Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра методик математического и информационно-технологического образования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«15» июня 2021 г.

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Программа учебной дисциплины модуля
«Специальные разделы предметной области»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Иностранный язык

(очная форма обучения)

Составитель: Кузина Н.Г., кандидат педагогических наук, доцент кафедры методик математического и информационно-технологического образования

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Избранные вопросы элементарной математики» относится к дисциплинам по выбору (ДВ 8) части формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) модуля «Специальные разделы предметной области» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Иностранный язык», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках школьного курса «Математика» или соответствующих дисциплин среднего профессионального образования, а также ряда дисциплин учебного плана, изученных обучающимися в 1-8 семестрах: Аналитическая геометрия, Конструктивная геометрия, Основания геометрии, Математическая логика и теория алгоритмов

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: Б1.В.03.ДВ.03.01 Решение задач ЕГЭ повышенной сложности; Б2.О.06.03 (П) Производственная (педагогическая) Преподавательская практика по математике 2.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины «Избранные вопросы элементарной математики» - систематизировать, обобщить систему знаний по школьному курсу математики, а также пополнить эти знания новыми фактами. Изучение данного курса должно способствовать подготовке квалифицированного учителя математики, владеющего основными методами решения различных типов математических задач, знающего теоретические основы курса школьной математики.

Задачей освоения дисциплины является формирование у студента целостного представления об методах решения математических задач сформировать готовность будущего учителя математики к эффективному преподаванию профильных курсов по предмету.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Избранные вопросы элементарной математики» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11. Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем		ОР-1. Умеет самостоятельно осуществлять сбор и обработку информации, используя современные информационные средства поиска и анализа данных; проводить исследовательскую работу в соответствии с индивидуальным планом;	ОР-2. Владеет практическими навыками осуществления исследований в предметной области; приёмами систематизации знаний в предметной области; навыками использования систематизированного теоретического и практического знания

обучения) и в области образования. ПК-11.2. Умеет самостоятельно и в составе научного коллектива решать конкретные задачи профессиональной деятельности; самостоятельно и под научным руководством осуществлять сбор и обработку информации; способен применять полученные знания для объяснения актуальных проблем и тенденций развития предмета; проводить исследовательскую работу в соответствии с индивидуальным планом. ПК-11.3. Владеет базовыми представлениями о принципах организации и осуществления исследований, практическими навыками осуществления исследований; применяет навыки комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием научной и учебной литературы, информационных баз данных. ПК-14. Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с		ОР-3. Умеет показывать значимость знаний предметной области в практической деятельности и в научных исследованиях, иллюстрировать примерами наличие междисциплинарных связей, решать некоторые простейшие междисциплинарные задачи, характеризовать применимость знаний предметной области в школьном курсе	для постановки и решения исследовательских задач предметной области. ОР-4. Владеет междисциплинарными методами и подходами к решению научных и практических задач, методами моделирования в междисциплинарных и смежных областях.

профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями ИПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач. ИПК-14.3. Владеет междисциплинарными методами и подходами к решению научных и практических задач, методами моделирования в междисциплинарных и смежных областях.			

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
9	2	72	12	20	-	40	зачёт
10	2	72	12	20	-	40	зачёт
Итого:	4	144	24	40	-	80	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№	Наименование разделов и тем	Количество часов

п/п	(с разбивкой на модули)	по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
9 семестр					
1.	Решение уравнений и неравенств с параметрами. Линейные уравнения и неравенства. Квадратичные уравнения и неравенства.	6	-	10	20
2.	Решение уравнений и неравенств с модулем, содержащих параметр.	4	-	6	10
3.	Решение уравнений и неравенств графическим способом	2		4	10
	Итого по 9 семестру	12		20	40
10 семестр					
4.	Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами	2		4	10
5.	Показательные и логарифмические уравнения с параметрами	4		6	10
6.	Тригонометрические уравнения и неравенства с параметрами.	4		4	10
7.	Функции. Свойства функций.	2		4	10
Итого 10 семестр		**12**		**20**	**40**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса (9 семестр)

1. Общие представления о задачах с параметрами. Линейные уравнения с параметром. Квадратные уравнения с параметром. Методы решения квадратных уравнений с параметрами.

2.Решение квадратных уравнений с параметрами по возрастанию степени сложности метода. Примеры решения квадратных уравнений с параметром по определению. Графический метод решения квадратных уравнений с параметрами.

3.Решение задачи аналитическим и графическим методом.
Задачи, связанные с расположением корней квадратного трехчлена.
4.Доказательство неравенств с параметрами. Подборка квадратных уравнений и неравенств с параметрами из ЕГЭ.

Краткое содержание курса (10 семестр)

1. Свойства арифметических корней. Некоторые важные неравенства. Иррациональные неравенства.
2.Показательные уравнения. Типы показательных уравнений и методы их решения. Показательно-степенные уравнения. Логарифмические уравнения. Методы решения логарифмических уравнений, содержащих параметр. Логарифмические неравенства. Показательно-логарифмические неравенства.
3.Решение тригонометрических уравнений с параметрами по возрастанию степени сложности метода. Примеры решения тригонометрических уравнений с параметром по определению. Тригонометрические уравнения и методы их решения. Решение систем тригонометрических уравнений.
4.Способы задания функций. Монотонность функций. Экстремумы функций. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Обратная функция.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Примерный вариант контрольной работы (9 семестр):

1) При каких значениях параметра **а** уравнение
$\frac{(a+4)x^2+6x-1}{x+3}$ =0 имеет единственное решение?
2) Решите неравенство: (а +3)х ≥ 2 ;

3) При каких значениях параметра **а** уравнение
(а-1)$4^x + (2a-3)6^x = (3a-4)9^x$ имеет единственное решение.

Примерный вариант контрольной работы (10 семестр)

1. Найдите все значения параметра а , при каждом из которых уравнение ах+√5-4х-x^2 = 2а+3 имеет единственный корень.
2. При каких значениях параметра а уравнение $\sin^2 3x$ – (а+1\3)sin3х+а\2=0 имеет ровно три корня , принадлежащих отрезку [2π\3,π]?
3. При каких значениях параметра а наибольшее значение функции у=-x^2+4ах + 5x^2 на [-3,1]равно 8?

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Кузина Н.Г. Элементарная математика. Учебно – методическое пособие для студентов педагогических вузов.- Ульяновск: УлГПУ, 2017.
2. Стрюкова Г. А. Дидактические материалы по элементарной математике. Ульяновск: УлГПУ, 2017. 62 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2 Контрольная работа ОС-3 Защита реферата ОС-4 Контрольная работа	ОР-1. Умеет самостоятельно осуществлять сбор и обработку информации, используя современные информационные средства поиска и анализа данных; проводить исследовательскую работу в соответствии с индивидуальным планом; ОР-2. Владеет практическими навыками осуществления исследований в предметной области; приёмами систематизации знаний в предметной области; навыками использования систематизированного теоретического и практического знания для постановки и решения исследовательских задач предметной области. ОР-3. Умеет показывать значимость знаний предметной области в практической деятельности и в научных исследованиях, иллюстрировать примерами наличие междисциплинарных связей, решать некоторые простейшие междисциплинарные задачи, характеризовать применимость знаний предметной области в школьном курсе ОР-4. Владеет междисциплинарными методами и подходами к решению научных и практических задач, методами моделирования в междисциплинарных и смежных областях
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-5 Зачет в форме устного собеседования по вопросам	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Избранные вопросы элементарной математики»

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-5 Зачет в форме устного собеседования по вопросам
Перечень вопросов к зачету
Примерный перечень вопросов к зачету 9 семестр.

1. Решение алгебраических уравнений с параметром.
2. Алгоритмы решения простейших линейных уравнений с параметрами.
3. Алгоритмы решения простейших квадратных уравнений с параметрами.
4. Равносильные преобразования уравнений, содержащих параметры.
5. Равносильные преобразования уравнений и неравенств, содержащих параметры.
6. Теоремы о равносильных неравенствах.
7. Теоремы о равносильных системах уравнениях.
8. Доказательство неравенств на множествах.

Примерный перечень вопросов к зачету 10 семестр.

1. Решение показательных уравнений с параметром.
2. Решение показательных неравенств с параметром.
3. Алгоритмы решения простейших логарифмических уравнений с параметрами.
4. Алгоритмы решения простейших логарифмических неравенств с параметрами
5. Равносильные преобразования уравнений, содержащих параметры.
6. Равносильные преобразования неравенств, содержащих параметры.
7. Методы решения тригонометрических уравнений, содержащих параметры.
8. Методы решения тригонометрических неравенств, содержащих параметры.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачёт
9,10 семестры	Разбалловка по видам работ	6 х 1=6 баллов	10 х 1=10 баллов	152 балла	32 балла
	Суммарный макс. балл	6 баллов max	16 баллов max	168 балла max	200 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 9 и 10семестров

	Баллы (2 ЗЕ)
«зачтено»	более 100
«не зачтено»	100 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Практическое занятие 1: Общие методы решения алгебраических уравнений.

Определение: уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (1),

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ -действительные числа (коэффициенты), n - натуральное число, а x искомая неизвестная величина, $a_n \neq 0$ называется алгебраическим уравнением n-го порядка.

Обсудим методы решения уравнений при n >2.

В силу теоремы К. Гаусса любое алгебраическое уравнение n –го порядка имеет не более n корней. В математике разработаны способы вычисления корней алгебраических уравнений 3-го и 4-го порядка, однако в школьном курсе математики эти методы не рассматриваются.

Перейдем к основному изложению.

Здесь мы рассмотрим методы, применимые к отдельным представителям любого типа. Это общие методы:

-метод разложения на множители;

-метод замены переменной;

-метод, основанный на использовании строгой монотонности;

-метод сравнения множеств значений.

Метод разложения на множители (ОМ1).

Идея метода выражена следующей цепочкой преобразований данного уравнения:

$f(x)=g(x) \leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \leftrightarrow \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = 0.$

Далее рассматривают либо равносильную совокупность двух систем:

$$1)\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_2(x) - \text{ имеет смысл} \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} \varphi_2(x) = 0 \\ \varphi_1(x) - \text{ имеет смысл} \end{cases} \quad (2)$$

либо совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_2(x) = 0 \end{array}\right.$$

Во втором случае могут быть получены посторонние корни, поэтому здесь обязательна проверка корней или иной их анализ на пригодность.

В случае уравнений (1) правая часть равна 0, причем допустимыми значениями переменной x являются любые действительные числа. Следовательно, остается лишь суметь разложить многочлен

$Pn(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ в произведение многочленов

$Qm(x)$ и $Hk(x)$ меньшей , чем n, степени:

$Pn(x) = Qm(x) \cdot Hk(x)$, то (1) $\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Qm(x) = 0 \\ Hk(x) = 0 \end{array}\right.$ (3)

Способы разложения на множители:

Вынос за скобку некоторого выражения;

Выделение полных квадратов вида : $a^2 \pm 2ab + b^2$;

Выделение разности квадратов;

Выделение полных кубов вида: $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Выделение суммы (разности) кубов.

Этот список легко продолжить, если иметь ввиду алгебраические формулы для $(a \pm b)^n$, $a^n - b^n$, $a^{2k+1} + b^{2k+1}$, $(a + b + c)^k$ и другие при n>3, k>1, n,k ∈N.

Рассмотрим примеры:

Пример 1. $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^4 + x^3 + x^2) - (2x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + x + 1) - 2(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$

Пример 2. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow [(x^2)^2 - 2x^2 \cdot (2x) + (2x)^2] - 2x^2 + 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow ((x^2 - 2x) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$

Пример 3. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow [(x^2)^2 - 2x^2 2 + 4] - x^2 = 0 \leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - x^2 = 0 \leftrightarrow (x^2 - 2 - x)(x^2 - 2 + x) = 0 \leftrightarrow x \in \{-2; -1; 1; 2\}.$

Пример 4. $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3} \leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 3x = 1 \leftrightarrow 4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \leftrightarrow 4x^3 = (x + 1)^3 \leftrightarrow x\sqrt[3]{4} = x + 1 \leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}.$

Пример 5. (5-я Соросовская олимпиада, 9 класс) Решите уравнение:

$$x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = 0$$

Решение: в силу формулы $(a+в+c)^2 = a^2+в^2+c^2+2aв+2ac+2вc$, многочлен в левой части является полным квадратом трехчлена x^2+2x-2 . Исходное уравнение равносильно квадратному уравнению: $x^2+2x-2=0$.

Практическое занятие 2. Метод подстановки.

Идея метода по отношению к уравнению f(x)=g(x) состоит в том, чтобы найти функции $t=\varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, для которых при любом $x \in D(f)\cap D(g)$ выполняется равенство $f(x) - g(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$. В этом случае достаточно решить уравнение $\varphi_2(t) = 0$, а затем для каждого корня t0 , если он имеется, решить уравнение $\varphi_1(x) = t0$. (*)

Совокупность всех полученных таким образом корней $x \in D(f)\cap D(g)$ уравнений (*) будет искомым множеством решений исходного уравнения. Функция $t=\varphi_1(x)$ называется в подобной ситуации подстановкой.

Пример 5. $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = 1$.

Решение. Пусть $t=x^2 - 7x + 13$. Тогда данное уравнение , в силу $(x-3)(x-4)= x^2 - 7x + 12$, можно записать в виде $t^2 - t = 0$. Отсюда имеем t1=0, t2=1.

Следовательно, осталось решить совокупность из двух квадратных уравнений : $x^2 - 7x + 13 = 0, x^2 - 7x + 13 = 1$. Ответ: $\{3;4\}$.

Пример 6. (2-я Соросовская олимпиада, 1 тур)

(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5.

Указание: перемножить выражения в 1-й и 4-й, 2-й и 3-й скобках, применить подстановку $t=12x^2 - 5x$. Ответ: $\{\frac{1}{2};-\frac{1}{12}\}$.

Метод строгой монотонности (ОМ3).

Он основан на следующей теореме.

Теорема 1. Если y= f(x) строго монотонна на множестве X , то уравнение f(x)=a (с константой a в правой части) не может иметь на множестве X более одного корня.

Действительно, иногда с помощью каких-либо приемов (или подбором) удается найти один корень данного уравнения. Если при этом к данному уравнению применима приведенная выше теорема, то найденный корень единственный. Процесс корней будет закончен.

Чтобы применить теорему 1 необходимо:

знать промежутки монотонности у основных элементарных функций;

уметь находить промежутки монотонности у более сложных функций

(способы нахождения промежутков монотонности: с помощью производных; используя определение строгой монотонности; на основе свойств функций).

Пример 7. $x^6 + 2x^4 + 3x^2 - 54 = 0$

Решение. Очевидно, что функция $f(x) =x^6 + 2x^4 + 3x^2 - 54$ возрастает на множестве $[0;\infty)$. Следовательно на этом множестве у исходного не более одного корня. Это $x=\sqrt{3}$. Теперь достаточно заметить, что функция четная и поэтому уравнению f(x)=0 вместе с каждым x удовлетворяет также и значение -x, или использовать убывание функции f(x) на множестве $(-\infty;0)$.

Ответ: $\pm \sqrt{3}$.

Пример: 8. $x^5 + 3x^3 + 5x - 15\sqrt{2} = 0$.

Решение. Заметим, что функции $y1=5x-15\sqrt{2}$, $y2=3x^3$ и $y3=x^5$ являются возрастающими на веем R. Следовательно также возрастающей является функция y= y1+ y2+ y3. Тогда, в силу теоремы 1 данное уравнение не может иметь более одного корня. Остается проверить, что ему удовлетворяет значение $x = \sqrt{2}$.

Практическое занятие 3. Метод сравнения множеств значений (ОМ 4).

В его основе лежит следующая теорема.

Теорема 2. Если для всех x∈ X выполняются неравенства f(x) ≥ a и g(x) ≤ a, то уравнение f(x)=g(x) на множестве X равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases} \quad (4);$$

Пример 9. $x^8 - 7x^4 - 4x^2 + 20 = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно $x^8 - 8x^4 + 16 = -(x^4 - 4x^2 + 4)$.

Ясно, что выражение в левой части этого уравнения есть полный квадрат, следовательно оно всегда неотрицательно на множестве R. Аналогично, выражение в правой части не может принимать положительные значения. Т.о. , по теореме 2 это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x^2 - 4)^2 = 0 \\ (x^2 - 2)^2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{2}$.

Замечание. Если на множестве X выполняется либо $\begin{cases} f(x) > a \\ g(x) \le a \end{cases}$ либо $\begin{cases} f(x) \ge a \\ g(x) < a \end{cases}$, то уравнение f(x)=g(x) на X не имеет корней.

В общей ситуации сила метода ОМ4 проявляется в том, что при переходе от уравнения f(x)=g(x) к системе уравнений (4) выражения f(x) и g(x) быть весьма различными по своему «типу», разъединяются и не мешают друг другу в процессе решения возникшей системы (это особенно характерно в тех случаях, когда уравнение имеет смешанный тип).

Практическое занятие 3.

Метод перебора делителей крайних коэффициентов

В случае уравнения (1) с целыми коэффициентами известен метод поиска всех его рациональных корней, если они имеются. Метод основан на следующей ТЕОРЕМЕ 3:

Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ – корень алгебраического уравнения (1) степени n с целыми коэффициентами $a_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n$, то p – делитель свободного члена a_0, а q – делитель старшего коэффициента a_n. В частности, если $a_n = 1$, то каждый рациональный корень a_0 уравнения (1) с целыми коэффициентами является целым числом, причем делителем свободного члена a_0.

В силу этой теоремы для того, чтобы найти рациональные корни уравнения (1) с целым коэффициентами, достаточно проверить все дроби $\frac{p}{q}$, для которых a_0 делится (без остатка!) на p и a_n делится на q .

Пример 13. $\boldsymbol{x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0}$

Решение. Все коэффициенты данного уравнения целые, причем $n = 3$ и $a_3 = 1$. Поэтому достаточно проверить только делители свободного члена $a_0 = -21$. Число -21 имеет 8 (целых) делителей: ± 1, ± 3, $\pm 7, \pm 21$. Из них уравнению удовлетворяют: $x = -7, x = -3, x = 1$. Поскольку у кубического уравнения не может быть более 3 корней, то найдены все корни исследуемого уравнения.

ОТВЕТ: $\{\boldsymbol{-7; -3; 1}\}$

Заметим, что если количество имеющихся рациональных корней уравнения (1) с целыми коэффициентами меньше, чем степень n, то сформулированная выше теорема также полезна. С ее помощью находят сначала все рациональные корни, а затем понижают степень уравнения. Возможность такого понижения степени основана на СЛЕДСТВИИ ИЗ ТЕОРЕМЫ БЕЗУ:

Если – корень алгебраического уравнения (1), то многочлен делится на $x - x_0$, т.е. имеется многочлен степени $n - 1$ такой, что .

