Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
_____ Н.А. Ильина
«30» августа 2016 г.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Программа учебной дисциплины вариативной части
для направления подготовки 01.06.01 Математика и механика
Направленность (профиль): Вещественный, комплексный и функциональный анализ
(очная форма обучения)

Составители:
Штраус В.А., доктор физико-математических наук,
Фолиадова Е.В., кандидат физико-математических наук

Рассмотрено и утверждено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования
(протокол от « 22 » июня 2016 г. № 9).

Ульяновск, 2016

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа дисциплины «Вариационные проблемы и методы в математическом анализе» составлена составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации), утверждённого приказом Министерством образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 года № 866 (зарегистрирован в Минюсте России 25.08.2014 № 33837), и с учебным планом

Цель дисциплины «Вариационные проблемы и методы в математическом анализе» - ознакомление будущих научных работников и преподавателей математики с дополнительными (не входящими в программы педагогических университетов) разделами функционального анализа, необходимыми при изучении различных разделов математики и получении новых научных результатов в этих областях.

Задачи дисциплины:

1) сформировать у аспирантов систему базовых понятий общей теории экстремальных задач; познакомить с важнейшими результатами нелинейного функционального анализа как далеко идущими обобщениями теорем классического математического анализа, с принципами получения этих результатов и способами их применения к некоторым задачам наилучшего приближения, оптимального управления, теории игр, математической физики и др.;
2) формировать умение решать типовые задачи классического вариационного исчисления и некоторые другие бесконечномерные экстремальные задачи известными методами с использованием при их обосновании теории метрических, банаховых, гильбертовых пространств;
3) развивать навыки использования геометрического языка в описании аналитических объектов, умение переводить утверждения с одного математического языка на другой, а также описывать внематематические объекты на подходящем математическом языке;
4) развивать аналитическое мышление, навыки самостоятельного получения и обоснования математических утверждений, общую математическую культуру;
5) подготовить аспирантов к восприятию результатов современных научных исследований в области функционального анализа (монографий, статей в профильных научных журналах), к проведению собственных исследований и представлению их результатов.

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Вариационные проблемы и методы в математическом анализе» относится к дисциплинам по выбору вариативной части блока дисциплин (Б1.В.ДВ.02.1) и изучается в седьмом семестре при очной и заочной форме обучения. Альтернативная дисциплина – «Высокопроизводительные матричные вычисления». Предполагается владение основами нелинейного анализа, например, в объеме дисциплины «Вариационные проблемы и методы» ООП подготовки магистров педагогического образования, профиль «Методология математического образования», по кафедре высшей математики УлГПУ им. И. Н. Ульянова; центральная часть необходимого учебного материала содержится в курсах функционального анализа математических специальностей классических университетов. При изучении дисциплины требуются также знания по теории меры и интеграла, теории аналитических функций (обязательные дисциплины Б1.В.02, Б1.В.10 данной образовательной программы) и уверенное владение стандартными курсами математического анализа и теории дифференциальных уравнений высших учебных заведений с повышенным уровнем математической подготовки.

Знания и умения, полученные при изучении дисциплины «Вариационные проблемы и методы в математическом анализе», используются при изучении оригинальной научной литературы по теме диссертации и проведении самостоятельных исследований. Часть учебного материала входит в программу государственного экзамена (специальный вопрос).

Требования к усвоению дисциплины

Изучение дисциплины «Вариационные проблемы и методы в математическом анализе» направлено на формирование следующих компетенций:

- способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);
- способностью приводить информацию к проблемно-задачной форме, строить математические модели объектов и процессов из различных предметных областей (ПК-3);

В результате изучения курса аспирант должен:

знать

- основные понятия и теоремы дифференциального исчисления операторов в банаховом пространстве (понятия непрерывного, полунепрерывного оператора/функционала, производной оператора/функционала по Фреше и по Гато; связь между дифференцируемостью по Фреше и по Гато; необходимое условие экстремума функционала; понятия потенциального оператора, монотонного оператора, выпуклого оператора; некоторые достаточные условия существования точки экстремума, единственности точки экстремума) вместе с их доказательствами;
- основные результаты классического вариационного исчисления и методы их получения из общей теории экстремумов функционалов;
- важнейшие принципы неподвижной точки (теорема Банаха о сжимающих отображениях, теорема Шаудера);
- основные идеи метода наискорейшего спуска, метода Ритца и метода Галеркина, метода Ньютона-Канторовича;
- конструкции основных пространств функционального анализа, в том числе пространств суммируемых функций, пространств обобщенных функций;
- границы применимости классических результатов и методов и возможности их модификации в более общих ситуациях;
- принципы применения вариационных подходов к различным вопросам функционального анализа (спектральная теория операторов и др.), к проблемам других разделов математики и её приложений;

уметь

- интерпретировать абстрактные определения и теоремы дифференциального исчисления, относящиеся к произвольным нормированным или линейным топологическим пространствам и их отображениям, применительно к объектам классического математического анализа; получать и объяснять результаты классического анализа как частные случаи теорем функционального анализа;
- проводить доказательства некоторых общих результатов нелинейного функционального анализа и рассуждения аналогичного типа в рамках собственных исследований;
- переформулировать задачи на существование, единственность, корректность

решений операторных уравнений в терминах вариационных задач и наоборот ;

- применять изученные прямые и непрямые методы решения вариационных задач в типичных случаях;
- формулировать задачи исследовательского характера в области теории оптимизации, строить модели задач из различных предметных областей в виде задач на экстремум функционала;
- самостоятельно осваивать методы решения новых экстремальных задач, в т.ч. задач теории оптимального управления (детерминированного и стохастического), ;
- выделять генезис, логику возникновения основных идей абстрактного дифференциального исчисления, их роль в построении других разделов математики;

владеть

- языком и символикой теории множеств, вещественного и функционального анализа, навыками оперирования с последовательностями и функциями как с точками абстрактного пространства;
- приёмами построения математических моделей из различных разделов анализа;
- навыками чтения и понимания аутентичной математической литературы по тематике, связанной с теорией экстремальных задач;
- средствами пакетов компьютерной математики для численного решения задач оптимизации, визуализации процесса поиска экстремума и др.

Аспирант **имеет возможность**:

- освоить применение вариационных методов к широкому кругу задач функционального анализа и его приложений, в том числе к нерешенных проблемам;
- уяснить основные идеи построения численных, в том числе стохастических и метаэвристических методов решения экстремальных задач.

Структура и содержание дисциплины «Вариационные проблемы и методы»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы (108 часов): 6 часов – лекции, 12 часов – практическая работа, 90 часов самостоятельной работы. Форма отчетности – зачет.

№ п/п	Раздел дисциплины	**Год обучения** (очная/заочная форма)	**Виды учебной работы, включая самостоятельную работу аспирантов, и трудоемкость (в часах)**			**Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям)* Формы промежуточной аттестации *(по итогам освоения дисциплины)***
			Лекции	Практические занятия	Самостоятель-ная работа	
1	2	3	4	5	6	7
1.	**Вариационные задачи и задачи, решаемые вариационными методами**	4/4	**2**	**-**	**10**	Перечень задач
2.	**Непрямые методы решения вариационных задач.** Необходимое условие экстремума функционала. Условные экстремумы и функционал Лагранжа.		**1**	**2**	**14**	Логическая схема учебного материала (ментальная карта темы)
3.	**Проблема достаточных условий экстремума.** Применение геометри-ческих свойств гильбертовых и банаховых пространств		**1**	**2**	**14**	
4.	**Прямые методы решения вариационных задач.** Метод наискорейшего спуска. Метод Ритца. Метод Ньютона-Канторовича.		**-**	**2**	**12**	Презентация по теме
5.	**Вариационные методы решения операторных уравнений**. Однородные и неоднородные линейные уравнения. Уравнения с потенциаль-ными операторами. Случай монотонного оператора.		**1**	**1**	**10**	Библиографи-ческий список
6.	**Проекционные методы решения операторных уравнений и их связь с вариационными методами.** Методы моментов (Бубнова-Галеркина, Галерки-на-Петрова) и их связь с методом Ритца. Методы коллокации в решении краевых задач для дифференциальных уравнений. