Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0233C9D60038B01A9E48C1A3FBB4A9D9F6
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 07.07.2023 до 28.04.2038

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе С.Н. Титов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Программа учебной дисциплины модуля специальных разделов предметной области

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Иностранный язык

(очная форма обучения)

Составитель: Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «26» мая 2023 г. № 5

Ульяновск, 2023

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Основы теории алгебраических структур» относится к дисциплинам по выбору части формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) модуля специальных разделов предметной области учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Иностранный язык», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин: Алгебра и теория чисел, Математическая логика, Дискретная математика, , а также учебной практики по математике.

Результаты изучения дисциплины являются основой для прохождения дисциплин и практик: Элементарная математика. Числовые системы, Теория вероятностей и основы математической статистики, Курсовая работа № 1, Научно-исследовательская работа, Подготовки к сдаче и сдача государственного экзамена, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины является подготовка учителя к будущей профессиональной деятельности: систематизация знаний студентов в области алгебраических структур.

Задачей освоения дисциплины является закрепление умений проводить математические преобразования выражений, отработка понятийного аппарата математики, формирование и закрепление умения проводить строгие абстрактно-логические доказательства, решать задачи повышенной сложности школьного курса математики.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	Умеет	Владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации	ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач	ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
ПК-1. Способен	ОР-4. Знает роль и	ОР-6 умеет	ОР-7 владеет

осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач. ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.	осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.	действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.
ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов. ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской , проектной, групповой и др.).	ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.	ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.	ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Всего		Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Трудоемк.		Лекции, час.	Практические занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Лабораторные занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Самостоят. работа, час.	
	Зач. ед.	Часы							
4	3	108	18	30	-	-	-	33	экзамен (27)
Итого:	3	108	18	30	-	-	-	33	27

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
4 семестр				
Элементы теории групп и колец	4	12	-	20
Пространства как алгебраические структуры	8	12	-	20
Элементы теории расширения полей	6	6	-	20
Экзамен	-	-	-	27
Всего по дисциплине:	18	30	-	60

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса

1. Элементы теории групп и колец.

Группы и их свойства. Подгруппы, классы смежности группы по подгруппе. Нормальные делители и фактор-группы. Изоморфизм и гомоморфизм групп. Циклические группы. Группы классов вычетов по числовому модулю. Кольца и подкольца. Идеалы. Кольцо главных идеалов. Кольцо классов вычетов. Евклидовы кольца. Кольца многочленов. Факториальность кольца многочленов над факториальными кольцами. Конечные кольца. Области целостности

2. Пространства как алгебраическая структура. Пространства и подпространства. Изоморфизмы пространств. Применение изоморфизмов для нахождения базисов в пространствах матриц и многочленов. Евклидовы и унитарные пространства. Ядро и образ оператора как подпространства. Собственные подпространства, инвариантные подпространства и их применения.
3. Элементы теории расширения полей. .

Поля. Поле рациональных чисел. Упорядоченные поля. Алгебраические расширения полей. Последовательности в нормированных полях. Аксиоматическая теория действительных чисел. Поле комплексных чисел. Корни из единицы как мультипликативная группа. Применения алгебраических расширений к работе с иррациональными выражениями, к решению вопроса о разрешимости задач с помощью циркуля и линейки. Конечные поля.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестов, контрольных и самостоятельных работ.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий

ОС-1 Самостоятельная работа

Примерный вариант.

Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу, ядро, образ, ранг, дефект

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$.

.

ОС-2. Групповое интерактивное задание

Студенты разбиваются на микрогруппы по 3-4 человека. При помощи системы Moodle (http://do.ulspu.ru), либо любой другой программы по выбору студентов составляются 8 тестовых заданий по одному из разделов курса, либо готовят конспект просветительского мероприятия по темам.

Варианты:

1. Комплексные числа и операции над ними
2. Линейные операторы и их приложения
3. Бинарные отношения и их виды
4. Классы вычетов
5. Классы смежности группы по подгруппе
6. Циклические группы
7. НОД и НОК многочленов

Студенты по результатам разработки готовят доклад с презентацией. Далее осуществляется выступление с защитой проекта

ОС-3 Контрольная работа

1. Примерный вариант контрольной работы

1. Выяснить является ли множество чисел, кратных 12 подгруппой аддитивной группы чисел кратных двум. Если да, то найти правые и левые классы эквивалентности, правостороннее и левосторонне разложение группы по этой подгруппе, выяснить, является ли эта подгруппа нормальным делителем.

2. Найдите координаты вектора $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 3)$ в базисе $\mathbf{b_1} = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b_2} = (1, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b_3} = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b_4} = (1, 0, 0, 0)$.

ОС-4 Тест.

Примерные вопросы

1.Выберите одно или несколько правильных утверждений относительно множества целых чисел, кратных трем:

а) множества целых чисел, кратных трем является группой по сложению

б) множества целых чисел, кратных трем является группой по умножению

в) множества целых чисел, кратных трем является кольцом

г) множества целых чисел, кратных трем является полем

2. Обозначим мнимую единицу символом i ($i^2 = -1$). Чему тогда равно i^8?

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

Глухова Н.В., Череватенко О.И., Гришина С.А., Куренева Т.Н. Основы теории алгебраических структур. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2019. – 23 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2. Интерактивное задание. ОС-3. Контрольная работа ОС-4. Тест	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики. ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию. ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения
	ОС-5. Экзамен	

		различных методов, приемов и технологий в обучении математике. ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; ОР-10. Владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике. ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности. ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-5 Экзамен в форме устного собеседования

Примерные вопросы к экзамену

1. Группы, подгруппы. Сравнимость элементов группы по подгруппе. Доказательство того, что данное отношение является отношением эквивалентности.
2. Классы смежности группы по подгруппе. Левостороннее и правостороннее разложение группы. Метод нахождения классов смежности. Примеры.
3. Теорема Лагранжа.
4. Нормальный делитель группы. Свойства нормальных делителей.
5. Факторгруппа. Определение и доказательство того, что факторгруппа является группой. Примеры.
6. Изоморфизм и гомоморфизм групп
7. Порядок элемента группы. Свойства. Примеры.

8. Циклические группы. Примеры. Теоремы о связи порядка циклической группы и порядков её элементов.
9. Теорема о подгруппах циклической группы.
10. Кольца и идеалы. Критерий идеала. Тривиальные идеалы. Главные идеалы.
11. Сравнимость элементов по идеалу. Свойства сравнимости.
12. Классы вычетов. Факторкольцо кольца по идеалу.
13. Признак делимости на 9, применение вычетов при проверке правильности арифметических действий.
14. Пространства и подпространства
15. Изоморфизм арифметических векторных пространств и пространств многочленов
16. Изоморфизм арифметических векторных пространств и пространств матриц
17. Линейные операторы (определение, примеры линейных и нелинейных операторов, заданных в координатной форме).
18. Матричная форма линейных операторов.
19. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
20. Ядро и образ, ранг и дефект линейного оператора
21. Оператор перехода к другому базису, вычисление координат векторов в различных базисах
22. Евклидовы пространства. Скалярное произведение, норма и угол
23. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника
24. Ортогональность. Ортогонализация базиса
25. Ортогональное дополнение
26. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая
27. Скалярные произведения и билинейные формы
28. Поля и их расширения. Простое расширение поля.
29. Теорема о структуре простого расширения поля
30. Применение расширений полей к задачам на построение
31. Применение расширений полей к задачам на избавление от иррациональности.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
4 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 Баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла Max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

ЗАНЯТИЕ № 1. Классы смежности группы по подгруппе

1. Доказать, что множество целых чисел, кратных 3 (д/з 5) является подгруппой аддитивной группы всех целых чисел. Найдите правосторонне и левосторонне разложение группы целых чисел по данной подгруппе. Является ли данная подгруппа нормальным делителем?
2. Докажите, что множество самосовмещений правильного треугольника образует группу. Найдите все подгруппы данной группы. Найдите левые и правые классы смежности по всем подгруппам. Укажите те из них, которые являются нормальными делителями.
3. (д/з) Докажите, что множество поворотов квадрата образует подгруппу его самосовмещений. Найдите левые и правые классы смежности. Является ли эта подгруппа нормальным делителем.
4. Доказать, что множество всех чётных подстановок четырёхэлементного множества образует подгруппу всех подстановок данного множества. Докажите, что она является нормальным делителем. Постройте фактор-группу.
5. (д/з) Даны подстановки:

$a_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Найти все подгруппы и все нормальные делители данной группы. Построить левые и правые классы смежности по всем нетривиальным подгруппам. Где это возможно, указать фактор-группы.

6. Найдите классы смежности аддитивной группы векторов плоскости, выходящих из начала координат, по подгруппе векторов, лежащих на фиксированной прямой, проходящей через начало координат.

ЗАНЯТИЕ № 2. Нормальные делители группы

Задания для самостоятельного решения:

1. Докажите, что множество самосовмещений правильного треугольника образует группу. Найдите все подгруппы данной группы. Найдите левые и правые классы смежности по всем подгруппам. Укажите те из них, которые являются нормальными делителями.

2. Докажите, что множество поворотов квадрата образует подгруппу его самосовмещений. Найдите левые и правые классы смежности. Является ли эта подгруппа нормальным делителем.

3. Доказать, что множество всех чётных подстановок четырёхэлементного множества образует подгруппу всех подстановок данного множества. Докажите, что она является нормальным делителем. Постройте факторгруппу.

ЗАНЯТИЕ № 3. Изморфим и гомомрфизм групп

Задания для самостоятельного решения:

1.Доказать, что мультипликативная группа комплексных корней n-степени из единицы изоморфна аддитивной группе классов вычетов по модулю n

2. Доказать, что группа гомоморфна своей фактор группе по любой подгруппе. Построить гомомрфизм.

3. Доказать, что группа многочленов степени не выше n гомоморфна группе векторов длины n+1. Является ли данный гомоморфизм изоморфизмом?

ЗАНЯТИЕ № 4. Порядок элемента в группе

1.Представьте в виде произведения независимых циклов подстановки:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Найдите порядок и чётность каждой подстановки.

2. Представьте произведения независимых циклов в виде подстановок. Найдите порядок и чётность каждой подстановки.

а) (123)(4568) б) (34)(52618)

3. Вычислить τ^k

а) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, k = 137

б) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, k = 352

Задания для самостоятельного решения:

Найдите порядки всех элементов:

а) в аддитивной группе классов вычетов по модулю 8 ($\mathbf{Z}_8$),

б) в аддитивной группе классов вычетов по модулю 9 ($\mathbf{Z}_9$),

в) в мультипликативной группе всех классов вычетов по модулю 5 ($\mathbf{Z}_5$) без нуля (предварительно проверить, что это множество является группой по умножению)

г) в мультипликативной группе всех классов вычетов по модулю 7 ($\mathbf{Z}_7$) без нуля (предварительно проверить, что это множество является группой по умножению).

ЗАНЯТИЕ № 5. Циклические группы

Задания для самостоятельного решения:

1. Найдите порядок каждого элемента в мультипликативной группе корней степени n из 1. Выяснить является ли эта группа циклической, найти образующие элементы.

а) n = 5, б) n = 6, в) n = 8, г) n = 7.

2. Доказать, что аддитивная группа целых чисел - циклическая.

3. Даны подстановки:

$a_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$,

$a_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Выяснить, является ли данная группа циклической. Найти все её циклические подгруппы

ЗАНЯТИЕ № 6. Кольца и идеалы

Задания для самостоятельного решения:

Выясните, являются ли идеалами в данных кольцах (a, b – произвольные действительные числа) следующие множества:

а) целые числа в кольце комплексных чисел;

б) комплексные числа вида a + ai, где a действительное число, в кольце комплексных чисел;

в) множество матриц вида $\begin{pmatrix}a & a\\ a & a\end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

г) множество матриц вида $\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

д) множество матриц вида $\begin{pmatrix}a & a\\ b & b\end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

е) множество матриц вида $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка

ЗАНЯТИЕ № 7. Пространства и подпространства

1. Выяснить являются ли векторными пространствами:

а) Множество целых чисел (**Z**) над полем действительных чисел (**R**);

б) Множество **R** над **R**;

в) Множество рациональных чисел (**Q**) над **R**;

г) Множество **Q** над **Q**;

д) Множество **R** над **Q**;

е) Множество комплексных чисел (**C**) над **R**;

ж) Множество **R** над **C**;

з) Множество **Q** над **Z**

2. Выяснить, являются ли подпространствами арифметического векторного пространства следующие множества векторов:

а) $\{(3\alpha + \beta, 2\alpha, 3\beta)|\ \alpha,\beta\in R\}$

б) $(-\alpha, \alpha+\beta, 3\alpha+3\beta),\ \alpha,\beta\in R\}$

в) $\{(\alpha - \beta, \alpha+\beta, 2\beta + 1)|\ \alpha,\beta\in R\}$

г) $\{(\alpha, 2\alpha),\ \alpha \in R\}$,

д) $\{(3\alpha, 2\alpha, \alpha)|\ \alpha \in R\}$

е) $(-\alpha-\beta, \alpha+\beta, 3\alpha+3\beta),\ \alpha,\beta\in R\}$

ж) $\{(\alpha - \beta, \alpha + \beta, 2\beta^2) | \alpha, \beta \in R\}$
з) $\{(\alpha, 2\alpha, 2), \alpha \in R\}$.
3.Вычислить линейную комбинацию $a_1 + a_2 - 3a_3$ для систем векторов. С помощью изоморфизма выяснить, являются ли данные системы линейно-зависимыми.

а) $a_1=x^4+x^3$, $a_2(x) = x^4 - x^3$, $a_3(x) = 8x^4+4x^3$,
б) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Найдите координаты вектора **a** = (1, 2, 2, 3) в базисе $\mathbf{b_1}$ = (1, 1, 1, 1), $\boldsymbol{b_2}$ = (1, 1, 1, 0), $\boldsymbol{b_3}$ = (1, 1, 0, 0), $\boldsymbol{b_4}$ = (1, 0, 0, 0).

ЗАНЯТИЕ № 8. **Линейные операторы и их матрицы**

Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу, ядро, образ, ранг и дефект
а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$
б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$
в) $A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$
г) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2, 1)$
д) $A(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 2x_3, 8x_1 + x_2 - 4x_3, 12x_1 - 5x_3)$
Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу:
е) $A(x_1, x_2, x_3) = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0)$ (д/з)
ж) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$ (д/з)
и) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$ (д/з)
л) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 4x_3, x_1^2)$ (д/з)
м) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$ (д/з)

2. Найдите координаты вектора **a** = (1, 2, 2, 3) в базисе $\mathbf{b_1}$ = (1, 1, 1, 1), $\boldsymbol{b_2}$ = (1, 1, 1, 0), $\boldsymbol{b_3}$ = (1, 1, 0, 0), $\boldsymbol{b_4}$ = (1, 0, 0, 0) с помощью матрицы перехода.

ЗАНЯТИЕ № 9. **Собственные векторы и собственные подпространства линейных операторов**

Решаются задания: Найдите собственные векторы, собственные значения и собственные подпространства операторов. Укажите алгебраические и геометрические кратности соответствующих собственных значений. Выясните, какие из операторов можно привести к диагональному виду, а какие нет. В случае, если это возможно, осуществить переход к диагональному виду, найти соответствующий базис и матрицу перехода к данному базису. Выполнить проверку.
а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$
б) $A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$
в) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$ (д/з)
г) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$ (д/з)
д) $A(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 2x_3, 8x_1 + x_2 - 4x_3, 12x_1 - 5x_3)$
е) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$.

ЗАНЯТИЕ № 10. **Евклидово пространство**

1. Пусть вектор $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Выяснить, можно ли скалярное произведение задать следующим способом:
а) $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$
б) $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$
в) $(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$
г) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$

д) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

е) $(x, y) = |x_1y_1| + |x_2y_2|$

ж) $(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$

Если можно, то вычислить скалярное произведение векторов x(1, 1) и y (-3, 2), нормы каждого из векторов и угол между ними.

2. Выяснить можно ли скалярное произведение задать формулами

а) $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ б) $(f, g) = \int_{0}^{1} (f(x) + g(x))dx$.

Если возможно, вычислить скалярное произведение и угол между $f = x$, $g = x^2$.

3. Построить ортонормированные базисы пространств, натянутых на данные системы векторов:

а) a_1 (1, 2, 2, -1); a_2 (1, 1, -5, 3); a_3 (3, 2, 8, -7); ((1, 2, 2, -1); (2, 3, -3, 2); (2, -1, -1, -2)).

б) a_1 (1, 1, -1, -2); a_2 (5, 8, -2, -3); a_3 (3, 9, 3, 8); ((1, 1, -1, -2); (2, 5, 1, 3)).

в) a_1 (2, 1, 3, -1); a_2 (7, 4, 3, -3); a_3 (1, 1, -6, 0); a_4 (5, 7, 7, 8);

(2, 1, 3, -1), (3, 2, -3, -1), (1, 5, 1, 10).

г) a_1 (1, 0, 1, 0); a_2 (1, 2, 3, 4); a_3 (1, 1, 1, 1); ((1, 0, 1, 0); (-1, 2, 1, 4); (3, 5, 3, -1)).

ЗАНЯТИЕ № 11. Ортогональное дополнение, ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора

1. Найти ортогональное дополнение подпространства, натянутого на данный базис, до базиса пространства R_4

а) a_1 (1, -2, 2, -3); a_2 (2, -3, 2, 4);

б) a_1 (1, 1, 1, -2); a_2 (1, 2, 3, -3).

2. Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на подпространство, являющееся линейной оболочкой векторов a_1, a_2, a_3

а) x (4, -1, -3, 4); a_1 (1, 1, 1, 1); a_2 (1, 2, 2, -1); a_3 (1, 0, 0, 3);

б) x (5, 2, -2, 2); a_1 (2, 1, 1, -1); a_2 (1, 1, 3, 0); a_3 (1, 2, 8, 1).

3. Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x (7, -4, -1, 2) на подпространство, заданное системой уравнений

$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 – 9x_4 = 0$

ЗАНЯТИЕ № 12. Контрольная работа

ЗАНЯТИЕ № 13 Числовые конечные поля

1. Доказать, что кольцо классов вычетов $\mathbf{Z_p}$ является полем тогда и только тогда, когда p – простое число.

2.Найти элемент обратный для элемента a в поле $\mathbf{Z_p}$:

а) a = 10, p = 17

б) a = 7, p = 31

в) a = 12, p = 29

г) a = 23, p = 41

д) a = 11, p = 13

е) a = 19, p = 23

ж) a = 13, p = 17

3.Решить систему

а) $\begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ x+2y+3z=1 \\ 4x+3y+2z=1 \end{cases}$ в $\mathbf{Z}_5$ и $\mathbf{Z}_7$

б) $\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2z=x \\ 2x+z=1 \end{cases}$ в $\mathbf{Z}_3$ и $\mathbf{Z}_5$

ЗАНЯТИЕ № 14 **Работа с иррациональными выражениями**

1. Найдите минимальный многочлен для числа над полем рациональных чисел:

а) 1

б) $\sqrt{2}+i\sqrt{3}$

в) $-1+i\sqrt{3}$

г) $\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}$

д) $\cos 10^0$

е) i

ж) $1-2\sqrt[3]{4}$

з) $1+\sqrt[5]{11}$

и) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

к) $\sin 10^0$.

2. Освободитесь от α в знаменателе дроби, где α – корень указанного уравнения:

а) $\frac{\alpha}{\alpha^3+1}$, $\alpha^3-2\alpha+2=0$

б) $\frac{1}{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2}$, $\alpha^4+\alpha^3-4\alpha^2-3\alpha+2=0$

в) $\frac{\alpha^2}{\alpha^4+1}$, $\alpha^4+2\alpha+2=0$

г) $\frac{\alpha^2-3\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0$.

3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$

б) $\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

в) $\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt[4]{7}+\sqrt{7}-1}$

г) $\frac{11}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1}$

4. Найти расширение поля рациональных чисел элементами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. Найти примитивный элемент этого поля и выразить через него $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$.

Занятие 15 Выступления с докладами.

7.Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Веселова, Л. В. Алгебра и теория чисел: учебное пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов; Казанский национальный исследовательский технологический университет. – Казань: Казанский научно-исследовательский технологический

университет (КНИТУ), 2014. – 107 с.: ил. – Режим доступа. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428287)

2. Алгебраические структуры и их приложения: учебное пособие / Л. В. Зяблицева, С. Ю. Корабельщикова, И. В. Кузнецова, С. А. Тихомиров; – Архангельск: Северный (Арктический) федеральный университет (САФУ), 2015. – 169 с. – Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436142

3. Смолин Ю. Н. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие / Ю. Н. Смолин. — М. : ФЛИНТА : Наука, 2017. — 464 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=1034573

Дополнительная литература

1. Иванова С. А. Линейная алгебра : учебное пособие / С. А. Иванова, В. А. Павский; Кемеровский государственный университет. – 2-е изд. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2019. – 125 с. : ил., табл. – Режим доступа:: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573547
2. Линейная алгебра. Линейные операторы. Квадратичные формы. Комплексные числа: Учебное пособие / Рубашкина Е.В. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 38 с. (URL: https://znanium.com/catalog/product/544419). https://znanium.com/read?id=17915

Интернет-ресурсы

http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал

Лист согласования рабочей программы
учебной дисциплины

Направление подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование
Профиль: Математика. Иностранный язык
Рабочая программа Основы теории алгебраических структур
Составитель: Н.В. Глухова – Ульяновск: УлГПУ, 2023.

Программа составлена с учетом федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль подготовки «Математика. Иностранный язык» утверждённого Министерством образования и науки Российской Федерации, и в соответствии с учебным планом.

Составители _____ Н.В. Глухова (подпись)

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) одобрена на заседании кафедры высшей математики "23" мая 2023г., протокол № 10
Заведующий кафедрой
_____ И.В. Столярова _____
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) согласована с библиотекой
Сотрудник библиотеки
_____ Ю.Б. Марсакова _____
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Программа рассмотрена и одобрена на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования "26" мая 2023г., протокол № 5
Председатель ученого совета факультета физико-математического и технологического образования
_____ Е.М. Громова _____
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*