Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«24» июня 2022 г.

АЛГЕБРА

Программа учебной дисциплины Предметно-методического модуля
по профилю «Математика»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «25» марта 2022 г. №5

Ульяновск, 2022

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Алгебра» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля по профилю «Математика» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках школьного курса математики.

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: Числовые системы, Теория чисел, Математические методы теории принятия решений, Теория вероятностей и основы математической статистики, Научно-исследовательская работа, Подготовки к сдаче и сдача государственного экзамена, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины является подготовка учителя к будущей профессиональной деятельности: формирование способности к преподаванию учебного предмета алгебра, как в обычных общеобразовательных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Задачей освоения дисциплины является закрепление умений проводить математические преобразования выражений, отработка понятийного аппарата математики, техники проведения математических расчетов, формирование и закрепление умения проводить строгие абстрактно-логические доказательства, решать задачи повышенной сложности школьного курса математики.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	умеет	Владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск,	ОР-1. Знает методы критического анализа	ОР-2 Умеет применять системный	ОР-3 Владеет навыками рефлексии

критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	и синтеза информации	подход для решения поставленных задач	по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач. ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет	ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.	ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.	ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.

осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.			
ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов. ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской , проектной, групповой и др.).	ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.	ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.	ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Всего		Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Трудоемк.								
	Зач. ед.	Часы	Лекции, час.	Практические занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Лабораторные занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Самостоят. работа, час.	
1	3	108	18	30	-	-	-	33	экзамен (27)
2	4	144	24	40	-	-	-	53	экзамен (27)
4	3	108	18	30	-	-	-	33	экзамен (27)
Итого:	10	360	60	100	-	-	-	119	81

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
1 семестр				
Системы линейных уравнений и матрицы	8	12		10
Конечномерные векторные пространства	6	14		13

Линейные отображения и линейные операторы	4	4		10
Экзамен				27
Итого по 1 семестру	**18**	**30**	**-**	**60**
2 семестр				
Элементы теории множеств	10	12		23
Теория делимости	4	6		15
Основные алгебраические структуры	10	22		15
Экзамен				27
Итого по 2 семестру	**24**	**40**	**-**	**80**
4 семестр				
Теория многочленов	18	30		33
Экзамен				27
Итого по 4 семестру	**18**	**30**	**-**	**60**
Всего по дисциплине:	**60**	**100**	**-**	**200**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса (1 семестр)

Системы линейных уравнений и матрицы

Матрицы и операции над ними (свойства операций, примеры). Кольцо матриц. Знак подстановки. Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядка. Основные свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Обратная матрица, способы её вычисления. Системы линейных уравнений. Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы линейных уравнений. Запись и решение системы n линейных уравнений с n переменными в матричной форме. Правило Крамера.

Конечномерные векторные пространства

Примеры и простейшие свойства векторных пространств. Арифметические векторные пространства. Линейная зависимость системы векторов. Базис и ранг конечной системы

векторов. Разложение вектора по базису. Базис и размерность конечномерного векторного пространства. Ранг матрицы. Способы его вычисления. Критерий совместности системы линейных уравнений. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Однородная система линейных уравнений. Связь решений неоднородной и ассоциированной с ней однородной системы. Подпространства, критерий подпространства, примеры. Подпространство фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений. Евклидово векторное пространство. Норма вектора. Угол между векторами. Ортонормированный базис.

Линейные отображения и линейные операторы

1. Линейные отображения и линейные операторы векторных пространств, примеры, простейшие свойства. Ядро и образ линейного отображения. Матрица линейного оператора относительно данного базиса, ее изменение при переходе к другому базису. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение.

2 семестр

Элементы теории множеств

Операции над множествами, их свойства. Метод математической индукции. Бинарные отношения на множестве, их свойства. Операции над бинарными отношениями. Отношение эквивалентности. Построение разбиения множества по эквивалентности. Определение, примеры и виды отображений (соответствий, функций). Композиция отображений, её свойства. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения.

Теория делимости

Отношение делимости нацело на множестве целых чисел и его простейшие свойства. Теорема о делении с остатком. НОД и НОК целых чисел. Алгоритм Евклида. Взаимно простые числа. Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики и следствия из неё. Отношение сравнимости по натуральному модулю на множестве целых чисел и его свойства. Множество классов вычетов $\mathbf{Z}_m$.

Основные алгебраические структуры

Бинарная алгебраическая операция и её свойства. Нейтральные и симметричные элементы, их свойства. Определение, примеры и простейшие свойства групп. Группы подстановок и классов вычетов. Подгруппы. Смежные классы и теорема Лагранжа. Изоморфизмы и гомоморфизмы групп. Определение, примеры и простейшие свойства колец. Подкольца и идеалы кольца. Поле как частный случай кольца: примеры и простейшие свойства. Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Свойства операции комплексного сопряжения. Геометрическое представление комплексного числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.

4 семестр

Теория многочленов

Кольцо многочленов от одной неизвестной. Степень многочлена и ее свойства. Многочлены над полем: деление с остатком, НОД многочленов, разложение многочлена на неприводимые множители. Теорема Безу. Схема Горнера. Многочлены над областью целостности: количество корней, функциональное и алгебраическое равенство многочленов. Формальная производная многочлена и кратные корни. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена над полем комплексных чисел на неприводимые множители. Теорема Виета. Решение уравнений 3-й и 4-й степени. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел. Алгебраические расширения полей. Избавление от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби. Примеры геометрических задач, сводящихся к уравнениям, неразрешимым в квадратных радикалах. Алгебраические и трансцендентные числа. Построение кольца многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены. Применение симметрических многочленов к решению систем уравнений.

3. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для

полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным докладам (подготовка рефератов);
- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий.

ОС-1. Контрольная работа № 1

Примерный вариант контрольной работы № 1

Системы линейных уравнений и матрицы

Вариант 1.

1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Решите уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решите по правилу Крамера $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ x + y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$.

Вариант 2.

1. Пусть $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = BC$. Найдите определитель каждой матрицы.

2. Найдите матрицу, обратную к матрице: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решите по правилу Крамера $\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$.

ОС-2. Контрольная работа № 2

Конечномерные векторные пространства

Вариант 1.

1. Вычистите ранг системы векторов: $\mathbf{a_1} = (2, 1, 2, -1)$, $\mathbf{a_2} = (1, 2, -1, 3)$, $\mathbf{a_3} = (3, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a_4} = (1, 0, 0, 2)$.

2. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений.

$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$

$3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$

$4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0$

Вариант 2.

3. Найдите координаты вектора $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 3)$ в базисе $\mathbf{b_1} = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b_2} = (1, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b_3} = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b_4} = (1, 0, 0, 0)$.

4. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 &= -4. \end{aligned}$$

ОС-3. Контрольная работа № 3

Линейные отображения и линейные операторы

1. Выясните, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу в базисе $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$.

2. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе линейного пространства над **R** матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

ОС-4. Контрольная работа № 4

Вариант 1.

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $B \setminus \overline{A}$, если A = (2, 4), B = [4, 5]. Изобразите на графике декартовы произведения $A \times B$ и $B \times A$.

2. Методом математической индукции докажите, что:

а) $S_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = ½\cdot n(3n - 1)$;

3. Бинарное отношение задано на множестве пар действительных чисел. Выясните, является ли оно отношением эквивалентности или отношением порядка.

а) $(a, b)\ \rho\ (c, d) \Leftrightarrow\ a < c \wedge b \le d$.

4. Охарактеризуйте соответствия (отображения), действующие на множестве действительных чисел: а) $xfy \Leftrightarrow 1 = x^2 + y^2$; б) $xgy \Leftrightarrow y = \cos x$.

5. Найдите композиции $g \circ f$, $f \circ g$: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \cos x$.

Вариант 2.

6. Выясните, справедливо ли равенство A\(B\C) = (A\B)\C.

7. Методом математической индукции докажите, что:

$8^n - 1$ нацело делится на 7.

