Министерство Просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«24» июня 2022 г.

ПРИКЛАДНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Программа учебной дисциплины модуля «Прикладные математические методы в научных исследованиях»
основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Математика.

(заочная форма обучения)

Составитель: Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол «25» марта 2022 г. №5

Ульяновск, 2022

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Прикладное математическое моделирование» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) модуля «Прикладные математические методы в научных исследованиях» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Математика», заочной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин Финансово-экономический практикум, Нормативно-правовые основы профессиональной деятельности и антикоррупционное поведение, Методы исследовательской и проектной деятельности.

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: Научно-исследовательская работа, Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины подготовка учителя к преподаванию профессиональных предметов, подготовка к оптимальному использованию материальных и трудовых ресурсов.

Задачей освоения дисциплины является формирование умений решать оптимизационные профессиональные задачи, глубже ознакомится с экономическими методами, сформировать представление о роли математических методов в экономике, в оптимальном использованием ресурсов в управлении предприятием и в иной экономической деятельности.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	Умеет	Владеет
УК-2. Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений УК-2.2. Оценивает вероятные риски и ограничения, определяет	ОР-1. Знает разновидности рисков и ограничений в проектной деятельности; техники цифрового моделирования	ОР-2. Умеет проектировать процесс решения каждой задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений	

ожидаемые результаты решения поставленных задач			
УК-6. Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни УК-6.2. Критически оценивает эффективность использования времени и других ресурсов при реализации траектории саморазвития		ОР-3. Умеет критично оценивать личностные ресурсы (включая временные) при проектировании и реализации траектории своего развития	
УК-9. Способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности УК-9.2. Применяет методы личного экономического и финансового планирования для достижения текущих и долгосрочных финансовых целей, использует финансовые инструменты для управления личными финансами (личным бюджетом), контролирует собственные экономические и финансовые риски		ОР-4. Умеет осуществлять личное экономическое и финансовое планирование для достижения текущих и долгосрочных финансовых целей	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Всего		Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Трудоемк.		Лекции, час.	Практические занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Лабораторные занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Самостоят. работа, час.	
	Зач. ед.	Часы							
7	3	108	4	10	-	-	-	67	экзамен (27)
Итого:	3	108	4	10	-	-	-	67	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
7 семестр				
Роль математического моделирования в социально-гуманитарных и естественно-научных исследованиях	2	2	-	20
Модели линейного программирования в различных научных областях	-	4	-	20
Модели динамического программирования в прикладных исследованиях	2	2	-	10
Схема гибели и размножения и ее применения в биологии, экономике и анализе систем массового обслуживания.	-	2		17
Экзамен	-	-	-	27
Всего по дисциплине:	**4**	**10**	**-**	**94**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

1. Роль математического моделирования в социально-гуманитарных и естественно-научных исследованиях

Математические модели в сфере биологии, экологии, экономики, в социально-

гуманитарных сферах. Примеры экономических задач на оптимизацию с ограничениями в виде равенств и неравенств. Построение математической модели и определение целевой функции. Интерактивная форма – урок дискуссия. Транспортная задача, задача об оптимальном назначении. Задача рационального использования ресурсов. Линейное и нелинейное программирование.

2. Модели линейного программирования в различных научных областях

Графические методы решения экономических задач. Анализ моделей на чувствительность. Графоаналитический метод решения задач линейного программирования. Анализ чувствительности модели к изменениям ограничений. Теневые стоимости. Возможности расширения производства и переподготовки кадров. Оценка допустимых затрат. Графический метод решения задач дискретного программирования. Интерактивная форма: решение задач линейного программирования с помощью компьютерных программ. Симплекс-метод в оптимизации. Двойственные задачи.

3. Модели динамического программирования в прикладных исследованиях

Цели и задачи динамического программирования. Основные этапы решения методом динамического программирования. Идея обратной прогонки, принцип оптимальности Беллмана. Примеры применения динамического программирования к задаче о нахождении кратчайшего пути, об оптимальном инвестировании, о замене оборудования на предприятии, о найме сезонных рабочих, об оптимальной загрузке. Урок – деловая игра. Принятие решения об оптимальном инвестировании, о найме.

4. Схема гибели и размножения и ее применения в биологии, экономике и анализе систем массового обслуживания.

Моделирование численности популяций. Схема гибели и размножения. Модель хищник-жертва. Марковские процессы. Стационарные, ординарные потоки событий, простейшие потоки. Системы массового обслуживания с отказами и очередями, и их применение к определению оптимальной численности персонала.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:
- подготовки к устным докладам;
- подготовка к защите проекта;
- решение задач по дисиплине.

ОС-1. Самостоятельная работа

Завод может производить продукцию по одному из двух типов технологий. При применении первого типа технологий на каждую 1000 выпущенных единиц продукции осуществляется выброс 3 $м^3$ загрязняющих веществ в атмосферу, а также используется 2 тонны нефти, при применении второй технологии используется 1 тонна нефти на тысячу единиц продукции, однако выбросы в атмосферу увеличиваются до 5 $м^3$. Завод не должен использовать более 600 тонн нефти в неделю. Составьте оптимальный план использования имеющихся технологий с целью минимизации выбросов в атмосферу, если в неделю необходимо производить не менее 400 тыс. единиц продукции.

е. В ситуации, описанной в задаче (д), введено ограничение на выбросы в атмосферу – не более 1500 $м^3$ в неделю. Предложите новый план использования технологий, чтобы расходы нефти были минимальными.

ОС-2. Групповое интерактивное задание.

Студенты разбиваются на микрогруппы по 3-4 человека в зависимости от количества студентов в группе, и получают задание разработать план-конспект просветительского или развлекательного мероприятия по тематике динамического программирования (максимально 12 баллов)

Примерные темы:

1. Динамическое программирование в решении кадровых задач
2. Динамическое программирование в инвестировании
3. Динамическое программирование в задаче о замене оборудования
4. Динамическое программирование в задаче о загрузке транспортного средства

- Составлен план-конспект мероприятия, (8 баллов)
- Самостоятельно найден дополнительный материал по теме, составлена презентация (дополнительно 1-4 баллов)

ОС-3. Контрольная работа

Примерный вариант:

1. Из трех видов сырья необходимо составить смесь наименьшей стоимости, в состав которой входит не менее 26 ед. химического вещества А, не менее 30 единиц вещества В,

не менее 24 ед. вещества С. Количество единиц химического вещества в 1 кг сырья, а также цена 1 кг сырья указаны в таблице

	Количеств единиц вещества в 1 кг сырья вида i		
Вещество	1	2	3
А	1	1	-
В	2	-	3
С	1	2	4
Цена 1 кг сырья (руб)	5	6	7

2. На коммутатор с тремя каналами поступает поток звонков (в среднем 3 звонка в минуту), средняя продолжительность разговора – 2 минуты. Если все каналы заняты в момент поступления звонка, то он не обслуживается. Коммутатор работает 14 часов в день (с 8 утра до 10 вечера). Содержание данного коммутатора обходится в 200 рублей в день. Каждый обслуженный звонок приносит прибыль – 50 копеек (без учёта содержание коммутатора). Определите среднюю дневную прибыль от данного коммутатора. Порекомендовали бы Вы увеличить или уменьшить количество каналов?

ОС-4. Индивидуальное творческое задание

Разработать программу элективного курса.

Примерные темы

1. 1. Моделирование неограниченного роста
2. Модели автокатализа
3. Ограниченный рост. Уравнение Ферхюльста
4. Модели Моно и Михаэлиса-Ментен.
5. Автоволны и диссипативные структуры. Базовая модель "брюсселятор"
6. Реакция Белоусова-Жаботинского.
7. Базовая модель взаимодействия. Конкуренция. Отбор.
8. Типы трофических функций и их влияние на устойчивость системы «Хищник-жертва»
9. Биометрия
10. Математические модели водоемов как экосистем

.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Линейное программирование в управлении персоналом: учебное пособие для направления подготовки бакалавров 080400.62. – Ульяновск, УлГПУ, 2013. – 70 с.

2. Исследование операций и математические модели в экономике. Лабораторные работы для студентов специальности «Управление персоналом»: учебно-методическое пособие / составитель Н.В. Глухова. – Ульяновск: УлГПУ, 2009. – 44 с.

3. Глухова Н.В. Методы оптимизации использования трудовых ресурсов. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 50 с.

4. Глухова Н.В. Теория принятия решений: учебное пособие. / Глухова Н.В. – Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 48 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2. Интерактивное задание. Деловая игра. ОС-3. Контрольная работа ОС-4. Индивидуальное творческое задание	ОР-1. Знает разновидности рисков и ограничений в проектной деятельности; техники цифрового моделирования ОР-2. Умеет проектировать процесс решения каждой задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений ОР-3. Умеет критично оценивать личностные ресурсы (включая временные) при проектировании и реализации траектории своего развития ОР-4. Умеет осуществлять личное экономическое и финансовое планирование для достижения текущих и долгосрочных финансовых целей
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-5. Экзамен в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости

обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-5 Экзамен в форме устного собеседования по вопросам
Перечень вопросов к экзамену

1. Построение математических моделей. Определение целевой функции.
2. Прикладные задачи сводимые к задачам линейного программирования.
3. Целевая функция и система ограничений. Примеры составления. Приведение системы ограничений к виду равенств и неравенств.
4. Двойственные задачи и их применение к задачам на составление пищевых рационов и оптимальных смесей.
5. Задача оптимизации использования ресурсов.
6. .Симплекс-метод решения задач линейного программирования
7. Решение задач линейного программирования с помощью стандартных пакетов программ
8. . Задача о рациональном использовании экологических ресурсов.
9. Задача о смеси.
10. Задачи о диетах.
11. Модели, описываемые одним дифференциальными уравнениями. Численность бактерий.
12. Модели роста популяций. Экспоненциальный и логистический рост. Модель с наименьшей критической численностью.
13. Моделирование изменения концентраций веществ.
14. Модели, описываемые системами дифференциальных уравнений.
15. Модели взаимодействия популяций. Вольтеровские модели: модели конкуренции и хищник-жертва.
16. Транспортная задача и методы её решения.
17. Графический метод решения задач оптимизации в управлении предприятием.
18. Экономические и управленческие задачи, требующие целочисленности решений.
19. Полностью и частично целочисленные задачи.
20. Метод Гомори (отсекающих плоскостей).
21. Метод ветвей и границ.
22. Цели и задачи динамического программирования.
23. Основные этапы решения методом динамического программирования. Идея обратной прогонки.
24. Принцип оптимальности Беллмана в динамическом программировании.
25. Применение динамического программирования к задаче о нахождении кратчайшего пути.
26. Применение динамического программирования к задаче об оптимальном инвестировании.
27. Марковские процессы. Схема гибели и размножения и примеры её применения в экономической сфере.
28. Классификация систем массового обслуживания. Понятие о простейших потоках.
29. Системы массового обслуживания с отказами. Определение вероятностей состояний для такой системы в установившемся режиме
30. Системы массового обслуживания с отказами. Абсолютная и относительная пропускная способности.
31. Системы массового обслуживания с отказами. Среднее число занятых каналов,

вероятность отказа и простоя в данной системе.

32. Системы массового обслуживания с ограниченной очередью. Ситуации, в которых необходимо искусственное ограничение очереди.
33. Системы массового обслуживания с ограниченной очередью. Расчет вероятностей состояний системы в установившемся режиме.
34. Системы массового обслуживания с ограниченной очередью. Расчет средней длины очереди.
35. Системы массового обслуживания с неограниченной очередью. Критерий, позволяющий выявить неограниченный рост очереди.
36. Системы массового обслуживания с неограниченной очередью. Расчёт вероятностей состояний для системы в установившемся режиме.
37. Системы массового обслуживания с неограниченной очередью, среднее время, проводимое клиентом в очереди. Формула Литтла.
38. Системы массового обслуживания с неограниченной очередью. Определение средней длины очереди
39. Замкнутые системы массового обслуживания.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачет
7 семестр	Разбалловка по видам работ	2 х 1=2 баллов	5 х 1=5 баллов	229 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	2 баллов max	7 балла max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на

самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

ЗАНЯТИЕ № 1. Задачи линейного программирования (ЗЛП)

Задача № 1.1. Составьте математические модели следующих ситуаций.

а. Некий водоём заселяется каждой весной окунями и карасями. Средняя масса окуня составляет 0,8 кг, карася – 0,4 кг. Имеется два вида пищи, ежедневный запас которой поддерживается для первого типа на уровне 500 кг, а второго – 900 кг. Один окунь в среднем за день потребляет 100 г пищи первого типа и 300 г пищи второго типа, для карася соответствующие величины составляют 200 и 100 г. Как следует заселить водоём, чтобы максимизировать суммарную биомассу рыб?

б. При производстве удобрений смешивают в различных соотношениях три химических вещества, а удобрения продаются в упаковках по 10 кг. Три этих вещества стоят соответственно 20, 15 и 5 рублей за киллограмм. В любой смеси должно присутствовать не менее 2 кг первого вещества, а содержание третьего вещества не должно превышать количества второго. Как следует составить смесь, чтобы стоимость упаковки удобрения была минимальной.

в. Средний дневной рацион хищника составляет 10 ед. пищи А, 12 ед. пищи В, 12 ед. пищи С. Эти потребности удовлетворяются двумя видами жертвы. Первый вид даёт 5 ед. пищи вида А, 2 ед. пищи В и 1 ед. пищи С. Для второго вида соответствующие величины составляют 1, 2, и 4 ед. На поимку жертвы первого вида требуется в среднем 3 ед. энергии, а второго – 2 ед. энергии. Поедание какого числа жертв обеспечит хищнику удовлетворение его потребностей с наименьшими затратами энергии?

г. Пища для собак готовится из говядины, конины и печени. 1 кг говядины стоит 150 рублей и содержит 0,2 кг белка и 0,5 кг углеводов. Конина стоит 100 рублей за кг и содержит 0,1 кг белка и 0,6 кг углеводов. Наконец, печень стоит 200 рублей за кг и содержит 0,4 кг улгеводов и 0,3 кг белка. Составить оптимальный рацион для собаки, минимальные потребности которой в углеводах составляют 6 кг углеводов и 3,1 кг белка в месяц.

ЗАНЯТИЕ № 2. Решение задач линейного программирования графическим методом

1. Найти максимальное и минимальное значение целевой функции F при заданной системе ограничений графоаналитическим методом. Указать значения x_1, x_2, … ($x_i \geq 0$) при которых достигаются максимальное и минимальное значение.

а) $F = x_1 + 3x_2$

Система ограничений:
$x_1 + 4x_2 \geq 4$
$x_1 + x_2 \leq 6$
$x_2 \leq 2$.
Ответ: Максимум 10 в точке (4, 2), минимум 3 в точке (0, 1).
б) $F = x_2 - x_1$
Система ограничений:
$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$
$x_1 - 2x_2 - x_4 = 2$
$x_1 + x_2 + x_5 = 5$.
Ответ: минимум (- 2) в точке (2, 0, 0, 0, 3). Максимум 5 в точке (0, 5, 9, 12, 0).
в) (д/з) $F = 4x_1 + x_3$
Система ограничений:
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$3x_1 - x_2 - x_4 = 0$
$2x_2 - x_1 \geq 0$.
Ответ: минимум 4 в точке (0, 0, 4, 0 или (1, 3, 0, 0). Максимум 28/3 в точке (8/3, 4/3, 0, 20/3).
г) (д/з) $F = 2x_1 + 3x_2$
Система ограничений:
$x_2 - 2x_1 + 3 \geq 0$
$x_1 + x_2 \geq 2$
$2x_2 - x_1 \geq 0$.
Ответ: минимум 14/3 в точке (4/3, 2/3). Максимум 7 в точке (2, 1).
д) $F = x_1 + 2x_2$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 \leq 1$
$x_1 - 2x_2 \leq 1$
Ответ: минимум 0 в точке (0, 0). Максимума не существует.
е) $F = x_1 - x_2$
Система ограничений:
$1 \leq x_1 + x_2 \leq 2$
$2 \leq x_1 - 2x_2 \leq 3$
$1 \leq 2x_1 - x_2 \leq 2$.
Ответ: система ограничений противоречива.

***ЗАНЯТИЕ № 3.* Симплексный метод решения ЗЛП**

1. Найти минимум целевой функции F при заданной системе ограничений симплекс-методом. Указать значения переменных x_1, x_2, … ($x_i \geq 0$) при которых достигается минимальное значение.

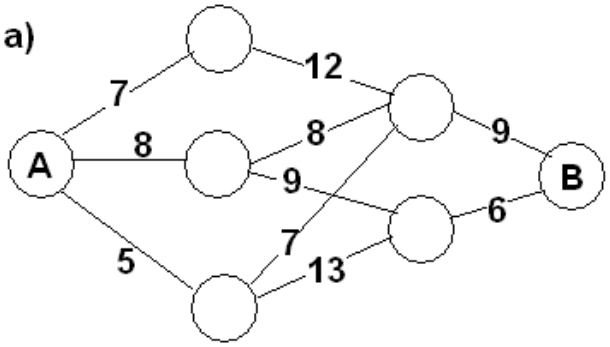
а) $F = x_1 - x_3$
Система ограничений:
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + 3x_2 + x_4 = 2$.
Отв. Минимум 3, в точке (0, 1, 3, 0).
б) $F = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$
Система ограничений:
$x_1 + x_4 + 6x_6 = 9$
$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2$
$x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6$
Отв. Минимум (-5), в точке (0, 5, 1.5, 0, 0, 1.5).
в) (д/з)$F = 5x_1 - 10x_2$

Система ограничений:
$-2x_1 + x_2 \le 1$
$-x_1 + x_2 \le 2$
$3x_1 + x_2 \le 8$
$-2x_1 + 3x_2 \ge -9$.
Отв. Минимум – 27,5 в точке (1.5, 3.5).
г) (д/з) $F = x_1 - x_2 - 4x_3 + 5$
Система ограничений:
$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 6$
$2x_1 + x_2 - x_3 \le 8$.
Отв. Минимум – 15 в точке (0, 0, 5) или (0, 3, 2).
д) $F = 3 + 4x_1 + 5x_2 - x_3$
$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 4$
$3x_2 - 2x_1 + x_3 \le 5$
$2x_1 - 3x_2 \le 3$
Отв. Минимум 1, (0, 0, 2, 0, 3, 9).
е) $F = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 + x_3 = 10$
$2x_1 - x_3 + x_4 \le 5$.
Отв. Минимум не существует.
2. Найти максимум целевой функции F при заданной системе ограничений симплекс-методом. Указать значения переменных x_1, x_2, … ($x_i \ge 0$) при которых достигается максимальное значение.
а) $F = x_1 + x_2$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 \le 1$;
$x_2 - x_3 \le 1$
$x_1 + x_3 \le 2$.
Отв. Максимум 3 в точке (2, 1, 0).
б) $F = 2x_1 - x_3 + x_4$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 10$
$x_1 - x_3 + 2x_4 \le 8$. Отв. Максимального значения нет.

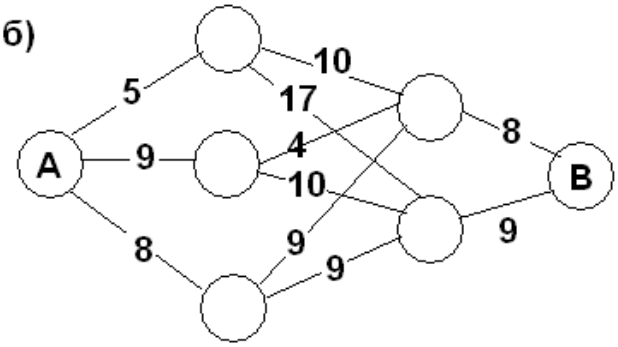
ЗАНЯТИЕ № 4. Общая характеристика методов динамического программирования

1. Дана транспортная схема (расстояния между соседними узлами указаны числами в км).

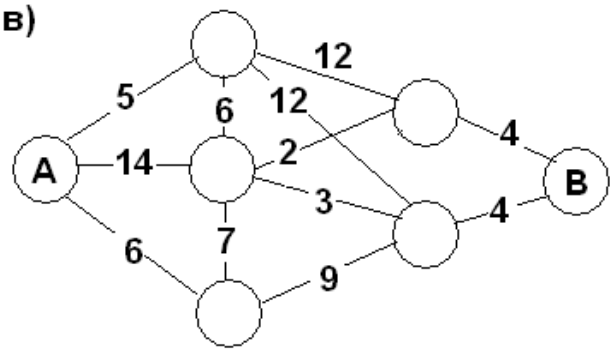
а)



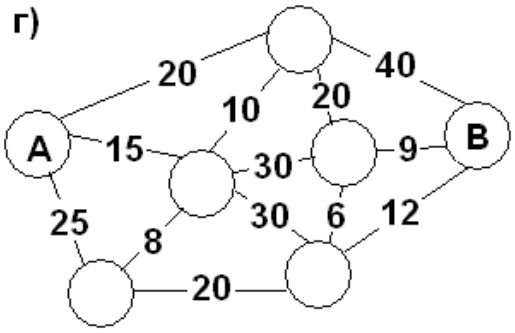
б)



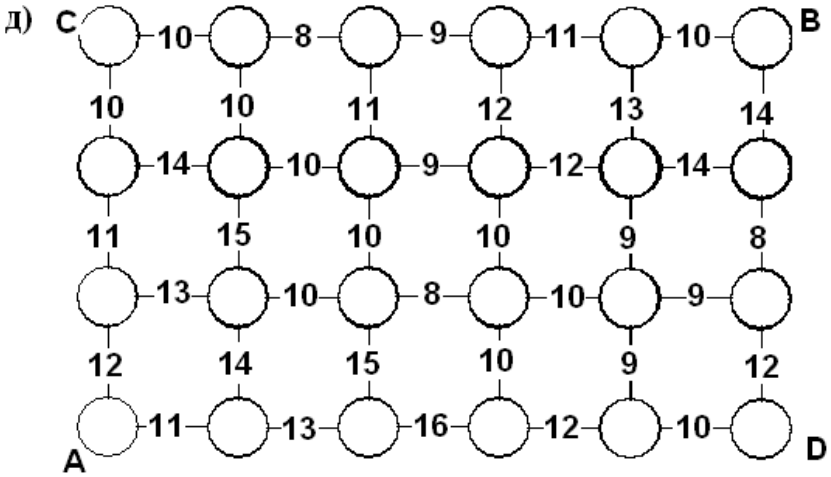
в)



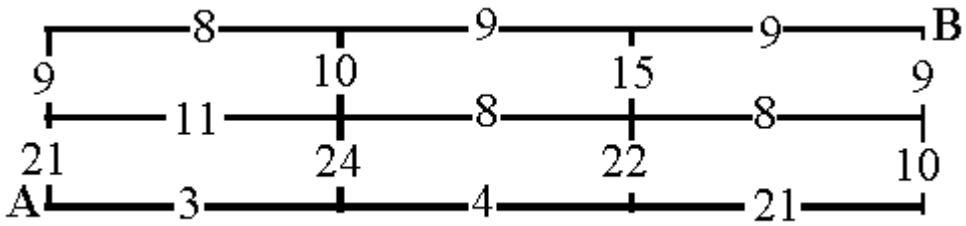
г)



д)



е)



Найдите длину кратчайшего маршрута от пункта А до пункта В.

2. Пусть на схеме указано количество достопримечательностей на данном маршруте. Составьте экскурсионный маршрут от А до В максимизирующий количество достопримечательностей, встречающихся по дороге.

2. Некоторая туристическая фирма оценивает потребности в гидах следующим образом: на май месяц – 5 человек, на июнь – 6 человек, на июль – 8 человек, на август – 4 человека, на сентябрь 6 человек. Содержание избытка рабочей силы обходится фирме в 300 $ в месяц за каждого лишнего человека, а наём рабочих на протяжении месяца обходится в 400 $ в месяц (за объявление о найме) плюс 200 $ в месяц за человека (на

обучение). Составьте оптимальный план найма рабочих, позволяющий минимизировать расходы по найму.

3. (д/з) Подрядчик оценивает минимальные потребности в рабочей силе на каждую из 5 следующих недель: а) 5, 7, 8, 4 и 6 рабочих соответственно. Содержание избытка рабочей силы обходится в 300 долларов в неделю, а наём рабочих на протяжении недели обходится в 400 $ (за объявление о найме) плюс 200 $ за каждого рабочего в неделю. Составьте оптимальный план найма рабочих, позволяющий минимизировать расходы по найму.

б) решить ту же задачу, если потребности в рабочей силе составят 6, 5, 3, 6 и 8.

В таблице указан доход, который приносят предприятия при инвестировании в них сумм, указанных в левом столбце. Составьте оптимальный план распределения капиталовложений между тремя предприятиями, при котором будет достигнут максимальный доход.

а) Имеется капитал 10 тыс. долларов

Объём капиталовложений (тыс. долларов)	Доход (тыс. руб.)				
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4	Предприятие 5
1	1,5	2,1	1,6	1,3	1,4
2	3,1	3,5	3,1	3,6	3,2
3	6,4	6,2	6,3	6,4	6,3
4	8,0	7,8	7,4	7,4	8,0
5	9,5	9,5	9,6	9,2	9,5
6	11,8	12,9	11,7	11,5	13
7	11,8	12,9	11,7	11,5	13,5
8	11,8	12,9	11,7	11,5	13,5

б) Имеется капитал в 400 тысяч рублей.

Объём капиталовложений (тыс. руб.)	Доход (тыс. руб.)		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
100	71	75	81
200	157	168	162
300	246	243	243
400	324	322	321

Ответ. вложить 200 тыс. во второе и 200 тыс. в третье. Прибыль 330 тыс.

7. Пусть в фирме работает n сотрудников равной квалификации. каждому из которых (либо несколькими одновременно) можно поручить выполнение некоторых видов работ (заказов). Доходность от выполнения заказа меняется, в зависимости от того, сколько сотрудников одновременно задействовано в его выполнении. Эти изменения не линейны и заданы с помощью таблиц (то, что начиная с некоторого количества доходность перестаёт возрастать означает, что выполнение данного заказа не требует столь большого количества сотрудников). Составьте оптимальный план распределения сотрудников, при котором обеспечен максимальный доход:

Занятие № 5. Модель хищник жертва.

Постройте с помощью программы *Excel* графики численности жертв и хищников в модели «хищник – жертва»:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \lambda y$$

а) при $\alpha = 20$, $\beta = 0{,}3$, $\gamma = 0{,}2$, $\lambda = 10$, начальном количестве жертв $x_0 = 40$ и начальном количестве хищников $y_0 = 50$, шаг интегрирования $h = 0{,}001$, результат сравните с графиком при $h = 0{,}002$.

б) при $\alpha = 20$, $\beta = 0{,}3$, $\gamma = 0{,}2$, $\lambda = 30$, начальном количестве жертв $x_0 = 300$ и начальном количестве хищников $y_0 = 100$, шаг интегрирования $h = 0{,}001$. Какова численность жертв на втором пике их численности? Какова численность хищников в тот же момент времени? Какова численность хищников на втором их пике? Результат сравните с графиком при $h = 0{,}003$.

в) при $\alpha = 40$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\lambda = 100$, начальном количестве жертв $x_0 = 100$ и начальном количестве хищников $y_0 = 50$, шаг интегрирования $h = 0{,}001$. Какова численность жертв и хищников на вторых пиках их численности?

г) при $\alpha = 20$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\lambda = 100$, начальном количестве жертв $x_0 = 100$ и начальном количестве хищников $y_0 = 50$, шаг интегрирования $h = 0{,}001$.

д) сравните результаты вычислений при двукратном уменьшении всех параметров задачи (в) по отдельности (например, провести расчеты при $\alpha = 20$ и сравнить их с результатами при $\alpha = 40$, остальные параметры оставить без изменений), сделайте выводы.

Групповое интерактивное задание (ОС-2)

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Соколов Г.А. Линейные целочисленные задачи оптимизации : учеб. пособие. — М. : ИНФРА-М, 2020. — 132 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=1106387)
2. Малугин В. А. Количественный анализ в экономике и менеджменте: Учебник / Малугин В.А., Фадеева Л.Н. - М.:НИЦ ИНФРА-М, НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 615 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=558504)
3. Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н. Методы оптимальных решений. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 384 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=521453)
4. Вентцель (И. Грекова), Е.С. Введение в исследование операций : [16+] / Е.С. Вентцель (И. Грекова). – Москва : Издательство Советское радио, 1964. – 392 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=473745

Дополнительная литература

1. Рыков В.В. Основы теории массового обслуживания (Основной курс: марковские модели, методы марковизации) : учебное пособие / В.В. Рыков, Д.В. Козырев. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 223 с. (Режим доступа. - URL: https://znanium.com/catalog/product/129032)
2. Измаилов А. Ф., Солодков В. М. Численные методы оптимизации М: Физматлит, 2008. – 320 с. (http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=69317)
3. Колемаев В.А. Математические методы и модели исследования операций: учебник. - М: Юнити-Дана, 2015. – 592 с. (Электронный ресурс: «Университетская библиотека онлайн», режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=114719
4. Белько И.В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование: учебное пособие / И.В. Белько, И.М. Морозова, Е.А. Криштапович. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 299 с. : ил. — (Высшее

образование: Бакалавриат). - URL: https://znanium.com/catalog/product/1862599 (https://znanium.com/read?id=395044)
5. Горбовцов Г.Я. Исследование операций в экономике: учебное пособие М.: Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2006. – 117 с. (Электронный ресурс: «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=90615

– **Интернет-ресурсы**

– ЭБС ZNANIUM.COM http://znanium.com
– ЭБС «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru
– Электронная библиотека http://lib.mexmat.ru/books/75829 (свободный доступ)
– Электронная библиотека http://www.razym.ru (свободный доступ)