Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0233C9D60038B01A9E48C1A3FBB4A9D9F6
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 07.07.2023 до 28.04.2038

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе С.Н. Титов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЕГЭ ПО АЛГЕБРЕ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

Программа учебной дисциплины модуля «Задачи повышенной сложности в школьном курсе»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «26» мая 2023 г. № 5

Ульяновск, 2023

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Решение задач ЕГЭ по алгебре повышенной сложности» относится к дисциплинам по выбору части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) модуля «Задачи повышенной сложности в школьном курсе» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин: Алгебра и теория чисел, Математическая логика, Дискретная математика, Элементарная математика, а также учебной практики по математике .

Результаты изучения дисциплины являются основой для прохождения дисциплин и практик: Числовые системы, Теория вероятностей и основы математической статистики, Научно-исследовательская работа, Подготовки к сдаче и сдача государственного экзамена, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины является подготовка учителя к будущей профессиональной деятельности: формирование способности к преподаванию математики как в обычных общеобразовательных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Задачей освоения дисциплины является подготовка будущего учителя к индивидуальной работе с одаренными детьми, к подготовке учащихся к единому государственному экзамену, закрепить умение решать задачи повышенной сложности школьного курса математики.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	умеет	Владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации	ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач	ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
ПК-1. Способен	ОР-4. Знает роль и	ОР-6 умеет	ОР-7 владеет

осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач. ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.	осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.	действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.

2. **Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Номер семестра	Всего		Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Трудоемк.								
	Зач. ед.	Часы	Лекции, час.	Практические занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Лабораторные занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Самостоят. работа, час.	
7	3	108	18	30	-	-	-	33	экзамен (27)
Итого:	3	108	18	30	-	-	-	33	

3. **Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
7 семестр				
Теоретико-числовые задачи	6	12		10
Экономические задачи	6	10		10
Задачи с параметрами	6	8		13
Экзамен				27
Всего по дисциплине:	**18**	**30**	**-**	**60**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

1 Теоретико-числовые задачи

НОД и НОК, свойства делимости, признаки делимости. Задачи на делимость. Задачи решаемые в целых числах. Задачи на сокращение дробей, на установление остатков от выражений. Текстовые задачи на делимость. Применение сравнений. Применение формул арифметических и геометрических прогрессий. Оптимизация в задачах на делимость

2. Экономические задачи.

Задачи на проценты и кредиты. Равные и дифференцированные платежи. Задачи на равные и дифференцированные платежи с дополнительными условиями. Оптимизационные задачи и различные методы их решения.

4. Задачи с параметрами.

Различные типы задач с параметрами. Определение количества решений. Аналитический метод решения задач с параметрами. Геометрический метод решения задач с параметрами. Системы уравнений с параметрами. Неравенства с параметрами.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий.

ОС-1. Индивидуальное задание

Студенты получают чужие решения задач ЕГЭ и критерии оценивания и оценивают по ним полученные работы (возможна взаимопроверка контрольных). Указать все ошибки.

Примерный вариант:

Дана задача. «На доске записано более 11, но менее 15 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно – 4, среднее арифметическое положительных из них равно 3, а среднее арифметическое отрицательных из них равно – 6. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел больше, положительных или отрицательных? в) Сколько записано положительных чисел?»

Ученик предложил такое решение «Так как среднее всех чисел отрицательно, следовательно, отрицательных чисел больше. Это подтверждается еще и тем, что среднее всех отрицательных больше по модулю, чем среднее всех положительных. Таким образом, отрицательных, очевидно, больше. Пусть имеется k положительных чисел и n – отрицательных. Тогда всего чисел $k + n$. Так как среднее – это сумма всех чисел, деленная на их количество, следовательно, сумма всех чисел равна $–4(k +n)$, сумма всех положительных равна $3k$, сумма всех отрицательных: $–6n$. Тогда

$$3k – 6n = –4k – 4n$$

$$7k = 2n$$

Таким образом, k делится на 2, а n делится на 7. Чисел меньше 15, поэтому отрицательных чисел может быть либо 7, либо 14. Если отрицательных 14, то положительных будет 0, а 0 не делится на 2, поэтому 14 чисел быть не может. Значит, отрицательных чисел 7. Положительных меньше (и их количество делится на 2), значит, их либо 6, либо 4, либо 2. Но $7 + 2 = 9$, $7 +4 = 11$, а чисел больше 11, значит, положительных чисел 6, а всего чисел 13. Ответ: а) 13, б) отрицательных больше, в) 6».

Прочитайте внимательно решение. Есть ли в данном решении ошибки? Укажите их все и дайте правильное решение.

ОС-2 Групповое интерактивное задание

Студенты по микрогруппам с использованием материалов, изученных в рамках дисциплины разрабатывают конспект занятия по подготовке к ЕГЭ для школьников. Проведение фрагмента занятия.
Возможные темы:
Задачи на кредиты
Текстовые задачи ЕГЭ
Задачи на делимость и другие свойства целых чисел.
Арифметические и геометрические прогрессии в задачах ЕГЭ .

ОС-3 Контрольная работа.

Примерный вариант
1. Планируется взять кредит 15 декабря. На сумму 100 тысяч рублей. Условия возврата
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца с января по март выплачивается 30 тыс.;

Сколько нужно будет выплатить 12 апреля, чтобы кредит был полностью погашен.

2.

Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 96 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба?

3**.** Может ли частное трехзначного числа и суммы его цифр а) быть равно 89? б) быть равно 86?

ОС-4 Тест

Примерный вопрос

1. Выберете одно, наиболее подходящее окончание фразы. Элективный курс по основам теории чисел лучше всего ориентировать на подготовку …
   а) к решению задач ЕГЭ по стереометрии
   б) к решению тригонометрических уравнений
   в) к решению задач ЕГЭ высокого уровня сложности, связанных с целыми числами, и к решению арифметических задач олимпиадного характера

г) к решению задач ЕГЭ на логарифмические неравенства

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

Глухова Н.В., Фолиадова Е.В. Олимпиадные и исследовательские задачи в общем и профессиональном математическом образовании: учебное пособие для подготовки магистров и бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» физико-математического профиля – Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2018 – 66 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Индивидуальное задание ОС-2 Интерактивное групповое задание ОС-3 Контрольная работа ОС-4 Тест	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики. ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию. ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-5 Экзамен в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. НОД и НОК в задачах ЕГЭ
2. Пример применения свойств делимости, признаков делимости при решении задачи 18 ЕГЭ.
3. Методы решения задач на делимость.
4. Методы решения задач в целых числах.
5. Задачи на сокращение дробей, на установление остатков от выражений.
6. Текстовые задачи на делимость.
7. Применение сравнений в решении задач ЕГЭ.
8. Применение формул арифметических и геометрических прогрессий.
9. Оптимизация в задачах на делимость
10. Классификация экономических задач ЕГЭ.
11. Задачи на проценты и кредиты.
12. Задачи на кредиты с равными платежами
13. Задачи на кредиты с дифференцированными платежами.
14. Задачи на равные и дифференцированные платежи с дополнительными условиями.
15. Оптимизационные задачи решаемые графическим методом.
16. Оптимизационные задачи, решаемые с помощью производных
17. Оптимизационные задачи, решаемые
18. Классификация задач с параметрами.
19. Определение количества решений в задачах с параметрами.
20. Аналитический метод решения задач с параметрами.
21. Геометрический метод решения задач с параметрами.
22. Критерии проверки задач ЕГЭ.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
7 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 Баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. Балл	9 баллов max	24 балла Max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося

Оценка	Баллы (3 ЗЕ)
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Практическое занятие № 1. Задачи, решаемые в целых числах

Задания для решения

- Для съемок музыкального клипа группа «Егорушки» собирала в мешки тополиный пух. Саша собрал более половины всех мешков – в 5 раз больше, чем Валера, и на 10 мешков больше, чем Андрей. Возмущенный такой несправедливостью, Валера отобрал у каждого из приятелей несколько мешков, так что у всех троих мешков стало поровну. Сколько всего мешков пуха собрали «Егорушки»?
- Найдите двузначное число, равное сумме чисел его десятков и квадрата его единиц.
- Найдите двузначное число, которое равно удвоенному произведению его цифр.

- Может ли четырёхзначное число, у которого все цифры одинаковые, быть точным квадратом (т.е. квадратом натурального числа)? Существует ли четырёхзначное число, являющееся точным квадратом, у которого последние три цифры одинаковые? Найдите четырёхзначное число, являющееся точным квадратом и такое, что его первые две цифры равны между собой и последние две цифры равны между собой.

Найдите все пары натуральных чисел. Разность квадратов которых равна 55.

Практическое занятие № 2. Задачи с НОД и НОК

Задания для решения

1. Найдите все пары натуральных чисел, у которых НОК = 78, а НОД = 13.
2. Найдите все такие пары натуральных чисел, разность которых равна 66, а НОК равен 360.
3. Существуют ли такие натуральные числа n при которых дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ сократима?

4. Найдите шестизначное число, начинающееся с цифры 2, которое от перестановки этой цифры в конец числа увеличивается в 3 раза.

5. Известно, что числа 2077 и 100 при делении на a дают одинаковый остаток. Найдите a.

6. Существует ли четырёхзначное число, которое делится на 81 и на 87, а при делении на 85 даёт в остатке 3?

Найдите двузначное число, которое на 19 больше суммы квадратов его десятичных цифр и на 44 больше удвоенного произведения его цифр.

7. Найдите двузначное число, равное квадрату его единиц, сложенному с кубом его десятков.

8. Существует ли число, которое при делении на 3 даёт в остатке 1, при делении на 4 даёт в остатке 2, при делении на 5 даёт в остатке 3, …, при делении на 2017 даёт в остатке 2015?

Практическое занятие № 3. Применение теории сравнений в решении задач ЕГЭ

Задания для решения

1. На доске записано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно – 3, среднее арифметическое положительных из них равно 4, а среднее арифметическое отрицательных из них равно – 8. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел больше, положительных или отрицательных? в) Каково максимально возможное число положительных чисел?

2. В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в 2 раза?

б) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 1?

в) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

3. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$)

а) Может ли сумма данных чисел быть равна 5?

б) Каково наибольшее n, если сумма всех чисел меньше 950?

в) Найти все возможные n, если сумма всех данных чисел равна 141.

4. Найдите все такие пары взаимно-простых чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа b/a.

Практическое занятие № 4. Оптимизация в целочисленных задачах

Задания для решения

1. Может ли частное трехзначного числа и суммы его цифр а) быть равно 89? б) быть равно 86? в) Каково максимально возможное значение данного частного?

2. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b , записанные на доске, заменяются на два числа: или $a + b$ и $2a - 1$, или $a + b$ и $2b - 1$.
(например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).
а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 19.
б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?
в) Сделали 1007 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

3. В парке n аттракционов. В воскресенье парк посетило ровно n детей. Стоимость каждого аттракциона 10 рублей. Каждый ребенок потратил либо 30, либо 160 рублей, при том не все дети потратили денег поровну (один аттракцион можно посетить много раз).

а) Могла ли выручка каждого аттракциона составить 60 рублей?

б) Какое наименьшее количество детей могло быть, если известно, что все аттракционы получили одинаковую выручку?

в) Пусть любые два аттракциона имеют разную выручку (возможно нулевую). Каково наибольшее возможное количество посетивших парк детей?

4. На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое 6 наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое 6 наибольших равно 15

а) Может ли наименьшее из этих 11 чисел быть равно 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех 11 чисел равняться 9?

в) Пусть B – шестое по величине число, а S – среднее арифметическое всех 11 чисел. Найти наибольшее значение S – B.

Практическое занятие № 5. Решение целочисленных уравнений и остатки

- Чему равна последняя цифра числа $9^{2016} - 7^{2016}$

- Набор из 2015 чисел обладает свойством: если каждое число заменить на сумму остальных, то получится тот же набор чисел. Чему равно произведение чисел в наборе?

- Докажите, что число $\dfrac{7^{1968^{1970}} - 3^{68^{70}}}{10}$ – целое.

- Найти все целые решения уравнений:

а) $y^2 - 2xy - 2x = 6$;
б) $2x^2 - 11xy + 12y^2 = 17$;
в) $2x^2 + 2y - 3xy + y^2 - 3x = 2$
г) $2xy - 3y^2 - 4y + 2x = 2$;
д) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{xy} = 1$;
е) $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = y^2$;
ж) $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

Практическое занятие № 6. Разные задачи на делимость

№ 1. «Будьте взаимно просты», – сказал Умный Портняжка и разрезал показанную на рисунке ленту на несколько частей так, что числа на любых двух отрезках куска оказались взаимно простыми. Какое наибольшее количество кусков могло при этом получиться?

1	2	3	4	5	6	7	8	9

№ 2. Набор из 2015 чисел обладает свойством: если каждое число заменить на сумму остальных, то получится тот же набор чисел. Чему равно произведение чисел в наборе?