Т.о., если x_0 – корень уравнения (1), то для завершения решения достаточно найти коэффициенты многочлена и решить уравнение. Для поиска коэффициентов разработана так называемая схема Горнера, с которой школьники знакомятся при углубленном изучении математики. Можно с этой задачей справиться и без схемы Горнера. Достаточно

поделить многочлен на двучлен $x - x_0$ «уголком» , по аналогии с делением «уголком» многозначных натуральных чисел. При этом, если найдены два корня и для поиска остальных корней можно сразу делить на ,т.е. на

Пример 14.

Решение. Здесь и , а свободный член имеет четыре делителя. Проверка показывает, что значения и являются корнями данного уравнения. Поскольку ,то могут быть еще два (действительных) корня. По теореме Безу многочлен делится на ,т.е. на. Найдем частное. Для этого поделим на «уголком», используя при этом в каждом шаге результат от деления « старшего» члена на «старший»:

Теперь осталось решить квадратное уравнение. Его дискриминат отрицателен, поэтому действительных корней у него нет. Т.о.,исходное уравнение имеет только два первоначально найденных действительных корня:

Практическое занятие 5. Метод решения возвратных уравнений.

Уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ называется симметрическим, если $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, …, т.е. если равноудаленные от концов коэффициенты попарно одинаковы.

Пример: $x^5 + 21x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 21x + 1 = 0$

Многие симметрические уравнения удается решить с помощью понижения степени симметрического уравнения не менее, чем вдвое. Напомним основные моменты этого метода.

Пусть n=2k.

Поделим обе части уравнения (1) на x^k получаем следующее равносильное уравнение: $a_n x^k + a_{n-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x^{1-k} + a_0 x^{-k} = 0$, т.е.

$$\boldsymbol{a_0\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + a_1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \cdots + a_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_k = 0}$$

t = $\boldsymbol{x + \frac{1}{x}}$ сводится к алгебраическому уравнению степени k. Для этого достаточно применить соотношения типа:

$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x}) - 2 = t^2 - 2$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = t^3 - 2$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2 = (t^2 - 2)^2 - 2 = \boldsymbol{t^4 - 4t^2 + 2}$

……..

Если n=2k+1, то проверка показывает, что x = -1 является корнем (симметрического уравнения нечетной степени). Тогда делением его левой части на x+1 оно сводится к симметрическому уравнению степени 2k.

Пример: $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$

Методику решения симметрических уравнений может быть обобщена. Покажем это на примере так называемых возвратных уравнений 4-го порядка.

Уравнение вида $a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ называется возвратным, если $\frac{a_0}{a_4} = (\frac{a_1}{a_3})^2 = m^2$(*)

При решении возвратных уравнений применяем прежнюю идею: деление на x^2 с последующей заменой переменной, только теперь необходима подстановка вида:

t = $\boldsymbol{x + \frac{m}{x}}$.

При m = -1 уравнение типа (*) называется кососимметрическим. К таким уравнениям применяется подстановка t = $\boldsymbol{x - \frac{m}{x}}$.

Пример 5 . (5-я Соросовская олимпиада, 9 класс) Решите уравнение:

$$x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = 0$$

Решение: исходное уравнения является возвратным, здесь m=-2; уравнение может быть решено с помощью подстановки t= $\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}}$.

Замечание: в некоторых случаях с помощью вспомогательной подстановки удается привести уравнение к известному типу.

Например: $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x - 1 = 0$.

Сначала применим подстановку x = y – 1. Получится уравнение

$y^4 - 2y^3 - 3y^2 + 2y + 1 = 0$ – кососимметрическое относительно y.

Практическое занятие 6. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим его на примере алгебраических уравнений 4-го порядка.

Известно, что каждый многочлен 4-го порядка может быть представлен как произведение двух квадратных многочленов:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2)$.

При этом должны быть выполнены следующие равенства коэффициентов при одинаковых степенях слева и справа (если представить правое выражение в виде стандартного многочлена):

$$x^0:\ e = c_1 \cdot c_2$$
$$x^1:\ d = b_1 \cdot c_2 + b_2 \cdot c_1$$
$$x^2:\ c = a_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_1 + b_1 \cdot b_2$$
$$x^3:\ b = a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1$$
$$x^4:\ a = a_1 \cdot a_2$$

Т.о. задача о разложении многочлена 4-го порядка превращается в задачу о нахождении величин a_i, c_i, b_i по коэффициентам a, b, c,d.

СМ4. Метод производной функции.

С помощью производных легко можно выяснить наличие строгой монотонности исследуемой функции. Это полезно в ситуациях, когда применим метод ОМ3.

Пример: $(\mathbf{3} - x^{\mathbf{3}})^{\mathbf{3}} - x^{\mathbf{9}} - \mathbf{7}x = 0$

Решение: Пусть f(x) =$(\mathbf{3} - x^{\mathbf{3}})^{\mathbf{3}} - x^{\mathbf{9}} - \mathbf{7}x$. Тогда f ' (x) < 0 для всех x из R, а исследуемое уравнение не может иметь более одного корня.

X=1 корень уравнения. (единственный корень уравнения).

Пример: $x^4 - 8x^3 + 432 = 0$.

Метод Кронекера (самостоятельно)

Метод Феррари (самостоятельно)

Практическое занятие 7.

Тема занятия: «методы решения логарифмических уравнений и неравенств»

1. **Логарифмические уравнения:**

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, \qquad a^{\sqrt{\log_c b}} = b^{\sqrt{\log_c a}},$$

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$$

Логарифмическая функция – $y = \log_a x$

a>1	0<a<1
1) Область определения D(y)=(0; +∞); 2) Область значений E(y) = (-∞;+∞);	1) Область определения D(y)=(0; +∞); 2) Область значений E(y) = (-∞;+∞); 3) Если 0 <a< 1 и

3) Если a >1 и 0 < x <1, то y<0, если x>1,то y>0; 4) Функция монотонно возрастающая	0 < x <1, то y>0; если x>1,то y<0 4) Функция монотонно убывающая

Основные теоремы равносильности:

Т.1. Пусть M=D(f)∩D(g), тогда на этом множестве

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Т.2. Пусть M= D(f)∩D(g)∩D(h), тогда на этом множестве уравнение

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Практическое занятие 9.Методы решения логарифмических уравнений:

Метод	Пояснения. Пример
Потенцирование	Так называется преобразование, заключающееся в переходе от уравнения $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ **(1)** к уравнению f(x) = g(x) **(2)** Пример: $\log_2 x = \log_2(6 - x^2)$ Потенцируя, получаем уравнение x=6-x², имеющее корни x1=2, x2=-3. Проверка показывает, что корень x1=2 удовлетворяет исходному уравнению, второй корень является посторонним.
Логарифмирование	Так называется преобразование, заключающееся в переходе от уравнения (2) к уравнению (1). Пример: $2^{x^{2-3x}} = \frac{1}{4}$. Обе части уравнения положительны при всех допустимых значениях x . Беря от обеих частей уравнения логарифмы по основанию 2, получаем x²-3x=-2, откуда находим x1=1, x2=2.
Использование свойств логарифмов	Пример: $\log_6(x - 1) + \log_6(5x + 3) = 2$

	Используя свойства логарифмов, мы приходим к уравнению $\log_6(x-1)(5x+3)=2$ От него переходим к уравнению (x-1)(5x+3)=36, имеющему два корня: x1=3, x2=-13/5. Проверка показывает, что x1=3 –корень исходного уравнения, а x2=-13/5 является посторонним корнем.
Графический	Необходимо построить графики правой и левой частей уравнения и найти точки пересечения графиков.
На основе свойств монотонности	(см. лекция 1, метод строгой монотонности), Пример: $\log_2 x=(6-x)$ У1= $\log_2$ x -функция возрастает; У2=6-x - функция убывает. Уравнение имеет единственное решение x=4.

Практические неравенства 10. Логарифмические неравенства.

Рассмотрим решение основных видов логарифмических неравенств.

1) M=D(f)∩D(g), a > 1

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

2) M=D(f)∩D(g), 0<a < 1

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Неравенства, решаемые методом промежутков.

Пример: $(x^2-4x+3)(2^x-4)\log_5\frac{x}{3}\geq 0$

ОДЗ: x∈(0;+∞)

$2^x-4=0$, x=2;

$x^2-4x+3=0$, x=3 и x=1;

$\log_5\frac{x}{3}=0$, x=3 ;

	(0;1)	(1;2)	(2;3)	(3;+∞)
2^x-4	-	-	+	+
$\log_5\frac{x}{3}$	-	-	-	+
x^2-4x+3	+	-	-	+
Знак выражения	+	-	+	+

Ответ : x∈(0;1]U[2;+∞).

Заметим, что между методами решений уравнений и неравенств есть одно очень существенное отличие. Если, решая уравнение, можно использовать преобразования, приводящие к появлению посторонних корней, устраняя их на заключительном этапе с помощью проверки, то при решении неравенств рассчитывать на проверку нельзя, т.к. множество решений неравенства, как правило, бесконечно. Поэтому при решении неравенств в подавляющем большинстве случаев рекомендуется начинать решение с определения ОДЗ неравенств и затем тщательно следить за равносильностью всех совершаемых преобразований.

Если в уравнении некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются параметрами, а уравнение параметрическим.

Естественно, такой класс задач многим не позволяет усвоить главное: параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет «общаться» с параметром как с числом, а во-вторых, - степень свободы общения ограничивается его неизвестностью. Так, деление на выражение, содержащее параметр, извлечение корня четной степени из подобных выражений требуют предварительных исследований. Как правило, результаты этих исследований влияют и на решение, и на ответ.

Сделаем одно замечание. Существенным этапом решения уравнений с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы «ветвится» в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа – это сбор ранее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.

Как начинать решать такие задачи? Прежде всего при решении задач с параметрами надо сделать то, что делается при решении любого уравнения или неравенства – привести заданные уравнения или неравенства к более простому виду, если это, конечно, возможно: разложить рациональное выражение на множители; разложить тригонометрический многочлен на множители; избавиться от модулей, логарифмов и т.д. Затем необходимо еще и еще раз прочитать задание.

Основные типы задач с параметрами:

Тип 1. Задачи, которые необходимо решить для всех значений параметра или для значений параметра из заданного промежутка.

Тип 2. Задачи, где требуется найти количество решений в зависимости от значения параметра.

Тип 3. Задачи, где необходимо найти значения параметра, при которых задача имеет заданное количество решений

Тип 4. Задачи, в которых необходимо найти значения параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям.

В данной работе рассматриваются тригонометрические уравнения с параметрами и определенные алгоритмы, которые могут помочь в решении столь нелегких заданий.

Итак, рассмотрим уравнение

$F(x, y, ..., z; \alpha, \beta, ..., \gamma) = 0$ (F)

с неизвестными $x, y, ..., z$ и с параметрами $\alpha, \beta, ..., \gamma$; при всякой допустимой системе значений параметров $\alpha_0, \beta_0, ..., \gamma_0$ уравнение (F) обращается в уравнение $F(x, y, ..., z; \alpha_0, \beta_0, ..., \gamma_0) = 0$ (F_0)

с неизвестными $x, y, ..., z$, не содержащее параметров. Уравнение (F_0) имеет некоторое вполне определенное множество (быть, может, пустое) решений.

Определение. *Решить уравнение (или систему), содержащее параметры, это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения (системы).*

Понятие эквивалентности применительно к уравнению, содержащему параметры, и устанавливается следующим образом.

Определение. *Два уравнения (системы)*

F(x, y, ..., z; α,β, ..., γ) =0 (*F*), *Ф (x, y, ..., z; α,β, ..., γ)* =0 (*Ф*)

с неизвестным x, y,..., z и с параметрами α,β, ..., γ называются эквивалентными, если для обоих уравнений (систем) множество допустимых систем значений параметров одно и то же и при всякой допустимой системе значений, параметров оба уравнения (системы уравнений) эквивалентны.

Итак, *эквивалентные уравнения при всякой допустимой системе значений параметров имеют одно и то же множество решений.*

Преобразование уравнения, изменяющее множество допустимых систем значений параметров, приводит к уравнению, не эквивалентному данному уравнению.

Приведем формулы решений простейших тригонометрических уравнений:

Практическое занятие 10.

Подходы решений тригонометрических уравнений с параметрами

1. *Пример 1. (Введение дополнительных переменных,* $t = cos^2x$*)*

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $cos^4x-(a+2)cos^2x-(a+3)=0$ имеет решение.

Решение.

Введем новую переменную: $t = cos^2$x, t[?][?][?][0;1]. Тогда данное уравнение принимает вид: $t^2 - (a + 2)t - (a + 3) = 0$.

Чтобы решить получившееся квадратное уравнение с переменной t, найдем его дискриминант: $D = a^2 + 4a + 4 + 4a + 12 = a^2 + 8a + 16 = (a + 4)^2$. Так как $D \geq 0$, квадратное уравнение имеет решение

$$t_{1,2} = \frac{a+2[?][?]\sqrt{(a+4)^2}}{2} = \frac{a+2[?][?]|a+4|}{2} = \frac{a+2[?][?](a+4)}{2};$$

$$t_1 = \frac{a+2+a+4}{2} = \frac{2a+6}{2} = \frac{2(a+3)}{2} = a+3;$$

$$t_2 = \frac{a+2-a-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Число -1 не принадлежит промежутку [0;1], таким образом, заданное нам тригонометрическое уравнение с параметром имеет решение при условии

$0 \leq a + 3 \leq 1$, $-3 \leq a \leq -2$.

Ответ. Уравнение $cos^4x-(a+2)cos^2x-(a+3)=0$ имеет решение при a [?][?][?][−3;−2].

2. *Пример 2. (Введение дополнительных переменных,* $t = sinx$*)*

Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $6\sin^3x = p - 10\cos 2x$ не имеет корней.

Решение:

$6\sin^3x = p - 10\cos 2x$;

$6\sin^3x + 10\cos 2x = p$;

$6\sin^3x + 10(1 - 2\sin^2x) = p$;

$6\sin^3x - 20\sin^2x + 10 = p$.

Число $2\frac{2}{9}$ не принадлежит промежутку [−1;1], поэтому вычисляем значения функции в точке 0 и на концах отрезка:

$y(0) = 0 - 0 + 10 = 10$,

y(-1) = -6 – 20 + 10 = -16,

Ответ. Уравнение $6\sin^3 x = p - 10\cos 2x$ не имеет корней при p*Пример 9. (Вспомогательные преобразования)*

Решить уравнение $sin^4x + cos^4x = a$

Решение:

Выполняем очевидные преобразования:

$$sin^4x + cos^4x + 2sin^2xcos^2x - 2sin^2xcos^2x = a;$$
$$(sin^2x + cos^2x)^2 - \frac{1}{2}sin^2 2x = a;$$
$$2 - sin^2 2x = 2a;$$
$$sin^2 2x = 2 - 2a;$$
$$1 - cos4x = 4 - 4a;$$
$$cos4x = 4a - 3.$$

3. *Пример 10. (Графический метод)*

Найти все значения *a,* при которых каждое из уравнений $\sqrt{41 + 9cosx} - acosx = 0$ и $|x - a| + 7|x + 2| + 5x = 0$ имеет хотя бы один корень.

Решение:

Посмотрим сначала когда первое уравнение имеет корни. С учетом области значений косинуса выражение под корнем всегда положительное. Получаем:

$$\sqrt{41 + 9cosx} = acosx$$

А вот здесь сейчас будет интересно. Казалось бы, все прекрасно, возводим в квадрат и вперед, по стандартной схеме исследуем корни квадратного уравнения. Но не все так просто. Поскольку на наличие корней будет влиять знак произведения, стоящего в правой части.

Можно очень легко выкрутиться из этой ситуации без рассмотрения большого числа случаев. Как всегда на помощь приходят графики.

Рассмотрим функции $f = \sqrt{41 + 9t}$ [?][?] $g = at$. Точка пересечения этих графиков должна попасть в отрезок [-1;1] поскольку $t = cosx$.

Точка пересечения для возрастающей прямой $f(1) = g(1); a = 5\sqrt{2}$, для убывающей $f(-1) = g(-1); a = -4\sqrt{2}$. Не составляет большого труда увидеть, что точка пересечения будет в промежутке от -1 до 1,

Теперь займемся вторым уравнением. Здесь все проще.

$$|x - a| + 7|x + 2| + 5x = 0;$$
$$-|x - a| = 7|x + 2| + 5x$$

Функция, стоящая в правой части достигает своего наименьшего значения -10 в точке $x = -2$. График функции в левой части представляет собой «перевернутый» график модуля, смещенный по оси абсцисс на величину *a.*

Для того, чтобы уравнение имело корни, должно быть выполнено условие

Примечание: Второй случай можно разобрать и иначе, выполнив условие, что наименьшее значение функции $|x - a| + 7|x + 2| + 5x$ должно быть неположительным. Для этого надо раскрыть модули всеми возможными способами и составить систему неравенств.

С учетом условия, полученного для первого уравнения.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Добрынина, И. В. Элементарная математика : учебно-методическое пособие / И. В. Добрынина, Н. М. Исаева, Н. В. Сорокина. — Тула : ТГПУ, 2018. — 95 с. — ISBN 978-5-6041454-8-7. — Текст : электронный // URL: https://e.lanbook.com/book/113615
2. Буракова, Г. Ю. Элементарная математика : учебное пособие / Г. Ю. Буракова, Т. Н. Карпова, И. Н. Мурина. — Ярославль : , [б. г.]. — Часть 1 — 2012. — 131 с. — ISBN 978-5-87555-752-1. — Текст : электронный — URL: https://e.lanbook.com/book/154018
3. Чулков, П.В. Практические занятия по элементарной математике (2-й курс): учебное пособие / П.В. Чулков. – Москва: Прометей, 2012. – 102 с.: ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437445

Дополнительная литература

1. Дадаян, А. А. Геометрические построения на плоскости и в пространстве: задачи и решения: учебное пособие / А. А. Дадаян. — 2-е изд. – Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2020. - 464 с.: ил. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-807-6. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1082973
2. Елецких, И.А. Математика: учебное пособие / И.А. Елецких, Т.М. Сафронова, Н.В. Черноусова; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Кафедра математики и методики её преподавания. – Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2016. – Ч. 2. – 144 с.: граф., ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=498148
3. Мельников, Р.А. Элементарная математика: учебное пособие / Р.А. Мельников, Г.Г. Ельчанинова; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. – Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2017. – Ч. 3. Тригонометрия. – 101 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=498152
4. Ельчанинова, Г.Г. Элементарная математика: учебное пособие / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. – Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2016. – Ч. 4. Геометрия. Начальные сведения. Треугольник. – 93 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=498154

Интернет-ресурсы

http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал