1.13, 1.14 (а,б), 1.17, 1.20, 1.21 (б,в), 1.23 (б,г), 1.24 (в), 1.26 (в), 1.29(ц), 1.32(а,б), 1.42 (а,с), 1.44 (а), 1.49 (в), 1.50 (а), 1.51 (г).
2. Самостоятельно № 1.21 (г,д,е), 1.24 (г), 1.30 (е), 1.32(г), 1.42 (п), 1.44 (в), 1.45 (в).

#### **Занятие 2. Логика предикатов.**

1. Понятие предиката и операции над предикатами. Множество истинности предиката.
2. Формулы логики предикатов. Тавтологии логики предикатов.
3. Равносильные преобразования формул.

Решить задачи [1]:

1. 7.1, 7.3 (в,г,д,е), 7.6 (а-и), 7.8 (а-и), 7.11 (г), 7.21 (а,в), 7.32 (а,б,в), 7.34
2. пусть на множестве натуральных чисел даны предикаты  $P(x)$ : « $x$  – четное число» и  $Q(x)$ : « $x$  кратно трем». Найти области истинности предикатов  $P(x) \wedge Q(x)$ ,  $P(x) \vee Q(x)$ ,  $\neg P(x)$ ,  $P(x) \rightarrow Q(x)$ .
3. Самостоятельно № 7.7, 7.11 (б,д), 7.21 (г), 7.32 (г)

#### **Занятие 3. Применение логики предикатов к логико-математической практике.**

1. Записи на языке логики предикатов.
2. Правильные и неправильные рассуждения.
3. Равносильные преобразования неравенств и уравнений при их решении.

Решить задачи [1]: 10.3, 10.6, 10.10 (а, б), 10.14.

## **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины**

### **Основная литература**

1. Игошин, В. И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов : учебное пособие / В. И. Игошин. - Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2019. - 392 с. - ISBN 978-5-906818-08-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/986940>
2. Игошин, В. И. Математическая логика : учебное пособие / В. И. Игошин. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 398 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-011691-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/987006>
3. Игошин, В. И. Теория алгоритмов : учебное пособие / В. И. Игошин. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 318 с. — (Высшее образование). - ISBN 978-5-16-005205-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/968714>

### **Дополнительная литература**

1. Судоплатов, С. В. Математическая логика и теория алгоритмов : учебник / С.В. Судоплатов; Е.В. Овчинникова. - 3-е изд. - Новосибирск : НГТУ, 2012. - 254 с. - (Учебники НГТУ).<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=135676>
2. Гладких, О. Б. Математическая логика : учебно-методическое пособие / О.Б. Гладких; О.Н. Белых. - Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011. - 142 с.  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=272140>

### **Интернет-ресурсы**

<http://www.mathnet.ru> Общероссийский математический портал