Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической
работе
_____ С.Н. Титов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Программа учебной дисциплины Предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Макеева О.В., к.ф-м.н., доцент
кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория вероятностей с элементами теории случайных процессов» входит Предметно-методический модуль обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин «Теоретический и прикладной математический анализ», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Аналитическая геометрия в пространстве», «Основы математической обработки информации».

Результаты изучения дисциплины являются необходимыми для изучения дисциплин: «Теория и методика обучения математике», «Стохастические динамические системы» и прохождения практик: Производственная (педагогическая) преподавательская практика по математике 1 и Производственная (педагогическая) преподавательская практика по математике 2.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины «Теория вероятностей с элементами теории случайных процессов» является подготовка бакалавра к работе учителем математики и экономики в общеобразовательной школе. Дисциплина предназначена дать будущим учителям профессиональную (теоретическую и практическую) подготовку в области теории и методики обучения математике и экономике на различных ступенях общеобразовательной школы.

Задачей освоения дисциплины является формирование целостного представления о стохастической природе окружающего мира, изучение специфических закономерностей случайных явлений, овладение вероятностно-статистическими методами обработки информации; формирование и развитие компетенций будущего учителя математики и экономики в теории и практике моделирования стохастических явлений, возникающих в различных областях естествознания.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Теория вероятностей с элементами теории случайных процессов» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11. Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в	ОР-1. Знает конструкции и схемы комбинаторных методов решения исследовательских задач. ОР-3. Знает конструкции	ОР-2. Умеет использовать возможности комбинаторного анализа в исследовательской деятельности. ОР-4. Умеет использовать	

соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования. ПК-11.1. Знает основные научные понятия и особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач. ПК-11.2. Умеет самостоятельно и в составе научного коллектива решать конкретные задачи профессиональной деятельности; самостоятельно и под научным руководством осуществлять сбор и обработку информации; способен применять полученные знания для объяснения актуальных проблем и тенденций	вероятностных методов решения исследовательских задач. ОР-5. Знает конструкции статистических методов решения исследовательских задач.	возможности стохастического моделирования в исследовательской деятельности. ОР-6. Умеет использовать возможности выборочного метода в исследовательской деятельности.	

развития предмета; проводить исследовательскую работу в соответствии с индивидуальным планом.			
ПК-6. Способен выявлять и формировать культурные потребности различных социальных групп. ПК-6.1. Изучает потребности различных социальных групп в культурно-просветительской деятельности. ПК-6.2. Использует различные средства, методы, приемы и технологии формирования культурных запросов и потребностей различных социальных групп.	ОР-7. Знает о прикладном характере вероятностных моделей и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-9. Знает о прикладном характере статистических моделей и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся.	ОР-8. Умеет осмысливать прикладной характер вероятностных моделей как дидактического материала для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-10. Умеет осмысливать прикладной характер статистических моделей как дидактического материала для формирования просветительских запросов обучающихся.	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
7	4	144	24	40	-	53	экзамен
Итого:	4	144	24	40	-	53	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
7 семестр					
1.	Элементы комбинаторики		3		6
2.	Случайные события	6	9	–	10
3.	Случайные величины	8	12	–	12
4.	Основы математической статистики	4	6	–	12
5.	Элементы теории случайных процессов	6	10		13
	Итого	**24**	**40**	**–**	**53**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Раздел 1. Элементы комбинаторики

Теория вероятностей и математическая статистика, основные задачи и методы исследования, краткий исторический экскурс.

Комбинаторика. Правило суммы и правило произведения. Генеральная и выборочная совокупность, выборка без повторений, выборка с повторениями. Комбинаторные объекты: размещения, сочетания, перестановки. Формулы для подсчета числа комбинаций для выборок без повторений и выборок с повторениями. Общая схема решения комбинаторных задач.

Раздел 2. Случайные события.

Тема 1. Основные понятия теории вероятностей. Классическое, геометрическое, статистическое и аксиоматическое определение вероятности.

Классификация событий. Классическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятностной меры. Схема Лапласа.

Тема 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Понятие суммы событий, понятие условной вероятности. Теоремы сложения вероятностей (для совместных и несовместных событий), теоремы умножения

вероятностей (для зависимых и независимых событий). Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Приложения формулы полной вероятности.

Тема 3. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы схемы Бернулли. Наиболее вероятное число «успехов».

Схема независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли). Формула Бернулли. Наиболее вероятное число «успехов». Предельные теоремы схемы Бернулли: теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа, теорема Бернулли. Последовательность зависимых испытаний.

Раздел 3. Случайные величины.

Тема 4. Дискретные случайные величины.

Определение случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины и функция распределения вероятностей. Числовые характеристики дискретных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты k–го порядка; мода, медиана. Примеры дискретных законов распределения: биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое распределение, распределение Пуассона.

Тема 5. Непрерывные случайные величины.

Непрерывные случайные величины: функция распределения и плотность распределения вероятностей. Вероятность попадания случайной точки в промежуток. Числовые характеристики непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты k–го порядка; мода, медиана, асимметрия, эксцесс. Примеры распределений непрерывных случайных величин: равномерное, нормальное, показательное распределение.

Тема 6. Многомерные случайные величины.

Понятие о многомерных случайных величинах. Закон распределения и функция распределения дискретной двумерной случайной величины, законы распределения одномерных компонентов и их условных распределений. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной двумерной случайной величины. Вероятность попадания в полуполосу, в прямоугольник. Числовые характеристики одномерных компонентов двумерной случайной величины и их условных распределений: математическое ожидание, дисперсия; функция регрессии. Зависимые и независимые случайные величины, стохастическая зависимость между величинами, линия регрессии. Ковариация и коэффициент корреляции.

Тема 7. Закон больших чисел.

Понятие закона больших чисел в узком и широком смысле. Значение закона больших чисел. Лемма, неравенство и теорема Чебышева; теоремы Бернулли и Пуассона. Центральная предельная теорема, теорема Ляпунова.

Раздел 4. Основы математической статистики

Тема 8 Выборочный метод в математической статистике.

Первичная обработка (ранжирование, группировка, построение вариационного ряда) и представление статистических данных (полигон, гистограмма, кумулятивная кривая); эмпирическая функция распределения. Концепция и задача выборочного метода. Виды выборок (собственно случайная, механическая, типическая, серийная выборка) и способы отбора данных (повторный и бесповторный отбор). Понятие статистической оценки параметров, свойства оценок (несмещённость, эффективность и состоятельность оценки, точность и надёжность оценки). Понятие о методах нахождения оценок (метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод наименьших квадратов). Точечные и интервальные оценки параметров распределения. Точеные оценка генеральной доли, генеральной средней, генеральной дисперсии для бесповторной и повторной выборки.

Доверительные интервалы для оценки генеральной доли, генеральной средней и генеральной дисперсии для выборок разных объёмов.

Тема 9. Проверка статистических гипотез и статистические методы изучения зависимостей.

Принцип практической уверенности. Статистические гипотезы и общие идеи их проверки (простая и сложная гипотезы, основная и альтернативная гипотезы, статистический критерий, область отклонения и область принятия гипотезы, ошибки первого и второго рода, уровень значимости и мощность критерия, односторонние и двусторонние критерии, принцип проверки статистической гипотезы). Параметрические и непараметрические критерии. Проверка гипотез о равенстве числовых характеристик генеральных совокупностей: исключение грубых ошибок наблюдений; сравнение долей признака двух совокупностей; сравнение дисперсий двух совокупностей. Проверка гипотез о числовых значениях параметров: о значении математического ожидания; о значении дисперсии. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции и построение доверительного интервала значимого коэффициента корреляции.

Раздел 5. Элементы теории случайных процессов

Тема 10. Случайные процессы.

Определение случайного процесса (случайной функции). Характеристики случайных процессов: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, корреляционная функция, нормированная корреляционная функция. Марковские случайные процессы (случайные процессы без последствий). Цепи Маркова (марковские случайные процессы с дискретными состояниями). Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Тема 11. Элементы теории массового обслуживания.

Система массового обслуживания и процесс ее работы. Предмет теории массового обслуживания. Одноканальные и многоканальные СМО. СМО с отказами и с очередью. Процесс работы СМО.

Поток событий. Интенсивность потока. Регулярные потоки. Стационарные потоки. Поток без последствия. Ординарный поток. Простейший (стационарный пуассоновский) поток событий. Показательное распределение интервала времени между двумя соседними произвольными событиями простейшего потока. Граф состояний. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Предельные вероятности состояний.

Тема 12. Примеры систем массового обслуживания.

Процесс гибели и размножения. Граф состояний. Уравнения для предельных вероятностей состояний.

СМО с отказами. Одноканальная СМО с отказами. Граф состояний. Интенсивность потока заявок и интенсивность потока обслуживаний. Пропускная способность СМО и вероятность отказа. Многоканальная СМО с отказами. Задача Эрланга отыскания предельных вероятностей состояний и показателей эффективности системы.

Метод Монте-Карло (метод статистических испытании) анализа работы СМО.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение

новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме подготовки к устным выступлениям (комментирование решения задач домашних заданий, итоговой контрольной работы, творческого задания; доклады по темам индивидуальных и групповых проектов, рефератов).

Примерное содержание итоговой контрольной работы

1. Сколько можно составить шестизначных телефонных номеров, у которых на первых двух местах стоит цифра 6, а на остальных – любая из цифр 0,1,…,9?
2. Из букв разрезной азбуки составили слово «математика». Найдите вероятность того, что извлеченные наугад 3 буквы образуют в порядке выбора слово «том».
3. Найдите вероятность того, что точка, брошенная наугад в эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$, попадет в круг $x^2+y^2\le 4$.
4. Имеется колода из 52 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают 4 карты. Какова вероятность, что среди них будет хотя бы две дамы?
5. 70% деталей, поступающих на сборку, изготовлены станком, дающим 2% брака, а 30% - автоматом, дающим 5% брака; наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена первым автоматом?
6. Монету бросают пять раз. Найдите вероятность того, что герб выпадет не менее четырех раз.
7. Найдите вероятность того, что событие *A* наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.
8. Вероятность рождения мальчика 0,515. Чему равна вероятность того, что среди 60 новорожденных менее 50 мальчиков?
9. Найдите математическое ожидание, дисперсию случайной величины X – числа выпадений количества очков, кратного трём, в сумме на двух костях, если кости были брошены 4 раза.

10. Составьте закон распределения случайного числа отказавших элементов устройства, состоящего из трёх независимо работающих элементов, вероятность отказа каждого из которых в одном опыте равна 0,1. Найдите функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.
11. Абсолютно непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le -1; \\ -0{,}25(x^2 - 2x + c) & при \; -1 < x \le 1; \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Найдите значение параметра с, плотность вероятности и математическое ожидание случайной величины.
12. Случайная величина распределена равномерно на отрезке [1;4]. Найдите функцию распределения и постройте её график.
13. Дискретная двумерная случайная величина (X, Y) задана законом распределения. Найдите безусловные законы распределения составляющих. Найдите условный закон распределения составляющей Y, при условии, что X=2.

Y	X		
	2	5	14
1	0,21	0,14	0,19
7	0,13	0,22	0,11

14. Задана совместная двумерная плотность случайной величины (X, Y): $\varphi(x, y) = \dfrac{1}{(1+x^2)(4+y^2)}$. Найдите функции распределения $F(x, y)$.
15. Распределение 50 рабочих механического цеха по тарифному разряду представлено в таблице/

Тарифный разряд	x_i	1	2	3	4	5	6
Частота (количество рабочих)	n_i	2	3	6	8	22	9

Найдите несмещённую и состоятельную оценку доли рабочих, имеющих не менее чем четвёртый квалификационный разряд.
16. На основании выборочных наблюдений производительности труда у 20 работниц установлено, что среднее квадратичное отклонение суточной выработки составляет 15 метров ткани в час. Предполагая, что производительность труда работницы имеет нормальное распределение, найдите границы, в которых с надёжностью 90% заключены генеральная дисперсия и квадратичное отклонение суточной выработки работниц.
17. Фирма поставляет радары для измерения скорости движения автомобилей. Для закупки большой партии проведены испытания приборов, изготовленных на заводе А и заводе Б. Измерения проводили на одной и той же машине и одной и той же дороге. Определены величины отклонений между показаниями спидометра автомобиля и радара:

Завод А

Отклонение, км/ч	Δx_i	-0,7	-0,3	-0,1	0,5	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3
Число измерений	n_i	5	4	2	6	3	1	3	1	1

Завод Б

Отклонение, км/ч	Δy_i	-0,6	-0,1	0,4	0,7	1,0	1,4
Число измерений	m_i	4	5	3	2	2	1

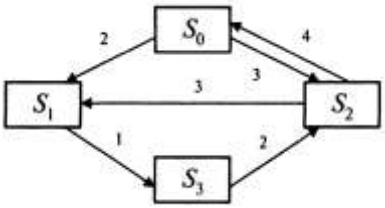
Полагая показания спидометра эталоном и считая отклонения в показаниях радаров нормально распределенными случайными величинами X и Y, проверьте гипотезу об одинаковой точности измерений, проводимых радарами завода А и завода Б, на уровне значимости 0,1.

18. Фирма – изготовитель женских украшений, выпустив новый товар, утверждает, что 40% покупателей купят эти украшения. В ходе 10-дневной рекламной распродажи были получены данные о количестве покупателей нового вида товара.

x_i	13%	27%	30%	39%	42%
n_i	4	2	2	1	1

На 5%-м уровне значимости оцените утверждение представителя фирмы – изготовителя украшений.

19. Случайный процесс определяется формулой $X(t) = Xe^{-t}(t > 0)$, где X – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ^2. Найдите математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию и нормированную корреляционную функцию случайного процесса.
20. Пассажир выходит на остановку автобуса в некоторый момент времени, никак не связанный с расписанием движения. Автобусы следуют друг за другом регулярно с интервалом времени длины *l*. Найти закон распределения времени T, которое придется пассажиру ждать автобуса, и выразить его характеристики через интенсивность потока автобусов λ.
21. Постройте граф состояний системы S, представляющей собой лампочку, которая в случайный момент времени либо включена, либо выключена, либо выведена из строя.
22. Найдите предельные вероятности для системы S по графу состояний.



23. Рассматривается круглосуточная работа пункта профилактического осмотра автомашин с одним каналом (группой проведения осмотра). На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 0,5 ч. На осмотр поступает в сутки в среднем 36 машин. Потоки заявок и обслуживаний - простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра не застает канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Определите предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания пункта профилактического осмотра.
24. Рассматривается круглосуточная работа пункта профилактического осмотра автомашин с n=4 каналами (группами проведения осмотра). На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 0,5 ч. На осмотр поступает в сутки в среднем 36 машин. Потоки заявок и обслуживаний - простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Найдите минимальное число каналов, при котором относительная пропускная способность пункта осмотра будет не менее 0,9.

Примерный перечень тем рефератов

1. Вероятностные модели в страховании.
2. Задачи и методы дисперсионного анализа.
3. Информация и энтропия.
4. Линейные регрессионные модели финансового рынка.
5. Мартингалы и их применение.
6. Нелинейная регрессия.
7. Производящие и характеристические функции и их применение.
8. Процессы гибели и размножения.
9. Теоремы о случайных блужданиях на решетке.
10. Цепи Маркова и их применения.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: материалы самостоятельных работ, итоговой контрольной работы / реферата. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
1.	**Оценочные средства для текущей аттестации** ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2 Самостоятельная работа ОС-3 Самостоятельная работа ОС-4 Самостоятельная работа ОС-5 Самостоятельная работа ОС-6 Самостоятельная работа ОС-7 Самостоятельная работа ОС-8 Самостоятельная работа ОС-9 Самостоятельная работа ОС-10 Самостоятельная работа	ОР-1. Знает конструкции и схемы комбинаторных методов решения исследовательских задач. ОР-2. Умеет использовать возможности комбинаторного анализа в исследовательской деятельности. ОР-3. Знает конструкции вероятностных методов решения исследовательских задач. ОР-4. Умеет использовать возможности стохастического моделирования в исследовательской деятельности. ОР-5. Знает конструкции статистических методов решения исследовательских задач.

	ОС-11 Итоговая контрольная работа / Реферат	ОР-6. Умеет использовать возможности выборочного метода в исследовательской деятельности. ОР-7. Знает о прикладном характере вероятностных моделей и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-8. Умеет осмысливать прикладной характер вероятностных моделей как дидактического материала для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-9. Знает о прикладном характере статистических моделей и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-10. Умеет осмысливать прикладной характер статистических моделей как дидактического материала для формирования просветительских запросов обучающихся.
2.	**Оценочные средства для промежуточной аттестации** ОС-12 Экзамен в форме устного собеседования	

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Теория вероятностей с элементами теории случайных процессов».

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-12 Экзамен в форме устного собеседования

Программа экзамена

Раздел 1. Элементы комбинаторики

1. Предмет и основные задачи теории вероятностей и математической статистики.
2. Комбинаторика, основные привила и объекты, вычислительные формулы. Схема решения комбинаторных задач.

Раздел 2. Случайные события

3. Классификация событий. Полная группа событий. Противоположные события.
4. Классическое, геометрическое и статическое определение вероятности.
5. Пространство элементарных событий. Аксиомы теории вероятностей. Свойства вероятности.
6. Совместные и несовместные события. Сумма событий. Теоремы сложения вероятностей.

7. Зависимые и независимые события. Произведение событий. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий.
8. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
9. Схема независимых повторных испытаний. Формула Бернулли. Предельная формула Пуассона.
10. Наиболее вероятное число успехов. Среднее число успехов.
11. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Свойства и график функции Гаусса.
12. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа. Свойства функции Лапласа.

Раздел 3. Случайные величины

13. Определение случайной величины. Закон распределения вероятностей.
14. Примеры дискретных распределений случайной величины (биномиальное, распределение Пуассона, геометрическое, гипергеометрическое).
15. Функция распределения и её свойства. Функция распределения дискретной случайной величины.
16. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей и её свойства.
17. Связь интегральной и дифференциальной функций распределения.
18. Примеры абсолютно непрерывных распределений (равномерное, показательное, нормальное).
19. Математическое ожидание случайной величины и его свойства. Вычисление математического ожидания дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин.
20. Дисперсия случайной величины и её свойства. Среднее квадратичное отклонение. Вычисление дисперсии дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин.
21. Мода и медиана, начальные и центральные моменты, асимметрия, эксцесс случайных величин.
22. Многомерные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятности двумерной случайной величины, свойства.
23. Вероятность попадания двумерных случайных величин: в полуполосу, в прямоугольник, в произвольную область.
24. Законы распределения составляющих двумерной случайной величины и их числовые характеристики.
25. Условные законы распределения составляющих двумерной случайной величины и их числовые характеристики.
26. Зависимые и независимые случайные величины. Условия независимости дискретных и абсолютно непрерывных величин.
27. Условные математические ожидания. Регрессия случайных величин.
28. Ковариация, коэффициент корреляции случайных величин, их свойства и вычисление.
29. Коррелированность случайных величин.
30. Линейная регрессия. Уравнение прямой линии регрессии.
31. Закон больших чисел. Лемма, неравенство и теорема Чебышёва. Теоремы Бернулли и Пуассона.
32. Сходимость по вероятности. Центральная предельная теорема Ляпунова и её следствие.

Раздел 4. Основы математической статистики

33. Вариационные ряды и их виды. Графическое представление вариационного ряда (полигон и гистограмма). Эмпирическая функция распределения и её график.
34. Выборочные числовые характеристики статистического распределения: средние величины и показатели вариации.

35. Генеральная и выборочная совокупность. Основная идея выборочного метода.
36. Понятие статистической оценки. Требования к оценкам. Несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.
37. Методы нахождения точечных оценок параметров распределений.
38. Интервальные оценки. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения а) при известной дисперсии; б) при неизвестной дисперсии. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения.
39. Принцип практической уверенности. Статистическая гипотеза. Основная и конкурирующая гипотезы. Типы гипотез.
40. Статистический критерий. Уровень значимости и мощность критерия. Ошибки первого и второго рода.
41. Критическая область и область принятия гипотезы. Общая схема проверки статистической гипотезы.
42. Параметрические и непараметрические критерии проверки статистических гипотез. Примеры.
43. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Основные задачи корреляционного и регрессионного анализа.
44. Выборочный коэффициент корреляции, его вычисление, свойства; проверка надёжности.
45. Выборочное уравнение прямой линии регрессии, его вывод и возможности применения.

Раздел 5. Элементы теории случайных процессов

46. Случайные процессы и их характеристики.
47. Марковские случайные процессы и их виды.
48. Системы массового обслуживания, их виды и характеристики.
49. Простейший поток событий. Граф состояний. Предельные вероятности состояний.
50. Процесс гибели и размножения.
51. Одноканальная система массового обслуживания с отказами.
52. Многоканальная система массового обслуживания с отказами.
53. Примеры моделей систем массового обслуживания.
54. Метод Монте-Карло (метод статистических испытании) анализа работы СМО.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования баллов, набранных в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен	Итоговая сумма баллов
$1\times12=12$	$1\times20=20$	272	96	400

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Результат	Баллы (3 ЗЕ)
«отлично»	271-300 баллов
«хорошо»	211-270 баллов
«удовлетворительно»	151-210 баллов
«неудовлетворительно»	0-150 баллов

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Занятие 1-2. Элементы комбинаторики

Материал для освоения

1. Комбинаторный анализ.
2. Правила комбинаторики.
3. Комбинации без повторений и с повторениями.
4. Объекты комбинаторики.
5. Схема решения комбинаторных задач.
6. Визуализация процесса решения комбинаторных задач.

Занятие 2-3. Определение вероятности случайного события

Материал для освоения

1. Вероятность случайного события как мера возможности его наступления. Различные подходы к определению вероятности случайного события.
2. Схема конечного числа равновозможных исходов.
3. Схема бесконечного числа равновозможных исходов.
4. Статистический подход к определению вероятности.

Занятие 4-5. Вероятности сложных событий

Материал для освоения

1. Операции над событиями.
2. Условная вероятность события.
3. Теоремы сложения вероятностей.
4. Теоремы умножения вероятностей.
5. Формула полной вероятности.
6. Формула Байеса.

Занятие 6. Повторные независимые испытания с двумя исходами

Материал для освоения

1. Схема Бернулли.
2. Формула Бернулли.
3. Формула Пуассона.
4. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
5. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Занятие 7-8. Дискретные случайные величины.

Материал для освоения

1. Дискретная случайная величина и закон ее распределения.
2. Многоугольник распределения дискретной случайной величины.
3. Функция распределения дискретной случайной величины и ее график.
4. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Занятие 9. Непрерывные случайные величины.

Материал для освоения

1. Непрерывная случайная величина.
2. Функция распределения непрерывной случайной величины.
3. Плотность вероятности непрерывной случайной величины.
4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Занятие 10-11. Двумерные случайные величины.

Материал для освоения

1. Двумерная случайная величина и закон ее распределения.
2. Функции распределения и плотности вероятности двумерных случайных величин.
3. Числовые характеристики двумерной случайной величины.
4. Распределения компонент случайной величины и условные распределения компонент случайной величины.
5. Зависимость и коррелированность компонент двумерной случайной величины.

Занятие 12. Закон больших чисел.

Материал для освоения

1. Неравенство Маркова.
2. Неравенство Чебышева.
3. Теорема Чебышева.

4. Теорема Бернулли.
5. Теорема Ляпунова.

Занятие 13. Выборочный метод и статистическое оценивание.
Материал для освоения
1. Вариационные ряды и их представление.
2. Полигон и гистограмма.
3. Меры усреднения выборочных данных.
4. Меры вариации выборочных данных.
5. Точные и интервальные оценки параметров генеральной совокупности по выборочным данным.

Занятие 14-15. Проверка статистических гипотез.
Материал для освоения
1. Основная и конкурирующая гипотезы.
2. Ошибки первого и второго рода.
3. Статистический критерий проверки гипотезы.
4. Критическая область и область принятия гипотезы.
5. Уровень значимости гипотезы.
6. Проверка гипотез о числовых значениях параметров генеральной совокупности.

Занятие 16. Случайные процессы.
Материал для освоения
1. Случайные процессы и их характеристики.
2. Марковские случайные процессы (случайные процессы без последствий).
3. Цепи Маркова (марковские случайные процессы с дискретными состояниями).
4. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Занятие 17. Теория массового обслуживания.
Материал для освоения
1. Система массового обслуживания и процесс ее работы.
2. Одноканальные и многоканальные СМО.
3. СМО с отказами и с очередью.
4. Поток событий и его виды.
5. Граф состояний. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.
6. Предельные вероятности состояний.

Занятие 18-19. Примеры систем массового обслуживания.
Материал для освоения
1. Процесс гибели и размножения. Граф состояний. Уравнения для предельных вероятностей состояний.
2. Одноканальная СМО с отказами. Граф состояний. Интенсивность потока заявок и интенсивность потока обслуживаний. Пропускная способность СМО и вероятность отказа.
3. Многоканальная СМО с отказами. Задача Эрланга отыскания предельных вероятностей состояний и показателей эффективности системы.
4. Метод Монте-Карло (метод статистических испытании) анализа работы СМО.

Занятие 20. Итоговая контрольная работа.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Белько, И. В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование: Учебное пособие / Белько И.В., Морозова И.М., Криштапович Е.А. - Москва :НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. - 299 с.
   URL: https://znanium.com/catalog/product/542521
2. Бочаров, П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика [Электронный ресурс] / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. - 2-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 296 с.
   URL: https://znanium.com/catalog/product/405754
3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Матвеев В.И., - 2-е изд. - Москва :НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с.
   URL: https://znanium.com/catalog/product/370899

Дополнительная литература

1. Балдин, К.В. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – 3-е изд., стер. – Москва : Дашков и К°, 2020. – 472 с.
   URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573173
2. Вентцель (И. Грекова), Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель (И. Грекова). – Изд. 4-е, стереотип. – Москва : Наука, 1969. – 564 с.
   URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=458388
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: задачи и упражнения [электронный ресурс] / Е.С. Вентцель (И. Грекова), Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1969. - 363 с.
   URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=458387
4. Хуснутдинов, Р. Ш. Математическая статистика: Учебное пособие / Хуснутдинов Р.Ш. - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 205 с.
   URL: https://znanium.com/catalog/product/1002159