8. Выясните, является ли бинарное отношение ρ, заданное на множестве целых чисел следующим образом:

$$m\ \rho\ n \Leftrightarrow (9m - n) \text{ делится нацело на } 4,$$

рефлексивным, симметричным, транзитивным, антирефлексивным, антисимметричным, отношением эквивалентности, отношением порядка.

9. Пусть A = {0, 1, 2, 3} в множество B = {1, 2, 3, 4}. Отображение $S: A \to B$ задано следующим образом: S = {(0, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4)}. Является ли оно сюръективным, инъективным, биективным?

10. Докажите, что для данных функций существуют обратные функции и найдите их.

а) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x - 2$; **б**) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = e^x$.

ОС-5. Контрольная работа № 5

Теория делимости

1. Найдите НОД и НОК чисел $a = 318$ и $b = 477$. Найти целые x, y, такие, что:

$$\text{НОД}(a, b) = ax + by.$$

2. С каким наименьшим неотрицательным числом сравнимо число a по модулю 7.

а) $a = 342$; б) $a = -23$?

3. Перечислите все классы вычетов по модулю 6. К какому классу принадлежит число 153? Укажите не менее трёх положительных и трёх отрицательных элементов для класса, порождённого элементом 4.

ОС-6. Контрольная работа № 6

Основные алгебраические структуры

1. Выясните, является ли множество целых чисел кратных 7, группой относительно сложения, группой относительно умножения, кольцом, полем?

2. Выясните, является ли множество чисел вида $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ группой относительно сложения, группой относительно умножения, кольцом, полем?

3. Вычислите i^{345}.

4. Найдите все комплексные корни уравнения $x^2 + x + 2 = 0$.

5. Вычислите корни $\sqrt[5]{\dfrac{1-i}{-2+2i\sqrt{3}}}$ и результат записать в тригонометрической форме.

6. Геометрически описать множество комплексных чисел z, для которых $|z - 1| = 6$.

Теория многочленов

ОС-7. Контрольная работа № 7

Вариант 1.

1. Найдите частное и остаток от деления многочлена $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ на многочлен $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

2. Используя схему Горнера, разложите многочлен $f(x) = 2x^6 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ по степеням $(x - 4)$.

3. Найдите все комплексные корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

4. С помощью производной отделить неприводимые кратные множители многочлена: $f(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9$.

Вариант 2.

5. Найти НОД и НОК многочленов $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ и $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

6. Используя схему Горнера найдите $f(a)$, где $f = 4x^3 + x^2$, $a = -1 - i$.

7. Найдите все рациональные корни многочлена и разложить его на множители, неприводимые над полем рациональных чисел $f(x) = 20x^5 - 72x^4 + 57x^3 - 75x^2 + 37x - 3$.

8. Найдите все комплексные корни уравнения: $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$.

ОС-8. Контрольная работа № 8

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\dfrac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25} + 4\sqrt[3]{5} + 1}$.

2. Выразите многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2$ через основные (элементарные) симметрические многочлены.

3. Найдите сумму кубов корней многочлена $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Череватенко О.И., Рацеев С.М., Глухова Н.В., Кувшинова А.Н. Основы высшей алгебры. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2020. – 60 с.
2. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Линейная алгебра. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2019. – 40 с.
3. Глухова Н.В., Череватенко О.И., Гришина С.А., Куренева Т.Н. Основы теории алгебраических структур. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2019. – 23 с.
4. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Алгебра. Часть 4. Алгебра многочленов Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 42 с.
5. Карпова С.А. Алгебра и теория чисел. Часть 1. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ, 1998. – 24 с.
6. Ильязова Д.З. Алгебра и теория чисел. Часть 2. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ.
7. Богомолова И.В., Ильязова Д.З. Алгебра и теория чисел. Часть 4. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ, 1999. – 24 с.
8. Глухов В.П., Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть I. – Ульяновск: УлГПУ, 1996. – 58 с.
9. Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть 2. – Ульяновск: УлГПУ, 1999. – 36 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Контрольная работа № 1 ОС-2 Контрольная работа № 2 ОС-3 Контрольная работа № 3 ОС-4 Контрольная работа № 4 ОС-5 Контрольная работа № 5 ОС-6 Контрольная работа № 6 ОС-7 Контрольная работа № 7 ОС-8 Контрольная работа № 8	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики. ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию. ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **(Экзамен)** ОС-9-11 Экзамен в форме устного собеседования	

		различных методов, приемов и технологий в обучении математике. ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; ОР-10. Владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике. ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности. ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Примерный перечень вопросов к экзамену

1 семестр

Системы линейных уравнений и матрицы

1. Матрицы и операции над ними (свойства операций, примеры). Кольцо матриц.
2. Знак подстановки. Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядка.
3. Основные свойства определителей.
4. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу.
5. Обратная матрица, способы её вычисления.
6. Системы линейных уравнений. Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы линейных уравнений.
7. Запись и решение системы n линейных уравнений с n переменными в матричной форме. Правило Крамера.

Конечномерные векторные пространства

1. Примеры и простейшие свойства векторных пространств. Арифметические векторные пространства.
2. Линейная зависимость системы векторов.
3. Базис и ранг конечной системы векторов.
4. Разложение вектора по базису.
5. Базис и размерность конечномерного векторного пространства.
6. Ранг матрицы. Способы его вычисления.
7. Критерий совместности системы линейных уравнений.
8. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.
9. Однородная система линейных уравнений. Связь решений неоднородной и ассоциированной с ней однородной системы.
10. Подпространства, критерий подпространства, примеры.
11. Подпространство фундаментальной системы решений однородной системы линейных

уравнений.

12. Евклидово векторное пространство. Норма вектора. Угол между векторами. Ортонормированный базис.

Линейные отображения и линейные операторы

1. Линейные отображения и линейные операторы векторных пространств, примеры, простейшие свойства.
2. Ядро и образ линейного отображения.
3. Матрица линейного оператора относительно данного базиса, ее изменение при переходе к другому базису.
4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение.

2 семестр

Элементы теории множеств

1. Операции над множествами, их свойства.
2. Метод математической индукции.
3. Бинарные отношения на множестве, их свойства. Операции над бинарными отношениями.
4. Отношение эквивалентности. Построение разбиения множества по эквивалентности.
5. Определение, примеры и виды отображений (соответствий, функций). Композиция отображений, её свойства.
6. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения.

Теория делимости

1. Отношение делимости нацело на множестве целых чисел и его простейшие свойства. Теорема о делении с остатком.
2. НОД и НОК целых чисел. Алгоритм Евклида. Взаимно простые числа.
3. Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел.
4. Основная теорема арифметики и следствия из неё.
5. Отношение сравнимости по натуральному модулю на множестве целых чисел и его свойства. Множество классов вычетов $\mathbf{Z}_m$.

Основные алгебраические структуры

1. Бинарная алгебраическая операция и её свойства. Нейтральные и симметричные элементы, их свойства.
2. Определение, примеры и простейшие свойства групп. Группы подстановок и классов вычетов.
3. Подгруппы. Смежные классы и теорема Лагранжа.

4. Изоморфизмы и гомоморфизмы групп.
5. Определение, примеры и простейшие свойства колец.
6. Подкольца и идеалы кольца.
7. Поле как частный случай кольца: примеры и простейшие свойства.
8. Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Свойства операции комплексного сопряжения.
9. Геометрическое представление комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.
10. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.
11. Извлечение корней из комплексных чисел.

