

Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе

С.Н. Титов
«25 » июня 2021 г

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Программа учебной дисциплины Предметно-исследовательского модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего
образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Математика

(заочная форма обучения)

Составитель: Сибирева А.Р, к.ф-м.н.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-
математического и технологического образования, протокол от
21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Избранные вопросы математического анализа» относится к Блоку 1. Дисциплины (модули), части, формируемой участниками образовательных отношений Дисциплины, модули по выбору 3 (ДВ3) учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Математика», заочной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Математический анализ», «Алгебра», «Геометрия», «Теория чисел и числовые системы».

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик, выполнения и защиты выпускной квалификационной работы, подготовки и сдачи государственного экзамена.

Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины «Избранные вопросы математического анализа» является обобщении и углублении знаний по курсу математического анализа, формировании представления об их приложениях, о возможностях продолжения образования в области математического анализа, о современных проблемах математического анализа, а также в формировании абстрактно-логического мышления и умения оперировать такими общематематическими понятиями. Существенной частью курса является обучение студентов самостоятельному изучению вопросов, оказывается помочь в работе с литературой, формируются навыки выступления с докладами. В процессе изучения дисциплины будущие учителя знакомятся с различными методами проведения строгих логических доказательств, готовятся к грамотному и логичному изложению материала на уроках математики, а также обучаются решению некоторых задач повышенной сложности школьного курса, олимпиадных задач.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Избранные вопросы математического анализа» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11 Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования			
ПК-11.1. Знает основные научные	ОР-1		

<p>понятия и особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач.</p>	<p>Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области</p> <p>ОР-2</p> <p>Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области.</p>		
<p>ПК-14. Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями</p> <p>ИПК-14.1. Знает роль и возможности применения аппарата предметной области в смежных научных областях, их методологическое и мировоззренческое значение; имеет представление о междисциплинарных</p>	<p>OP-3. возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях</p>	<p>OP-4. решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине</p>	

связях, научных методах смежных областей			
ИПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач.			

- 1. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Номер семестра	Учебные занятия							Форма промежуточной аттестации							
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час									
	Трудоемк.														
	Зач. ед.	Часы													
9	2	72	2	6	-	58	Зачёт 6								
10	3	108	4	10	-	85	Экзамен 9								
Итого:	5	180	6	16	-	143		15							

- 2. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

2.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование разделов и тем (с разбивкой на модули)	Количество часов по формам организации обучения
-------	---	---

		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
	9 семестр				
1.	Мощность множеств. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега.	2		6	58
	Итого	2		6	58
	10 семестр				
1.	Начала функционального анализа.	2		6	
2.	Элементы теории линейных операторов.	2		4	45 40
	Итого	4		10	85
	Всего	6		16	143

2.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса

Мощность множеств. Взаимнооднозначное соответствие множеств. Счетные множества. Мощность континуума. Сравнение мощностей.

Мера, измеримые функции, интеграл Лебега. Множества, измеримые по Лебегу на прямой, на плоскости. Свойства меры Лебега. Множества нулевой меры Лебега. Понятие измеримой числовой функции. Свойства измеримых функций. Понятие интеграла Лебега от измеримой ограниченной функции. Существование интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

Начала функционального анализа. Элементы теории линейных операторов.

Метрическое пространство, примеры метрических пространств. Предел последовательности точек метрического пространства.

Векторные пространства. Базис векторного пространства. Размерность. Матрица перехода от одного базиса к другому.

Нормированные пространства, примеры.

Пространства со скалярным произведением, примеры. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы. Ряды Фурье по ортогональной системе векторов, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Ортонормированные базисы. Пространства $L_1[a;b]$ и $L_2[a;b]$.

Линейные операторы. Матрицы линейных операторов в различных базисах. Линейные операторы простой структуры. Базисы, состоящие из собственных векторов.

Интерактивные формы: Коллективное исследование (метрические пространства и их свойства). Мини-конференция «Парад пространств». Мозговой штурм – решение задач.

3. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляющую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения самостоятельных и контрольных работ по дисциплине.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

ОС-1 Тест

Множество	\mathbf{R} вещественных чисел x, y	\mathbf{R}^2 двумерных векторов $x = (x_1, x_2),$ $y = (y_1, y_2)$	$S_{\text{огр}}(\mathbf{R})$ ограниченных последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$	$F([a; b], \mathbf{R})$ всевозможных функций $x(t) : [a; b] \rightarrow \mathbf{R},$ $y(t) : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$	M всевозможные «слов» x, y в латинском алфавите
Функция $\rho(x, y) =$ \dots	$\arctg x - y $	$\sin^2(x_1 - y_1) +$ $+ \cos^2(x_2 - y_2)$	$\max_{i \in N} x_i - y_i $	$\sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}$	Количество несовпадающих символов, стоящих в x, y на

					одинаковых местах
Заключение:					
Функция ρ является метрикой на данном множестве					
Функция ρ не задает метрику на данном множестве, так как определена не для всех пар (x, y)					
Функция ρ не задает метрику на данном множестве, так как не является неотрицательной					
Функция ρ не задает метрику на данном множестве, так как не является невырожденной					
Функция ρ не задает метрику на данном множестве, так как не обладает свойством симметрии					
Функция ρ не задает метрику на данном множестве, так как не удовлетворяет неравенству треугольника					

ОС-2. Темы докладов

- Предел последовательности в метрическом пространстве: единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности.
- Теорема об объединении и пересечении замкнутых множеств, открытых множеств в метрическом пространстве.

3. Фундаментальные последовательности. Ограничность фундаментальной последовательности. Фундаментальность сходящейся последовательности.
4. Теоремы о свойствах полных метрических пространств.
5. Теоремы о свойствах компактных метрических пространств.
6. Равносильность определений непрерывного отображения.
7. Сохранение компактности при непрерывном отображении.
8. Непрерывность сжимающего отображения. Существование не более чем одной неподвижной точки у сжимающего отображения.
9. Принцип сжимающих отображений (существование хотя бы одной неподвижной точки у сжимающего отображения).
10. Сходимость ряда точек банахова пространства и сходимость ряда норм точек.
11. Неравенство Коши-Буняковского в пространстве со скалярным произведением.
12. Разложение в ряд Фурье по ортонормированной системе. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

ОС-3. Самостоятельная работа

1. Построить ортонормированные базисы пространств, натянутых на векторы:
 $a_1 (1, 2, 2, -1)$; $a_2 (1, 1, -5, 3)$; $a_3 (3, 2, 8, -7)$. Найти ортогональное дополнение данного пространства до базиса пространства R^4 .
2. Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу, ядро, образ, ранг, дефект, собственные значения и множество собственных векторов; если возможно привести матрицу этого оператора к диагональному виду и указать соответствующий базис:
 - a) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$
 - б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$

ОС-4. Самостоятельная работа

Убедитесь в том, что оператор $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, 2x_3)$ является линейным, и составьте его матрицу. Укажите все различные корневые подпространства данного оператора. Приведите матрицу оператора к жордановой нормальной форме. Укажите соответствующий базис и матрицу перехода. Убедитесь в правильности построения ЖНФ путём непосредственной проверки с помощью матрицы перехода.

ОС-5. Темы рефератов и сообщений

Студенты разбиваются на микрогруппы по 2-3 человека в зависимости от количества студентов в группе, и получают задание разработать план-конспект сообщения по заданной теме. Провести выступление с сообщением.

1. Спектральная теорема и ее приложения.
2. Решение матричных уравнений с помощью перехода к жордановой нормальной форме.
3. Инвариантные множители и элементарные делители матриц линейных операторов.
4. Собственные и присоединенные элементы линейных операторов (в конечномерных и бесконечномерных пространствах).
5. Симметрические операторы и их свойства (сравнение конечномерного и бесконечномерного случаев).
6. Изометрические операторы и их свойства (сравнение конечномерного и бесконечномерного случаев).
7. Нормальные операторы и их свойства (сравнение конечномерного и бесконечномерного случаев).
8. Положительные операторы и их свойства (сравнение конечномерного и бесконечномерного случаев).

4. Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-6. Экзамен.

1. Понятие метрического пространства. Важнейшие примеры метрических пространств.
2. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве. Единственность предела. Сходимость и ограниченность. Сходимость в важнейших метрических пространствах.
3. Фундаментальные последовательности точек метрического пространства. Сходимость и фундаментальность. Полные метрические пространства. Пополнение метрического пространства. Примеры.
4. Понятие нормированного пространства. Метрика в нормированном пространстве. Банаховы пространства. Примеры.
5. Линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка множества в нормированном пространстве. Линейные многообразия, подпространства. Примеры.
6. Базис нормированного пространства. Размерность нормированного пространства. Сепарабельные нормированные пространства. Примеры.
7. Понятие пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Норма и метрика в пространстве со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Примеры.
8. Ортогональные векторы в гильбертовом пространстве, ортогональное дополнение множества, проекция на подпространство и расстояние до подпространства. Теорема Пифагора. Ряд Фурье по ортогональной системе векторов. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
9. Ортогональные и ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве. Изоморфизм счетномерных гильбертовых пространств.
10. Векторные пространства и подпространства. Арифметическое n -мерное векторное пространство. Линейные комбинации и линейные оболочки.
11. Базис и размерность векторного пространства. Координаты векторов в базисе. Размерность векторного пространства. Связь между размерностью пространств и подпространств. Дополнение базиса подпространства до базиса пространства.
12. Линейные и нелинейные операторы. Примеры. Матричная форма линейного оператора в конечномерном пространстве.
13. Собственные векторы и спектры линейных операторов.
14. Матрица перехода от одного базиса к другому. Матрицы линейных операторов в различных базисах.
15. Теорема о независимости характеристического многочлена от выбора базиса.
16. Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих попарно различным собственным значениям.
17. Ядро и образ, ранг и дефект линейного оператора.

Перечень учебно-методических изданий кафедры по вопросам организации самостоятельной работы обучающихся

1. Глухова Н.В. Линейные операторы: учебно-методическое пособие для подготовки магистров и бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» физико-математического профиля – Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2017 – 35 с.

4. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволяют выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль освоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ, используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации OC-1 Тест OC-2. Темы докладов OC-3. Самостоятельная работа OC-4. Самостоятельная работа OC-5. Темы рефератов и сообщений	OP-1. Знает основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач. OP-2. Решает задачи по дисциплине, умеет проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения.
	Оценочные средства для промежуточной аттестации зачет (экзамен) 9 семестр-зачет OC-6 10 семестр - Экзамен в форме устного собеседования	OP-3. Знает возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях OP-4. умеет решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачёт, экзамен
9,10 семестры	Разбалловка по видам работ	1x 1=1 балл	3x 1=3 балла	164 балла	32 балла
	Суммарный макс. балл	1 балл max	4 балла max	168 баллов max	200 баллов max
	Разбалловка по видам работ	2 x 1= 2балла	5x 1=5 баллов	229 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	2 балла max	7 баллов max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 9 семестра

	Баллы (2 ЗЕ)
«зачтено»	более 100
«не зачтено»	100 и менее

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 10 семестра

Оценка	Баллы (3 ЗЕ)
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись лекции – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений,

возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

6. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник : / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – 7-е изд. – Москва : Физматлит, 2012. – 573 с. – ISBN 978-5-9221-0266-7. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563>
2. Треногин, В.А. Функциональный анализ : учебник / В.А. Треногин. – 3-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2002. – 488 с. – ISBN 5-9221-0272-9. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613>

Дополнительная литература

1. Золотарев М. Л., Федоров И. А. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: учебное пособие. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2014. – 116 с. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=278960
2. Ильин В. А. , Позняк Э. Г. Основы математического анализа: учебник, Ч. 2 . – М.: Физматлит, 2009. – 464 с. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=83225
3. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебное пособие / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Физматлит, 2005. – 240 с. – ISBN 5-9221-0271-0
URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82612>