№ 3. Докажите, что для любого натурального n

а) $n^3 – n$ делится на 6;

б) $n^5 – n$ делится на 5;

в) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7;

г) $2^{2n+1}\cdot 3^{n+3} + 1$ делится на 11;

д) $n^7 – n$ делится на 7;

е) $3^{2n} + 2^{6n – 5}$ делится на 11;

ж) $3^{2n} – 2^n$ делится на 7.

№ 4. Докажите, что если p – простое число, большее 3, то $p^2 – 1$ делится на 24.

№ 5. Докажите, что если x и y целые и $x^2 + y^2$ делится на 3, то и x делятся на 3, и y делятся на 3.

Практическое занятие № 7. Задачи на кредиты с равными платежами

Задания для решения

№ 1. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму.
Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на *r* % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите *r*.

2. Пусть планируется взять кредит в банке на некоторый период (месяц, год) в размере суммы S.

Условия его возврата следующие:

- в начале каждого периода долг увеличивается на q % по сравнению с концом предыдущего периода.

- до конца каждого периода необходимо выплатить часть долга.

Найти общую сумму выплат, после полного погашения кредита, если **долг выплачивается равными ежемесячными (ежегодными) платежами.**

3. Георгий планирует взять кредит в банке в размере 150000 руб. на 4 года.

Банк предлагает две схемы погашения кредита.

В начале каждого года долг будет увеличиваться на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате кредит будет погашен четырьмя равными платежами.

Практическое занятие №8. Задачи на кредиты с дифференцированными платежами

Задания для решения

1. Пусть планируется взять кредит в банке на некоторый период (месяц, год) в размере суммы S.

Условия его возврата следующие:

- в начале каждого периода долг увеличивается на q % по сравнению с концом предыдущего периода.

- до конца каждого периода необходимо выплатить часть долга.

- после платежа долг каждый период должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего периода.

Найти общую сумму выплат, после полного погашения кредита.

2. 15-го января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн. рублей. условия его возврата таковы: 1 числа каждого месяца долг увеличивается на целое число процентов (r %) по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-е по 14-е число необходимо выплатить часть долга. 15-го числа долг должен составлять определенное число млн. рублей. (см. таблицу):

15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат не превзойдет 1,2 млн руб.

3. 1 июля 2019 года планируется взять кредит 900 тыс. руб. Первого числа каждого месяца банк начисляет 1 % на оставшуюся сумму долга. Затем в банк переводится платеж. На какое минимальное количество месяцев может быть взят кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 тыс.

4. 15-го января банк выдал кредит на 6 месяцев в размере 1 млн. рублей. условия его возврата таковы: 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-е по 14-е число необходимо выплатить часть долга. График погашения показан в таблице:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в % от кредита)	100 %	90 %	80 %	70 %	60 %	50 %	0

Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат не превзойдет 1,2 млн руб.

5. Георгий планирует взять кредит в банке в размере 150000 руб. на 4 года.

Банк предлагает две схемы погашения кредита.

В начале каждого года долг будет увеличиваться на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате кредит будет погашен четырьмя равными платежами.

Схема выплаты кредита при дифференцированных платежах:

В начале каждого года долг увеличивается на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате платежа долг каждый год уменьшается на одну и ту же сумму.

Какая схема для Георгия будет самой оптимальной? Чему равна суммарная переплата при каждой схеме?

Практическое занятие № 9. Задачи на кредиты с дополнительными условиями

Задания для решения

1. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года
в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом
предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом
часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии
со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей.

2. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысячи рублей?
3. Планируется взять кредит 15 декабря на 31 месяц. Условия возврата
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с первого по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа тридцатого месяца долг должен быть 100 тыс. руб.
- к 15 числу 31-го месяца кредит должен быть погашен.
Общие выплаты составили 555 тыс. руб. Какова сумма кредита?

Практическое занятие № 10. Оптимизационные задачи

Задания для решения

№ 1. Необходимо построить трубопровод длиной 1243 метра из труб длинной 5 и 7 метров (при этом трубы нельзя разрезать). Сколькими способами можно это сделать? Пусть стоимость трубы длиной 5 м составляет 800 р., а 7 м – 900 р. Как построить требуемый трубопровод, чтобы расходы на трубы были минимальными.

№ 2. Школа участвует в конкурсе добровольческих движений. Она может составить группы для озеленения города, или группы для украшения мемориальных комплексов ветеранам войны. По условию конкурса в каждую группу по озеленению надо включить 16 школьников и прикрепить к ним 9 студентов и одного учителя. В группу по украшению мемориальных комплексов надо включать 6 школьников, 7 студентов и двух учителей. В конкурсе изъявили желание принять участие 15 учителей, 96 детей и 69 студентов, находящихся на педагогической практике в этой школе. За каждую группу по озеленению школа получает 50 баллов, а за каждую группу, работающую в мемориальном комплексе – 70 баллов. Каким образом школа может набрать максимальное число баллов? Докажите, что Ваше решение наилучшее.

№.3. Школа выиграла грант и отправила 90 детей на летнюю недельную экскурсию в Санкт-Петербург и 60 в Москву. Пока дети были еще на экскурсии, школа выиграла новый грант на отправку детей в летний лагерь. 60 детей можно отправить в лагерь в Ялту, 40 в Сочи, а 50 – в Лазаревское. Минимальная стоимость билета в Ялту из Москвы составляет 3 тысячи, а из Санкт-Петербурга – 4,5 тыс. Билет в Лазаревское из Москвы стоит 2,5 тысячи, а из СПб– 3,5 тыс. Минимальная стоимость проезда до Сочи из Москвы равна 4 тысячам, а из Санкт-Петербурга – 6,5 тысячам. Чтобы освоить грант, решено было везти детей сразу с экскурсии в лагерь. Грант позволяет оплатить и стоимость путевки, и стоимость проезда, но необходимо доказать финансовому инспектору, что предлагаемый план перевозки детей является самым дешевым из возможных. В противном случае инспектор не подпишет документы. Найдите самый дешевый план перевозки детей и докажите инспектору, что он наилучший.

№ 4. Фирма выпускает два вида продукта в день. Производственный процесс составляет 430 минут в день (5 десятиминутных перерывов при восьми часовом рабочем дне). Для изготовления единицы продукта первого вида требуется одна минута, а единицы второго – две минуты. Продукции первого вида требуется не более 300 единиц в день, а второго – не более 230 единиц в день. Реализация единицы продукции первого вида приносит 2 доллара чистой прибыли, а второго – 3 доллара. Каков оптимальный производства, максимизирующий прибыль, чему равна максимальная прибыль?

№ 5. Фирма выпускает два вида изделий. Для изготовления одного изделия первого вида требуется 2 кг металла, а второго вида – 4 кг металла. Изделие первого вида может быть продано по цене 30 тыс. рублей за единицу, а второго – по цене 20 тысяч рублей за единицу, причём первого изделия можно реализовать не более 40 единиц, а второго не более 20. Всего имеется 100 кг металла. Каков оптимальный план производства, максимизирующий доход от продажи данных изделий, чему равна максимальная прибыль доход?

Ответ: 40 изделий первого вида и 5 изделий второго вида принесут доход в 1 мил.300 тыс. рублей.

Практическое занятие № 11. Задачи со специальной схемой погашения кредита

1. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере *S* млн рублей, где *S* — **целое** число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей.

2. 15-го января банк выдал кредит на 6 месяцев в размере 1 млн. рублей. условия его возврата таковы: 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-е по 14-е число необходимо выплатить часть долга. График погашения показан в таблице:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в % от кредита)	100 %	90 %	80 %	70 %	60 %	50 %	0

Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат не превзойдет 1,2 млн руб.

15-го января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн. рублей. условия его возврата таковы: 1 числа каждого месяца долг увеличивается на целое число процентов (r %) по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-е по 14-е число необходимо выплатить часть долга. 15-го числа долг должен составлять определенное число млн. рублей. (см. таблицу):

15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат не превзойдет 1,2 млн руб.

4. Фермер получил кредит в банке под определенный процент. Через год фермер вернул в банк в счет погашения кредита ¾ от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту?

Практическое занятие № 12. Аналитический методы решения задач с параметрами

Задания для решения

1. При каких значениях параметра m неравенство

$$\cos x + \frac{m(m+1)}{\cos x - 1} < \frac{2(m\cos x + 1)}{\cos x - 1}$$

не имеет решений? Что является решением неравенства при m > 2.

2. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$ имеет единственное решение

3. Для всех действительных значений параметра а найдите число различных корней уравнения: $(a - x^2)(a + x - 2) = 0$

4. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |a(x^4+1) = y + 2 - |x| \\ |x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$ имеет единственное решение.

имеет ровно три различных корня.

Практическое занятие № 13. Графический методы решения задач с параметрами.

Задания для решения

1. Укажите все значения а, при которых система неравенств

$$\begin{cases} |x+a| \le 1 \\ |3x - a| \le 2 \end{cases}$$ имеет хотя бы одно решение.

2. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ (x^2+y^2+a)(x^2+y^2+2x+2y+a)(x^2+y^2+2x-2y+a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два решения? ровно три решения?

3. Найдите все значения а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

4. Найдите все положительные значения параметра а, при каждом из которых система:

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y-4)^2 = 9 \\ (x-2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$ имеет единственное решение.

Практическое занятие № 14. Контрольная работа

Практическое занятие № 15. Применение критериев проверки. Коррекция.

№ 1. Любознательный школьник сложил $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ = 1. «А что это мы все дроби приводим к общему знаменателю? А не привести ли их к общему числителю?» – подумал школьник и написал: $\frac{2}{6} + \frac{2}{3} = \frac{2}{2}$. Школьник решил этим не ограничиваться и представил 2 в числителе в виде разности 7 – 5: $\frac{7-5}{6} + \frac{7-5}{3} = \frac{7-5}{2}$. Это выражение школьник переписал так: $\frac{7}{6}-\frac{5}{6}+\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}$. Затем он перенес все дроби с числителем 5 в левую часть, а с числителем 7 – в правую: $\frac{5}{2}-\frac{5}{6}-\frac{5}{3}=\frac{7}{2}-\frac{7}{6}-\frac{7}{3}$. Затем вынес общий множитель за скобки: $5(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3})=7(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3})$. Сократив равные скобки в правой и левой части, школьник получил, что 7 = 5. «Так, пожалуй, можно доказать, что любые числа между собой равны», – подумал школьник – «А от нас это скрывали!». Имеются ли ошибки в рассуждении школьника и, если да, то в чем они?

№ 2. Вовочка решал следующую задачу: «Не вычисляя значения корней, выясните, справедливо ли неравенство $\sqrt{2016}+\sqrt{2018}-2\sqrt{2017}$ < 0». Он предложил такое решение

«$\sqrt{2016}+\sqrt{2018}-\sqrt{2017}-\sqrt{2017}<0$

$\sqrt{2016}-\sqrt{2017}<\sqrt{2017}-\sqrt{2018}$

Возведем обе части неравенства в квадрат. Получим

$2016 - 2\sqrt{2016}\sqrt{2017} + 2017 < 2017 - 2\sqrt{2017\cdot 2018} + 2018$

2017 в правой и левой части сокращается. 2016 перенесем вправо и вычтем из 2018

$-2\sqrt{2016}\sqrt{2017} < -2\sqrt{2017\cdot 2018} + 2$

Сократим на 2.

$-\sqrt{2016}\sqrt{2017} < -\sqrt{2017\cdot 2018} + 1$

Перенесем корни в левую часть

$\sqrt{2017\cdot 2018}-\sqrt{2016}\sqrt{2017} < 1$

$\sqrt{2017}\,(\sqrt{2018}-\sqrt{2016}\,) < 1$

Т.к. число $\sqrt{2017}$ на много больше, чем 1, а $\sqrt{2018}-\sqrt{2016} = \sqrt{2018-2016} > 0$, следовательно, данное неравенство не справедливо».

Верно ли данное решение? Если нет, то укажите все допущенные Вовочкой ошибки и дайте правильное решение.

№ 3. Аня нашла в сборнике задачу: «Докажите, что все медианы тетраэдра пересекаются в одной точке. В каком отношении они делятся точкой пересечения?» Аня выяснила, что медиана тетраэдра – это отрезок, соединяющий его вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани, и легко решила задачу. Вот Анино решение:

«Рассмотрим для удобства правильный тетраэдр *ABCD* с ребром длины 1. Его медианы AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, очевидно, являются также и высотами. Но высоты любого тетраэдра пересекаются в одной точке. Следовательно, медианы AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 имеют общую точку, обозначим её *P*. Пусть $AD_1 \cap DA_1 = M$, тогда M – середина *BC*. Из ΔADD_1 имеем: $AD_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $D_1M=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. В треугольнике ADM $AM = DM = \sqrt{3}/2$, AA_1 и DD_1 – высоты, треугольник APD_1 подобен треугольнику AA_1M, так что

$\frac{AP}{AM}=\frac{PD_1}{A_1M}$, $\quad \frac{AP}{PD_1}=\frac{AM}{A_1M}=\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/6}=\frac{1}{3}$.

Итак, медианы любого тетраэдра делятся точкой пересечения в отношении 3:1, считая от вершины».

Согласны ли Вы с решением Ани? Если в нём есть неверные утверждения или неверные умозаключения, то укажите их все. Предложите своё решение задачи.

№ 4. Представлением числа N в системе с основанием g называется разложение данного числа в виде $N = a_n\cdot g^n + a_{n-1}\cdot g^{n-1} + \ldots + a_1\cdot g^1 + a_0$, где a_n, a_{n-1}, … a_1, a_0 – цифры данного числа (от 0 до g – 1). Например, в привычной нам десятичное системе 343 может быть представлено $343 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3$. Тоже число может быть записано в пятеричной системе как 2333_5:

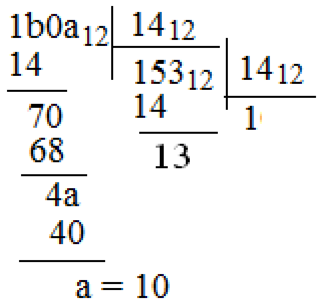
$$2333_5 = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 3 = 343.$$

В системах с основанием большим, чем 10, появляются цифры, которых не было в десятичной системе. Например, в шестнадцатеричной системе появляются шесть новых цифр от 10 до 15, которые традиционно принято обозначать либо буквами латинского алфавита, либо теми же цифрами, что и в десятичной системе счисления, но взятыми в круглые скобки: a =(10), b = (11), c = (12), d = (13), e = (14), f = (15).

Николай выполнял задачу «Перевести число $1b0a_{12}$ в шестнадцатеричную». Он решил эту задачу так: «Если число записано в 16-ой системе, то оно имеет вид

$a_n \cdot 16^n + a_{n-1} \cdot 16^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 16 + a_0 = (a_n \cdot 16^{n-1} + a_{n-1} \cdot 16^{n-2} + \ldots + a_1)16 + a_0$.

Следовательно, чтобы найти последнюю цифру числа надо найти остаток от деления числа на 16. При этом частное будет равно $a_n \cdot 16^{n-1} + a_{n-1} \cdot 16^{n-2} + \ldots a_2 \cdot 16 + a_1$. Значит, если это частное разделить на 16, то в остатке получим предпоследнюю цифру числа. Деление нужно осуществлять в 12-ой системе, то есть делить не на 16, а на $14_{12} = 16_{10}$. Выполним деление столбиком, пользуясь 12-й системой.



Остаток 13 соответствует цифре d. Поэтому искомое число равно $1d10_{16}$». Есть ли в решении Николая ошибки? Если есть, то исправьте их, заменив на правильные результаты.

№ 5. В озеро заселяют окуней и карасей. Средняя масса окуня составляет 1 кг, карася – 0,6 кг. Имеется два вида пищи, ежедневный запас которой поддерживается для первого типа на уровне 900 кг, а второго – 3300 кг. Один окунь в среднем за день потребляет 20 г пищи первого типа и 60 г пищи второго типа, для карася соответствующие величины составляют 10 и 50 г. Как следует заселить озеро, чтобы максимизировать суммарную биомассу рыб? Чему равна максимальная суммарная биомасса?

Наташа решила задачу так: Обозначим за x количество окуней, а за y – карасей. Тогда количество первое пищи, которую они съедят за день равно $20x + 10y \leq 900$, а количество пищи второго вида: $60x + 50y \leq 3300$. Сократим каждое неравенство на 10 и решим их в системе:

$2x + y \leq 90$

$6x + 5y \leq 330$

Из второго неравенства вычитаем первое, умноженное на 3, получим $2y \leq 60$, следовательно, $y \leq 30$. Значит максимально можно заселить 30 карасей. Тогда исходя из первого неравенства максимальное количество окуней может быть равно $2x \leq 60$, $x \leq 30$. Данный результат удовлетворяет и второму неравенству

$6 \cdot 30 + 5 \cdot 30 = 180 + 150 = 330$. Суммарная биомасса составит $30 \cdot 1 + 30 \cdot 0{,}6 = 48$ кг.

Ответ: следует заселить в водоем 30 окуней и 30 карасей, максимальная биомасса 48 кг». Есть ли в решении Наташи ошибки? Укажите их и дайте свое решение задачи.

6. Дана задача. «На доске записано более 11, но менее 15 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно – 4, среднее арифметическое положительных из них равно 3, а среднее арифметическое отрицательных из них равно – 6. а) Сколько чисел

написано на доске? б) Каких чисел больше, положительных или отрицательных? в) Сколько записано положительных чисел?»

Ученик предложил такое решение «Так как среднее всех чисел отрицательно, следовательно, отрицательных чисел больше. Это подтверждается еще и тем, что среднее всех отрицательных больше по модулю, чем среднее всех положительных. Таким образом, отрицательных, очевидно, больше. Пусть имеется k положительных чисел и n – отрицательных. Тогда всего чисел k + n. Так как среднее – это сумма всех чисел, деленная на их количество, следовательно, сумма всех чисел равна –4(k +n), сумма всех положительных равна 3k, сумма всех отрицательных: –6n. Тогда

$3k - 6n = -4k - 4n$

$7k = 2n$

Таким образом, k делится на 2, а n делится на 7. Чисел меньше 15, поэтому отрицательных чисел может быть либо 7, либо 14. Если отрицательных 14, то положительных будет 0, а 0 не делится на 2, поэтому 14 чисел быть не может. Значит, отрицательных чисел 7. Положительных меньше (и их количество делится на 2), значит, их либо 6, либо 4, либо 2. Но 7 + 2 = 9, 7 +4 = 11, а чисел больше 11, значит, положительных чисел 6, а всего чисел 13.

Ответ: а) 13, б) отрицательных больше, в) 6».

Прочитайте внимательно решение. Есть ли в данном решении ошибки? Укажите их все и дайте правильное решение.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Кремер, Н. Ш. Математика для поступающих в экономические и другие вузы : учебное пособие / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман ; ред. Н. Ш. Кремер. – М.: Юнити, 2017. – 695 с.– Режим доступа: – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=683160.
2. Шелехова, Л.В. Обучение решению сюжетных задач по математике : учебно-методическое пособие / Л.В. Шелехова. - Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. - 166 с. : [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=274518.
3. Ячменёв Л.Т. Математика в примерах и задачах для подготовки к ЕГЭ и поступлению в ВУЗ: Учебное пособие - М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2022. - 336 с.: - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/500649, https://znanium.com/read?id=400032.

Дополнительная литература

1. Сеничева, Н.Н. Школьные олимпиады по экономике в научной организации: препринт / Н.Н. Сеничева. - Вологда : ИСЭРТ РАН, 2016. - 100 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/1019495.
2. Воробьев В. В. Тренировочные варианты для качественной подготовки к ЕГЭ по математике для учащихся 10-11 классов / В.В. Воробьев. - Москва : Директ-Медиа, 2014. - 48 с. . URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233960
3. Математические головоломки профессора Стюарта / Стюарт И., Лисова Н. - М.:Альпина Паблишер, 2017. - 386 с.: (http://znanium.com/catalog/product/1002607) https://znanium.com/read?id=333393
4. Будак, Б. А. Математика: сборник задач по углублённому курсу : учебно-методическое пособие : [12+] / Б. А. Будак, Н. Д. Золотарева, Ю. А. Попов ; под ред. М. В. Федотова. – М. : Лаборатория знаний, 2020. – 329 с. : ил. – (ВМК МГУ -

школе). – Режим доступа. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=595231

Интернет-ресурсы

1. Федеральный портал Российское образование: http:// www.edu.ru
2. Единое окно доступа к информационным ресурсам http://window.edu.ru/
3. Научная электронная библиотека «Киберленинка»: https://cyberleninka.ru/search
4.. http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege Открытый банк заданий ЕГЭ
5. http://alexlarin.net Тренировочные варианты ЕГЭ по математике.

Лист согласования рабочей программы
учебной дисциплины (практики)

Направление подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование
Профиль: Математика. Экономика
Рабочая программа Решение задач ЕГЭ по алгебре повышенной сложности
Составитель: Н.В. Глухова – Ульяновск: УлГПУ, 2023.

Программа составлена с учетом федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль подготовки «Математика. Экономика» утверждённого Министерством образования и науки Российской Федерации, и в соответствии с учебным планом.

Составители ________________Н.В. Глухова (подпись)

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) одобрена на заседании кафедры высшей математики «23» мая 2023г., протокол № 10
Заведующий кафедрой
________________________ И.В. Столярова ______23.05.23______
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) согласована с библиотекой
Сотрудник библиотеки
________________________ Ю.Б. Марсакова ______28.05.23______
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Программа рассмотрена и одобрена на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования «26» мая 2023г., протокол № 5
Председатель ученого совета факультета физико-математического и технологического образования
________________________ Е.М. Громова ______26.05.23______
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*