4 семестр

Теория многочленов

1. Кольцо многочленов от одной неизвестной. Степень многочлена и ее свойства.
2. Многочлены над полем: деление с остатком, НОД многочленов, разложение многочлена на неприводимые множители.
3. Теорема Безу.
4. Схема Горнера.
5. Многочлены над областью целостности: количество корней, функциональное и алгебраическое равенство многочленов.
6. Формальная производная многочлена и кратные корни.
7. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена над полем комплексных чисел на неприводимые множители.
8. Теорема Виета.
9. Решение уравнений 3-й
10. Решение уравнений и 4-й степени.
11. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел.
12. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами.
13. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел.
14. Алгебраические расширения полей.
15. Избавление от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби.
16. Примеры геометрических задач, сводящихся к уравнениям, неразрешимым в квадратных радикалах.
17. Алгебраические и трансцендентные числа.
18. Построение кольца многочленов от нескольких переменных.
19. Симметрические многочлены.
20. Применение симметрических многочленов к решению систем уравнений.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
1, 4, семестры	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 Баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла Max	236 баллов Max	300 баллов max

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
2 семестр	Разбалловка по видам работ	12 х 1=12 баллов	20 х 1= 20 Баллов	272 балла	96 баллов
	Суммарный макс. Балл	12 баллов Max	20 баллов max	304 балла Max	400 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 1, 4 семестров

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 2 семестра

Оценка	**Баллы (4 ЗЕ)**

«отлично»	361-400
«хорошо»	281-360
«удовлетворительно»	201-280
«неудовлетворительно»	200менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий (семестр 1)

***ЗАНЯТИЕ* 1. Матрицы и операции над ними**

1. Даны матрицы:

$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

Вычислить A + E, BC, CB, A^2.

2. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & -12\\-1 & 5 & 0\\-4 & 1 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 1 & 11\\7 & -3 & 8\\1 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2, & 4 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3, & -6, & 3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}8 & 7 & -4\\-9 & 3 & 5\\1 & -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 6 & 4\\8 & -2 & -4\\-3 & 4 & 3\end{pmatrix},$$

3. Укажите сумму элементов последней строки матрицы C = 2A - B, где

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\-1 & 4 & 3\\2 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -5\\1 & 6 & 3\\1 & 0 & 3\end{pmatrix}$,

4. Укажите сумму элементов первого столбца матрицы C = AB, где

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\-1 & 4 & 3\\2 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -5\\1 & 6 & 3\\1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

5. Укажите размерности матриц и транспонированные к ним.

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -5\\1 & 6 & 3\\1 & 0 & 3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 7\end{pmatrix}$.

ЗАНЯТИЕ 2. Перестановки и подстановки

1. Какие из следующих соответствий являются подстановками. Записать подстановки в стандартном виде и найти среди них равные:

а) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\\2 & 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}4 & 2 & 1 & 3\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить произведение подстановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (д/з)

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ (д/з).

3. Найдите чётности у всех подстановок из задания 1 и 2 и у их произведений.

4. Найдите обратные для всех подстановок из задания 1 и 2. Определите чётности обратных подстановок.

***ЗАНЯТИЕ* 3. Определители и их свойства**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 59, 60, 62, 64 (1 – 3).

Чему равен определитель матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

интерактивные формы - работа по микрогруппам: студенты составляются в микрогруппах по три человека, каждый составляет матрицу размера 3x3, затем перемножает матрицы двух других студентов в микрогруппе, вычисляет определитель получившейся матрицы, затем совместно проверяют свойство определителя произведения. При наличии времени тоже выполняется с матрицами размера 2x2.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 61, 64 (2).

***ЗАНЯТИЕ* 4. Определители и их свойства**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 65, 69.

Доказываются свойства определителей, не доказанные на лекции.

1. Чему равен определитель матрицы $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -11 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{vmatrix}$

2. Вычислить произведение и найти определитель каждой матрицы, входящей в произведение, и результата умножения.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите определитель матрицы

а) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ б) (д/з) $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 67, 68, задание 3 (б) .

Рекомендуемая литература:

Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – СПб.:Лань, 2009. – 335 с.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007**.** – 432 с.

Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть II. – Ульяновск: УлГПУ, 1999. – 36 с.

***ЗАНЯТИЕ* 5. Обратные матрицы**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 70 (нечётные), 71, 72 (1, 2), 73, 74, 75.

1. Найти матрицу обратную к матрице, если она существует:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, г) (д/з) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ж) (д/з) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

б) $A(1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию: № 70 (чётные), 72 (3).

***ЗАНЯТИЕ* 6. Решение систем по правилу Крамера**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 76 (нечётные), 77 - 79

Домашнее задание № 76 (чётные)

Рекомендуемая литература:

Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 241 – 243.

Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1966. – стр. 164 – 171.

***ЗАНЯТИЕ* 7. Векторные пространства и подпространства.**

Фронтально и у доски разбираются задачи 1, 2 (1- 4), 3, 5, 13 (1 – 2), 14, 15 (3 – 6).

1. Выяснить, образует ли векторное пространство множество векторов вида $\{(\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta\}, \alpha, \beta \in R\}$.

2. Доказать, что векторными пространствами над полем действительных чисел являются:

а) арифметическое векторное пространство,

б) множество матриц размера 3х3 с действительными коэффициентами,

в) множество всех многочленов степени не выше n,

г) поле комплексных чисел,

д) поле действительных чисел.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию: № 2 (5 – 8), 4, 6, 13 (3), 15 (1 – 2).

***ЗАНЯТИЕ* 8. Линейная зависимость и независимость конечной системы векторов**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 1, 2 (1- 4), 3, 5, 13 (1 – 2), 14, 15 (3 – 6).

Доказываются все свойства линейно зависимых систем из лекции.

1) Вычислить линейную комбинацию $a_1 + a_2 – 3a_3$ для систем векторов:

а) $a_1(1,2,3)$, a_2 (1,1,1), a_3 (3,2,1);

б) $a_1(4, 2, 3,-1,5)$, $a_2(2, 1, -1, 3, -2)$, a_3 (2,1,-6,10,-11);

в) (д/з) $a_1(3,-2,4,-1,-1,2)$, a_2 (-5,3,2,0,-4,3), a_3 (8,-5,3,4,1,-3);

г) (д/з) $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(1, 0, 0, 0)$, a_3 (0, 1, -2, 1).

д) $f_1(x)=x^4+x^3$, $f_2(x) = x^4 - x^3$, $f_3(x) = 8x^4+4x^3$,

е) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить линейные комбинации $a_1(1, 0, 1, 2)$, $a_2(1, 1, 0, 1)$, a_3 (1,1,0,1), a_4 (3,2,2,4):

а) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4$;

б) $a_2 – a_1 – 3a_3$;

в) $– 3a_1 + a_4$;

г) $a_1 + a_2 + a_3 – a_4$.

Является ли эта система линейно независимой?

3. Определить, какие из данных систем линейно независимы:

а) $a_1(1, 2, 3)$,

б) a_1 (0, 0, 0),

в) a_3 (3,2,1), a_4 (6,4,2);

г) (д/з) $a_1(4, 2)$, $a_2(1, 1)$, a_3 (-6, -6),

д) a_1 (2,1,9,-11,16), a_2 (10, 5,10,-6,17);

е) (д/з) $a_1(3,-2,4)$, a_2 (-5,3,2), a_3 (8,-5,3), a_4 (7,-5,19),

a_5 (11,12,-15);

ж) $a_1(1, 0, 1, 2)$, $a_2(1, 1, 0, 1)$, a_3 (1,1,0,1), a_4 (3,2,2,3), a_5 (2, 1,2,2);

з) (д/з) $a_1(3, -4, 1, 2)$, $a_2(1, -1, -1, -1)$, a_3 (0, 0, 0, 0), a_4 (4,-3,1,2), a_5 (1, -6, 1, 2);

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 2 (5 – 8), 4, 6, 13 (3), 15 (1 – 2).

***ЗАНЯТИЕ* 9. Базис и ранг конечной системы векторов**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 18 (нечётные), 19, 20, 22, 23 (1).

1. Найти ранг и базис системы векторов, выразите все векторы системы через базисные:

а) $a_1(1,2,3)$, a_2 (1,1,1), a_3 (3,2,1), a_4 (4,4,1);

б) $a_1(4, 2, 3,-1,5)$, $a_2(2, 1, -1, 3, -2)$, a_3 (2,1,-6,10,-11), a_4 (2,1,9,-11,16), a_5 (10, 5,10,-6,17);

в) (д/з) $a_1(3,-2,4,-1,-1,2)$, a_2 (-5,3,2,0,-4,3), a_3 (8,-5,3,4,1,-3), a_4 (7,-5,19,1,-10,9),

a_5 (11,12,-15,8,17, -20);

г) $a_1(1, 0, 1, 2)$, $a_2(1, 1, 0, 1)$, a_3 (1,1,0,1), a_4 (3,2,2,3), a_5 (2, 1,2,2);

д) $a_1(3, -4, 1, 2)$, $a_2(1, -1, -1, -1)$, a_3 (3,-4,1,2), a_4 (4,-3,1,2), a_5 (1, -6, 1, 2);

е) (д/з) $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(1, 0, 0, 0)$, $a_3(0, 1, -2, 1)$, $a_4(0, 2, 0, -2)$,

ж) $f_1(x)=x^4+x^3$, $f_2(x) = x^4 - x^3$, $f_3(x) = 8x^4+4x^3$,

з) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 18 (чётные), 21, 23 (2 -3).

***ЗАНЯТИЕ* 10. Ранг матрицы.**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 18 (нечётные), 19, 20, 22, 23 (1).

Работа по микрогруппам – вычисление рангов матриц разными путями – на скорость.

Вычислить ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & -9 & 21 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 11 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 15 & 11 & 9 & 13 & 19 \\ 17 & 10 & 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$,

г) (д/з) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 2 & -15 & 9 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ж) (д/з) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию: № 18 (чётные), 21, 23 (2 -3).

***ЗАНЯТИЕ* 11. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса (неоднородные системы)**

Найти общее решение системы и какое-нибудь частное решение. Сделать проверку.

а) $x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1$ $2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1$ $3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ $12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0$	б) $x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 = -1$ $5x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 3$ $9x_1 + 2x_2 + 34x_3 + 23x_4 = 3$ $7x_1 + 4x_2 + 26x_3 + 20x_4 = 4$
в) $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1$ $2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 3$ $x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 7$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0$	г) $4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 1$ $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1$ $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2$ $x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 0$

Фронтально и у доски разбираются задачи 39 (нечётные), 40, 41.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 39 (чётные).

В конце занятия самостоятельная работа.

***ЗАНЯТИЕ №* 12. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса (однородные системы)**

Найти фундаментальную систему решений для системы однородных линейных уравнений

а) $3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0$ $9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$	б) $x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$ $6x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0$ $5x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0$ $7x_1 + 8x_2 + x_4 = 0$
в) $2x_1 - 12x_2 - 5x_3 - 8x_4 - x_5 = 0$ $9x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$ $10x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 15x_5 = 0$ $4x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0$	г) $5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$ $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0$ $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$ $8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0$
д) $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0$ $4x_1 + x_2 + x_3 - 12x_4 + 4x_5 = 0$ $11x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 27x_4 + 9x_5 = 0$ $7x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 48x_4 + 16x_5 = 0$ $5x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0$	е) $2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$ $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$ $x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$ $2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию: № 45 (4 – 6), ОС-6.

***ЗАНЯТИЕ №* 13. Контрольная работа**

***ЗАНЯТИЕ №* 14 Линейные операторы и их матрицы**

Фронтально и у доски разбираются задачи 101(1 – 2), 102, 103 (3 - 5), 104, 105

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу:

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$

в) $A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$

г) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2, 1)$

д) $A(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 2x_3, 8x_1 + x_2 - 4x_3, 12x_1 - 5x_3)$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 101 (3 – 4), 103 (1, 2), 106.

Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу:

е) $A(x_1, x_2, x_3) = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0)$ (д/з)

ж) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$ (д/з)

и) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$ (д/з)

л) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 4x_3, x_1^2)$ (д/з)

м) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$ (д/з)

***ЗАНЯТИЕ №*15. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов). Устный опрос по определениям.

Фронтально и у доски разбираются задачи 120 (нечётные), 121.

Решаются задания: Найдите собственные векторы, собственные значения и собственные подпространства операторов. Укажите алгебраические и геометрические кратности соответствующих собственных значений. Выясните, какие из операторов можно привести к диагональному виду, а какие нет. В случае, если это возможно, осуществить переход к диагональному виду, найти соответствующий базис и матрицу перехода к данному базису. Выполнить проверку.

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$

в) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$ (д/з)

г) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$ (д/з)

д) $A(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 2x_3, 8x_1 + x_2 - 4x_3, 12x_1 – 5x_3)$

е) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$.

семестр 2

***ЗАНЯТИЕ № 1.* Множества и операции над ними**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A', B' если:
1) A = {-1, 0, 3, 4}, B = {0, 4, 6}, U = {-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
2) A = [0, 2], B = [1, 5], U = Z
3) A = [0, 2], B = [1, 5], U = R
4) A = [0, 2], B = {0, 4, 6}, U = Z
5) A = [0, 2], B = {0, 4, 6}, U = R
6) A = (-∞, 7], B = (5, 8), U = Z
7) A = (-∞, 7], B = (5, 8), U = R
8) $A = \{x \in \mathbb{N} | x \vdots 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \vdots 10\}$, $U = \mathbb{N}$
9) $A = \{x \in \mathbb{N} | x \vdots 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \vdots 3\}$, $U = \mathbb{N}$
10) $A = \mathbb{N}$, B = Ø, $U = \mathbb{N}$

2. Доказать или опровергнуть следующие равенства:
1) $A \backslash B = A \cap \bar{B}$;
2) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{C})$;
3) $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$;
4) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;
5) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$;
6) $\overline{A \backslash B} = \bar{A} \cup (A \cap B)$;
7) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$;
8) $(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \backslash B$;
9) $\overline{(A \cap B)} \backslash C = \overline{(A \backslash C)} \cup \overline{(B \backslash C)}$;
10) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$

***ЗАНЯТИЕ №2.* Декартово произведение множеств**

1. Изобразить на декартовой плоскости декартово произведения $A \times B$ и $B \times A$
1) A = [1, 3], B = [1, 2],
2) A = [1, 2], B = (1, 2),
3) A = [1, 3), B = {1, 2},
4) A = {1, 2, 3}, B = {0, 1},
5) A = [1, 3], B = [1, ∞],
6) A = (1,∞), B = [2, ∞),
7) A = {1, 2, 3}, B = (0, ∞),
8) A = [0, 3], B = R.

2. Доказать свойства операций над множествами:
1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
3) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

***ЗАНЯТИЕ №3* Соответствия, виды соответствий**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 86, 87, 89 (1), 90 (1, 2), 91 (1 – 5), 93.

Домашнее задание № 89 (2), 90 (3, 4), 92 (6 – 9).

1. Охарактеризовать соответствия заданные на множестве всех действительных чисел:

а) $f(x)=\arcsin(\sqrt{x})$, б) $g(x)=\ln x$, в) $f(x)=\sin x$, г) $f(x) = \frac{1}{x}$, д) $f(x) = x^2 + 5$,

е) $h(x) = 2^{x+1}$, з) $f(x) = x^3 + 1$, и) $g(x) = \sqrt{x+1}$, к) $h(x) = \frac{2}{x+1}$, л) $g(x) = \mathrm{ctg}x$.

2. Охарактеризовать соответствия, действующие из множества {1, 2, 3, 4} во множество {1, 2, 3}
а) {<1, 2>, <1,1>, <2,2>, <2,3>, <3,3>},
б) {<1, 2>, <2,3>, <1,3>},
в) {<1, 2>, <2,3>, <3,3>, <4,1>},
г) {<1, 2>, <2,3>, <3,1>}.

3. Охарактеризовать соответствия заданные на множестве всех действительных чисел:

а) $f(x)=\sqrt{x}$, б) $g(x)=\ln x$, в) $f(x)=\sin x$, г) $f(x) = \frac{1}{x}$, д) $f(x) = x^2 + 5$,

е) $h(x) = 2^{x+1}$, з) $f(x) = x^3 + 1$, и) $g(x) = \sqrt{x+1}$, к) $h(x) = \frac{2}{x+1}$, л) $g(x) = \mathrm{ctg}x$.

Найти обратные соответствия для данных соответствий. Определить есть ли среди них функции.

***ЗАНЯТИЕ №4.* Композиция соответствий, обратное соответствие, функции**

1. Найти композиции $f \circ g$, $g \circ f$.

а) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\ln x$;

б) $f(x)=\sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$;

в) f = {<1, 2>, <2, 3>, <3,5>}, g = {<1, 1>, <2, 3>, <3,2>};
г) f = {<2, 2>, <2, 3>, <3,1>}, g = {<1, 4>, <2, 5>, <1,6>}.

2. Для всех соответствий из задания 1 найти обратные

3. f: A $\to$ B, g: B $\to$ C, h: C $\to$ D (A = C = D = R, B = R_+). Найти композиции:
$g \circ f$, $h \circ (g \circ f)$, $h \circ g$, $(h \circ g) \circ f$, $g \circ f$, $(g \circ f) \circ h$, $g \circ (h \circ f)$:

1) $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = 2^{x+1}$,

2) $f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, $h(x) = \dfrac{2}{x+1}$,

3) $f(x) = 3 + x^3$, $g(x) = \lg(4 + x)$, $h(x) = 11+x$,

4) $f(x) = \arcsin(x + 2{,}5)$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = 3^{\mathrm{tg}x}$.

ЗАНЯТИЕ №5. Бинарные отношения

1. Бинарные отношения ρ заданы на множестве действительных чисел. Определите, являются ли они рефлексивными, симметричными, транзитивными, антирефлексивными, антисимметричными.

а) $x \rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$,
б) $x \rho y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$,
в) $x \rho y \Leftrightarrow xy > 1$,
г) $x \rho y \Leftrightarrow y = |x|$,
д) $x \rho y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$,
е) $x \rho y \Leftrightarrow x - y$ является целым.

2. Бинарные отношения заданы на множестве целых чисел. Определите, являются ли они рефлексивными, симметричными, транзитивными, антирефлексивными, антисимметричными.

а) $m \rho n \Leftrightarrow 9m - n$ кратно 4,
б) $x \rho y \Leftrightarrow x \le y + 1$,
в) $x \rho y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$,
г) $x \rho y \Leftrightarrow (x + y)$ делится на 3,
д) $x \rho y \Leftrightarrow x - y$ делится на 3,
е) $x \rho y \Leftrightarrow 2x = 3y$,
ж) $x \rho y \Leftrightarrow x$ делится на $y \wedge x \ne y$
з) $x \rho y \Leftrightarrow$ НОД $(x, y) \ne 1$.

3. Приведите пример бинарного отношения, которое
а) Транзитивно, симметрично, но не рефлексивно,
б) рефлексивно, симметрично, но не транзитивно,
в) рефлексивно, транзитивно, но не симметрично.

*ЗАНЯТИЕ №6.*Отношение эквивалентности и порядка

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются следующие задачи:

1. Постройте всевозможные разбиения множества {1, 2, 3, 4} на классы.

2. Найти разбиение множества целых чисел на классы эквивалентности, если отношение эквивалентности задано по правилу $x \equiv y \Leftrightarrow (x - y) \vdots m$.

а) m = 5, б) m = 8, в) m = 6 (д/з), г) m = 7 (д/з).

3. Какие из данных отношений будут отношениями эквивалентности на множестве целых чисел:
а) $m \rho n \Leftrightarrow 7m - n$ кратно 6,
б) $m \rho n \Leftrightarrow 5m - n$ кратно 4,
в) $m \rho n \Leftrightarrow m$ кратно n,
г) $m \rho n \Leftrightarrow m^2 = n^2$,
д) $m \rho n \Leftrightarrow$ остатки от деления m и n на 7 одинаковы,
е) ($m \rho n \Leftrightarrow$ последние цифры чисел m и n одинаковы.

Решить задание е в случае, если множество, на котором задано данное отношение, являет множеством натуральных чисел.

***ЗАНЯТИЕ №7.* Сравнимость чисел по модулю. Отношение делимости**

Доказательства свойств делимости чисел. Решаются задачи. Вводится определение:

Целые числа a и b называются сравнимыми по натуральному модулю m (обозначение $a \equiv b \pmod m$), если разность между ними делится на m.

Эквивалентное определение – Целые числа a и b называются сравнимыми по натуральному модулю m, если остатки от деления на m у этих чисел равны.

1. Доказать, что данные определения эквивалентны.

2. Доказать, что отношение сравнимости является отношением эквивалентности.

***ЗАНЯТИЕ №8.* Классы вычетов.**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

1. Постройте все классы вычетов по модулю 7 и 6. Найдите сумму, разность, произведение классов [4] и [5] в соответствующем множестве.

2. Выписать три положительных и три отрицательных элемента, сравнимых

а) с числом 3 по модулю 5

б) с числом 2 по модулю 6.

3. Найдите НОД и НОК чисел 117 и 111999.

3. Выписать все элементы, сравнимые с числом 3 по модулю 5

(д/з) с числом 2 по модулю 6.

4. Доказать свойства:

а) $a \equiv b \pmod m \wedge c \equiv d \pmod m \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod m$;

б) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow ac \equiv bc \pmod m$;

в) $a \equiv b \pmod m \wedge c \equiv d \pmod m \Rightarrow ac \equiv bd \pmod m$.

5. Постройте таблицы сложения и умножения для всех классов вычетов по модулю

а) 5, б) 6, в) (д/3) 7, г) 2.

ЗАНЯТИЕ №9. Простые и составные числа. Отношение делимости.

Доказательство свойств делимости. НОД и НОК.

1. Выяснить, является ли число простым или составным. Если число составное, то разложить его на простые множители

а) 6643 б) 1769 в) 997 г) 2520

д/з д) 6497 е)1817 ж) 6600 з) 3551

2. Разложите на простые множители а) 26! б) (д/з) 16!

3. Найти все простые числа между а) 2320 и 2350 б) (д/з) 2640 и 2680

4. Доказать, что всякое простое число, большее 3, представимо в виде $6k \vdots 1$

5. Найдите все возможные значения простого числа p, если известно, что $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ – тоже простые.

6. Найдите все возможные значения простого числа p, если известно, что p + 10 – простое и p + 14 – простое.

7. Доказать, что если p – простое число, p > 3, то $(p^2 - 1) \vdots 24$

ЗАНЯТИЕ №10. **Группы, подгруппы**

1. Пользуясь критерием подгруппы и тем, что множество всех действительных чисел – группа по сложению, а множество всех действительных чисел без нуля – группа по умножению, определите, какие из перечисленных множеств образуют группу относительно сложения, группу относительно умножения:

а) Целые числа; Целые числа, кратные 5; Нечётные целые числа; Рациональные числа; Положительные рациональные числа; рациональные числа без 0; $M = \{a + b\sqrt{2}$, где a, b $\in Q\}$, $A = \{1, -1, 0\}$, $C = \{3^n, n \in Z\}$.

б) (д/з) Натуральные числа; целые числа, кратные трём; Четные целые числа; $D = \{5k - 1, k \in Z\}$, $A = \{k^2, k \in Z\}$ иррациональные числа, $B = \{1, -1\}$, $M = \{a + b\sqrt{3}$, где a, b $\in Z\}$, $C = \{3^n, n \in Z\}$.

2. Определите, какие из найденных в задании 1 групп являются подгруппами других групп из того же задания.

Домашнее задание № 131 (чётные).

ЗАНЯТИЕ № 11. Классы смежности группы по подгруппе

Задания для самостоятельного решения:

1. Даны подстановки:

$a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти все подгруппы и все нормальные делители данной группы. Построить левые и правые классы смежности по всем нетривиальным подгруппам.

2. Даны матрицы:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

Найти все подгруппы и построить левые и правые классы смежности по всем этим подгруппам.

3. Найдите классы смежности аддитивной группы векторов плоскости, выходящих из начала координат, по подгруппе векторов, лежащих на фиксированной прямой, проходящей через начало координат.

ЗАНЯТИЕ № 12. Нормальные делители группы

Задания для самостоятельного решения:

1. Докажите, что множество самосовмещений правильного треугольника образует группу. Найдите все подгруппы данной группы. Найдите левые и правые классы смежности по всем подгруппам. Укажите те из них, которые являются нормальными делителями.

2. Докажите, что множество поворотов квадрата образует подгруппу его самосовмещений. Найдите левые и правые классы смежности. Является ли эта подгруппа нормальным делителем.

3. Доказать, что множество всех чётных подстановок четырёхэлементного множества образует подгруппу всех подстановок данного множества. Докажите, что она является нормальным делителем. Постройте факторгруппу.

***ЗАНЯТИЕ №* 13 Поле комплексных чисел, алгебраическая форма комплексного числа**

1. Представить в алгебраической форме следующие комплексные числа:

$(1,-2),(-1,2),(0,0),(-2,-2),(\frac{1}{2};-1,5),(0,3),(3,0)$.

2. Вычислить выражения: $(1-i)^2, i^5, (1+\sqrt{3}i)^2, (2-3i)(2+3i), (1+\sqrt{3}i)^3,\ (\sqrt{3}+i)^3$.

3. Для чисел $-2+3i, -2-3i, 4-7i, 5, -4i, -2, -\lg 100, -i$ записать им противоположные, сопряженные и обратные числа.

4. Для чисел $z_1 = 3+2i$ и $z_2 = -4+i$ найти $z_1+z_2; z_1-z_2; z_1z_2; \frac{z_1}{\overline{z_2}};\ \mathrm{Re}\left(z_1z_2 + 2\frac{z_1}{\overline{z_2}}\right) - \mathrm{Im}\left(z_1+z_2\right)$.

5. Вычислите:

а) $(7-3i)^3$; б) $\dfrac{2-5i}{1-\sqrt{3}i}$; в) $\dfrac{z-\bar{z}}{2}$; г) i^5; д) i^{228}; е) i^{137}.

6. Вычислите:

а) $(2+i)^2$; б) $\dfrac{(1+2i)^3-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^3}$; в) $\dfrac{z+\bar{z}}{2}$; г) i^8; д) i^{65}; е) i^{235}.

***ЗАНЯТИЕ* 14. Геометрический смысл и тригонометрическая форма комплексного числа**

1. Изобразить заданное комплексное число на комплексной плоскости

2. Изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих данному условию

3. Записать в тригонометрической форме

Изобразите на комплексной плоскости числа

а) 2+4i; б) 4+2i; в) –3 – 5i; г) – i;
д) 2 – i; е) – 2 + i; ж) – 2; з) i.

11. Запишите числа комплексно-сопряжённые данным и на комплексной плоскости постройте векторы, изображающие данные числа и комплексно-сопряжённые с ними.
а) z = 3 + *i*; б) z = 3 - *i*; в) *i*; г) *i* – 3; д) 3; е) –5*i*.

12. На комплексной плоскости заштрихуйте все точки z, удовлетворяющие условиям
а) $|z| < 1$;
б) $|i - z| < 1$;
в) $|z| \geq 1$;
г) $|z + i| = 3$;
д) $\arg z = \frac{\pi}{4}$;
е) $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$;
ж) $|z - i| < |z + 2 - 3i|$;
з) $\arg z = \pi$;
и) $\begin{cases} |z - i| = 1 \\ \arg z = \frac{\pi}{2} \end{cases}$;
к) $|z| < |z/2| + 1$;
л) $|z - 1 + i| \leq 2$.
м) $\operatorname{Im} z \geq 3$
н) $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$

13. Представьте следующие числа в тригонометрической форме:
а) 1, – *i*, б) 1 – *i*, в) $-1-\sqrt{3}i$, г) –2 + 7i, д) $\sin\alpha - i\cos\alpha$,
е) *i*, –1, ж) 1 + *i*, з) $\sqrt{3} - i$, и) 5i, к) 3 – 5i, л) $-\cos\alpha + i\cos\alpha$.

***ЗАНЯТИЕ* 15. Действия над числами в тригонометрической форме**.

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 189 (4 – 6), 190 (1, 2), 192 (1, 2, 7, 8), 193, 194, 198, 199.

1.Вычислите с помощью перехода к тригонометрической форме:

а) $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i)(-\frac{\sqrt{2}}{6}+i\frac{\sqrt{6}}{6})$; б) $(6 + 2i\sqrt{3})(-3 - 3i)$

в) $\frac{1+i}{3+i3\sqrt{3}}$; г) $\frac{-2+i2\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$; д) $(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^{10}$; е) $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^6$

ж) $\frac{(\sqrt{3}-i)^4(1+i)^5}{(1+i\sqrt{3})}$; з) $\frac{(i+\sqrt{3})^5}{(i-1)^6}$.

2. Найдите корни n-ой степени из 1

а) n = 3; б) n = 4; в) n = 2; г) n = 6.

***ЗАНЯТИЕ № 16.* Вычисление корней**

3. Вычислите и результат представьте в тригонометрической форме:

а) $\sqrt{\dfrac{3-3i}{i+\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt{\dfrac{-2-2i}{i-1}}$; в) $\sqrt[5]{\dfrac{1-i}{-2+2i\sqrt{3}}}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}}$.

4. Вычислите и результат представьте в алгебраической форме:

а) $\sqrt{-3+4i}$; б) $\sqrt{15+8i}$

5. Решите уравнения:

а) $x^2 + 2x + 3 = 0$;

б) $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$;

в) $x^2 - (3 + 2i)x + 5 + i = 0$;

г) $z\bar{z} + 2\bar{z} = 3 + 2i$;

ЗАНЯТИЕ № 17. Циклические группы

Задания для самостоятельного решения:

1. Найдите порядок каждого элемента в мультипликативной группе корней степени n из 1. Выяснить является ли эта группа циклической, найти образующие элементы.

а) n = 5, б) n = 6, в) n = 8, г) n = 7.

2. Доказать, что аддитивная группа целых чисел - циклическая.

3. Даны подстановки:

$a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Выяснить, является ли данная группа циклической. Найти все её циклические подгруппы

ЗАНЯТИЕ № 18. Кольца и идеалы

Задания для самостоятельного решения:

Выясните, являются ли идеалами в данных кольцах (a, b – произвольные действительные числа) следующие множества:

а) целые числа в кольце комплексных чисел;

б) комплексные числа вида a + ai, где a действительное число, в кольце комплексных чисел;

в) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

г) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

д) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

е) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка

ЗАНЯТИЕ 19. Кольцо классов вычетов

Задания для самостоятельного решения:
1. Докажите, что множество целых чисел, кратных некоторому числу n, является идеалом кольца целых чисел. Постройте все классы вычетов по модулю 7 и 6. Укажите факторкольца. Найдите сумму, разность, произведение классов [4] и [5] в соответствующем множестве.
2. Выписать три положительных и три отрицательных элемента, сравнимых
а) с числом 3 по модулю 5
б) с числом 2 по модулю 6.

ЗАНЯТИЕ 20. Контрольная работа

4 семестр

ЗАНЯТИЕ №1. Теория делимости в кольце многочленов

1. Разделить многочлен f(x) на многочлен g(x) с остатком. Выписать соответствующую теорему о делении с остатком.

а) $f(x) = 2x^5 – 5x^3 – 8x$, $g(x) = –x^2 +2x– 3$

б) $f(x) = 2x^5 – 6x^3 + 2x – 8$, $g(x) = 3x^2 + 3$

в) $f(x) = 2ix^3 + (1+i)x^2 – x$, $g(x) = (1+i)x – (2 – 2i)$

г) $f(x) = 3x^6 – 2x^4 + 6x^3 – 8x + 11$, $g(x) = 2x^2 + 3x – 5$.

2. Доказать свойства делимости многочленов в бесконечных полях:

а) Каждый многочлен делится сам на себя;

б) Если многочлен f(x) делится на многочлен g(x), а g(x) делится на f(x), то эти многочлены ассоциированы (отличаются друг от друга на постоянный множитель);

в) Если f(x) делится на g(x), а g(x) делится на h(x), то многочлен f(x) делится на h(x);

г) Если f(x) и g(x)делятся на h(x), то и их сумма, разность и произведение делятся на h(x);

д) Если один из множителей в произведении делится на f(x), то и всё произведение делится на f(x);

е) каждый многочлен делится на любую константу, отличную от 0.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (в, г)

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №2. Наибольший общий делитель многочленов (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) многочленов

1. Найти НОД и НОК многочленов f(x) и g(x).

а) $f(x) = x^4 – 3x^3 + 3x^2 – 3x + 2$, $g(x) = x^3 – 2x^2 – x + 2$

б) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

в) $f(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 2$

г) $f(x) = x^6 + 6x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, $g(x) = x^5 + 6x^4 + 4x^2 + 4x + 6$

2. Найти НОД многочленов f(x) и g(x) и подобрать такие многочлены ϕ(x) и □(x), чтобы НОД(f(x), g(x)) = f(x) ϕ(x) + g(x)□(x):

а) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 – 2x^2 + x – 2$;

б) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 12$, $g(x) = x^3 – 2x^2 – 13x – 10$

в) $f(x) = x^3 – x^2 – 4x – 6$, $g(x) = x^3 + x^2 – 10x – 6$

г) $f(x) = x^5 – x^3 + 2x^2 – 2x + 2$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 6$

д) $f(x) = x^4 + x^3 – 3x^2 – 6x – 3$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

е) $f(x) = x^6 + x^5 – 3x^4 + 2x^3 + 4x – 2$, $g(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 6$

ж) $f(x) = x^3 + 3x + 3$, $g(x) = x^2 – x – 2$

з) $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 2 (д, е, ж)

ЗАНЯТИЕ №3. Схема Горнера

1. Пользуясь схемой Горнера, разделить f(x) на (x – a)

а) $f(x) = x^4 – 3x^3 + x – 1$, $a = 2$

б) $f(x) = 9x^3 + 8x^2 – 10x$, $a = – 3$ (д/з)

в) $f(x) = 4x^3 + x^2$, $a = – 1 – i$

2. Пользуясь схемой Горнера, найти значение f(x) в точке a

а) $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 – 8x + 40$, $a = – 3$

б) $f(x) = x^4 – 3x^3 + 6x^2 – 10x + 16$, $a = 4$(д/з)

в) $f(x) = 3x^4 – x + 300i$, $a = – 3 + i$

3. Используя схему Горнера, разделить f(x) на g(x)

а) $f(x) = 2x^5 – 5x^3 – 8x$, $g(x) = –x – 3$

б) $f(x) = 2x^5 – 5x^3 – 8x$, $g(x) = 3x + 3$

в) $f(x) = 2ix^3 + (1+i)x^2 – x$, $g(x) = (1+i)x – (2 – 2i)$ (д/з)

г) $f(x) = 3x^6 – 2x^4 + 6x^3 – 8x + 11$, $g(x) = 2x + 3$ (д/з)

4. Разложить многочлен f(x) по степеням (x – 2) и найдите значение многочлена и всех его производных при x = 2.

а) $2x^5 – x^3 – 2x^2 – 6x + 10$

б) $4x^3 – 2x^2 + 5x – 1$ (д/з)

5. Пользуясь схемой Горнера, раскрыть скобки (разложить по степеням x)

а) $(x + 3)^4 – 3(x + 3)^3 + 5(x + 3) – 2$

б) $2(x – 3)^6 + 7(x – 3)^5 + (x – 3)^3 – 5(x – 3)^2 + 4$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 б, № 2 б, № 3 (в, г), №4 б.

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №4. Теорема Безу

1. Показать, что если многочлен f(x) с целыми коэффициентами принимает при x равном 1, 2, 3, 4 значения равные некоторому простому числу p, то он не может принимать значение 2p ни при каком целом x.

2. Многочлен f(x) при делении на (x – 1) даёт остаток 1, при делении на (x – 2) даёт остаток 3, при делении на (x – 3) остаток 5 и при делении на (x – 4) остаток 6. Найти остаток от деления f(x) на произведение (x – 1)(x – 2)(x – 3)(x – 4).

Ответ: $(-1/6)x^3 + x^2 + (1/6)x$

3. Найти остаток от деления многочлена $f(x) = 1 + x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ на

а) $x^2 – 1$

б) $x^2 + 1$

в) $x^4 – 1$

Ответы: а) $6x + 1$, б) 1; в) $3x^3 + 3x + 1$.

4. Найти значение f(x) в точке a

а) $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 – 8x + 40$, $a = – 3$

б) $f(x) = x^4 – 3x^3 + 6x^2 – 10x + 16$, a = (д/з)

в) $f(x) = 3x^4 – x + 300i$, $a = – 3 + i$

5. Докажите, что если k – кратное 3 натуральное число, то $x^k + 1$ делится на $x^2 – x + 1$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 3 (в), № 4 б.

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №5. Приводимые и неприводимые многочлены

1. Разложить на неприводимые множители над полем комплексных чисел.

а) $x^2 + x + 1$	ж) $2x + 2$.
б) $x^4 + 1$	з) $6x^2 + x + 3$
в) $x^4 + x^2 + 1$	и) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$
г) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$	к) $x^6 - 1$
д) $x^6 - 27$	л) $x^2 + 2x + 3$
е) $x^4 + 8x^3 + 8x - 1$	м) $x^4 - 7$

Интерактивная форма – микрогруппы составляют многочлдены по заданным корням (все корни рациональные, а затем предлагают другим микрогруппам разложить данные многочлены на множители на скорость.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (з - м)

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №6. Отделение неприводимых кратных множителей

1. Выделить кратные множители многочленов.

$x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2$,

а) $f(x) = x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72$,

б) $f(x) = x^5 - 7x^3 - 2x^2 + 12x + 8$, (д/з)

в) $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$,

г) $f(x) = x^6 + 6x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, (д/з)

д) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$,

е) $f(x) = x^6 + 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 4x - 1$,

2. Найдите НОД многочлена и его производной:

а) $f(x) = (x - 1)^3(x + 1)^2(x - 3)$,

б) $g(x) = (x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1)$.

3. Найдите все значения а при которых многочлен $x^4 - 4x + a$ не имеет кратных корней.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (б, г)

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №7. Решение уравнений третьей степени

1. Найти все комплексные корни уравнений:

а) $x^3 – 9x^2 + 21x – 5 = 0$

б) $x^3 – x – 6 = 0$

в) $x^3 – 3x^2 + 3 = 0$ (д/з)

г) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ (д/з)

д) $x^3 – 6x + 9 = 0$

е) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$

ж) $x^3 – 3x^2 – 3x + 11 = 0$

з) $x^3 + 3x^2 – 3x – 1 = 0$.

Интерактивная форма – микрогруппы составляют уравнения третьей степени с иррациональными корнями и передают его другим микрогруппам для решения на скорость

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (в, г)

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №8. Решение уравнений четвёртой степени

Найти все комплексные корни уравнений:

а) $x^4 + 8x^3 + 15x^2 – 4x – 2 = 0$

б) $x^4 – 2x^3 + 2x^2 + 4x – 8 = 0$

в) $x^4 – x^3 – x^2 + 2x – 2 = 0$

г) $x^4 – 4x^3 + 3x^2 + 2x – 1 = 0$ (дополнительно)

д) $x^4 + 2x^3 – 2x^2 + 6x – 15 = 0$ (д/з)

е) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x – 7 = 0$ (д/з)

ж) $x^4 – x^3 – 3x^2 + 5x – 10 = 0$ (д/з)

з) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 – 1 = 0$

и) $x^4 – 2x^3 + x^2 + 2x – 1 = 0$

к) $x^4 – 2x^3 + 4x^2 – 2x + 3 = 0$

л) $x^4 – 2x^3 + 3x^2 – 2x – 2 = 0$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (д, е, ж)

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007**.** – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №9. Теорема Виета, многочлены над полем действительных чисел

1. Составить нормированный многочлен наименьшей степени над полем комплексных чисел, имеющий корни:

а) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = 2$ Ответ: $x^4 – 4x^3 + 3x^2 + 4x – 4$

б) $x_1 = i$, $x_{2,3} = 1$. Ответ: $x^3 + (-2 + i)x^2 + 2x + 2$

в) $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4,5} = -1$ (д/з) Ответ: $x^5 + x^4 – 2x^3 – 2x^2 + x + 1$

г) $x_{1,2} = i$, $x_{3,4} = -i$. (д/з) Ответ: $x^4 + 2x^2 + 1$

д) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ Ответ: $x^3 – 6x^2 + 11x – 6$

е) $x_{1,2} = i$, $x_{3,4} = 1 + i$. Ответ: $x^4 – (2+4i)x^3 – (5 – 6i)x^2 + (6+2i)x – 2i$

2. Найдите соотношения коэффициентов нормированного кубического многочлена, при котором один корень равен сумме двух других.

3. Не решая квадратного уравнения, составьте новое уравнение, корнями которого были бы величины, обратные квадратам корней данного уравнения:

а) $2x^2 – x + 1$;

б) $x^2 + x + 6$.

4. Найдите все многочлены вида $x^2 + px + q$, для которых коэффициенты p, q являются корнями.

5. Найдите все значения a при которых многочлены $x^2 – ax + 2$ и $x^2 + ax + 2$ имеют общий корень.

6. Выяснить какие из многочленов неприводимы над полем действительных чисел. приводимые разложить на неприводимые множители

а) $x^3 + x^2 – 2$

б) $x^4 + 1$

в) $x^4 + x^2 + 1$

г) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$

д) $x^6 – 27$

е) $x^4 + 8x^3 + 8x – 1$

ж) $x^3 + 9x^2 + 9x + 8$

з) $x^3 – 6x^2 + 11x – 6$

и) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$

к) $x^6 – 1$

л) $x^2 + 2x + 3$

м) $x^4 – 7$

7. Найти нормированный многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий:

а) простой корень $2+i$ и двукратный корень 1.

б) простой корень -3 и двукратный корень $1-i$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (в,г), № 6 (и - м), №2 б. Подготовка к контрольной.

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №10. Многочлены над полем рациональных чисел

1. Найдите рациональные корни многочлена:

а) $x^3 - 11x^2 + 38x - 40$

б) $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 2$

в) $15x^5 - 8x^4 + 46x^3 + 21x^2 - 21x + 3$

г) $x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 23x^2 - 30x - 8$ (д/з)

д) $6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ (д/з)

е) $3x^5 + 17x^4 + 36x^3 + 38x^2 + 19x + 5$

2. Выяснить, являются ли данные многочлены приводимыми над полем рациональных чисел. Если да, то разложить многочлены на множители над этим полем

а) $3x^2 - 2x - 1$

б) $2x^2 - 3x + 4$

в) $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$

г) $2x^3 + 12x^2 + 17x - 2$

д) $2x^8 + 14x^3 - 35x^2 - 56x + 63$

е) $x^4 - 2x + 3$ (замена $x = y + 1$)

ж) $2x^4 + 9x^3 + 20x^2 + 15x + 32$ (замена $x = y - 2$)

3. Выяснить, являются ли данные многочлены приводимыми над полем рациональных чисел. Если да, то разложить многочлены на множители над этим полем

а) $x^2 - x + 0.25$

б) $3x^3 + 4x^2 + 4x + 4$

в) $x^3 + x^2 - x - 1$

г) $30x^3 + 19x^2 - 1$

д) $2x^5 - 15x^3 + 21x - 24$

е) $3x^6 - 20x^4 + 30x^2 - 20x + 20$

ж) $4x^7 + 21x^5 + 28x^4 - 14x^2 - 35$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (г, д), № 2 (б, г), № 3(ж)

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №11. Контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ №12. Расширения полей

1. Найдите минимальный многочлен для числа над полем рациональных чисел:

а) 1

б) $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$

в) $-1 + i\sqrt{3}$

г) $\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}$

д) $\cos 10^0$

е) i

ж) $1 - 2\sqrt[3]{4}$

з) $1 + \sqrt[5]{11}$

и) $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

к) $\sin 10^0$.

2. Освободитесь от α в знаменателе дроби, где α – корень указанного уравнения:

а) $\frac{\alpha}{\alpha^3+1}$, $\alpha^3 - 2\alpha + 2 = 0$

б) $\frac{1}{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2}$, $\alpha^4 + \alpha^3 - 4\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$

в) $\frac{\alpha^2}{\alpha^4+1}$, $\alpha^4 + 2\alpha + 2 = 0$

г) $\frac{\alpha^2-3\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\alpha^3 + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$.

3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$

б) $\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

в) $\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt[4]{7}+\sqrt{7}-1}$

г) $\frac{11}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1}$

4. Доказать, что задачи о трисекции куба и об утроении угла неразрешимы с помощью циркуля и линейки.

ЗАНЯТИЕ №13. Многочлены от нескольких переменных. Симметрические многочлены

1. Расположите члены следующих многочленов в лексикографическом порядке.

а) $x_1 + x_2 + x_3$

б) $3x_1^2 + 3x_2^2 + x_2$

в) $x_1 x_2 + x_2 x_{13}$

г) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3$

2. Какие из многочленов являются симметрическими? Укажите их старшие члены.

а) $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$

б) $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$

в) $(x_1 - x_2 - x_3)(x_2 - x_1 - x_3)(x_3 - x_1 - x_2)$

г) $(x_2^3 + x_1^2x_3 - x_3^3)(x_1^2 - x_1^2x_2x_3)(x_1^3x_2^2 - x_1^4 + x_2^2)$

3. Среди перечисленных одночленов укажите те, которые могут быть старшими членами симметрических многочленов:

а) $x_1^5 x_2^3x_3^5$; б) $x_2^5 x_3^4x_4^3$ в) $x_1^5 x_2^5x_3^5$; г) $x_1^4 x_2^4x_3$; д) $x_2^5 x_3x_1^4$; д) $x_2^4 x_3x_1^5$;

4. Выразите следующие многочлены через основные (элементарные) симметрические многочлены:

а) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$

б) $(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$

в) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ (д/з)

г) $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$ (д/з)

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 4 (в, г),

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №14. Применения симметрических многочленов

1. Вычислить значения симметрического многочлена f(x) от всех комплексных корней многочлена $\phi(x)$

а) $f(x_1, x_2, x_3) = S(x_1^3 x_2)$, $\phi(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4$

б) Найдите сумму кубов комплексных корней многочлена

$\phi(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

2. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^6 + y^3 = 65 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 8 \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ xy = 8 \end{cases}$

3. Решите уравнение:

$x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 2 (б, г), № 3.

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №15. Контрольная работа

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Веселова, Л. В. Алгебра и теория чисел: учебное пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов ; Казанский национальный исследовательский технологический университет. – Казань : Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2014. – 107 с.: ил. – Режим доступа. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428287)
2. Алгебраические структуры и их приложения: учебное пособие / Л. В. Зяблицева, С. Ю. Корабельщикова, И. В. Кузнецова, С. А. Тихомиров; – Архангельск: Северный (Арктический) федеральный университет (САФУ), 2015. – 169 с. – Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436142
3. Смолин Ю. Н. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие / Ю. Н. Смолин. — М. : ФЛИНТА : Наука, 2017. — 464 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=1034573

Дополнительная литература

1. Иванова С. А. Линейная алгебра : учебное пособие / С. А. Иванова, В. А. Павский ; Кемеровский государственный университет. – 2-е изд. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2019. – 125 с. : ил., табл. – Режим доступа:: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573547
2. Линейная алгебра. Линейные операторы. Квадратичные формы. Комплексные числа: Учебное пособие / Рубашкина Е.В. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 38 с. (URL: https://znanium.com/catalog/product/544419). https://znanium.com/read?id=17915

Интернет-ресурсы

- ЭБС ZNANIUM.COM http://znanium.com
- ЭБС «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru
- Электронная библиотека http://lib.mexmat.ru/books/75829 (свободный доступ)
- Электронная библиотека http://www.razym.ru (свободный доступ)
- http://nsportal.ru/sites/default/files/2012/12/10/tvorcheskiy_proekt_po_matematike_na_temu.docx.

http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал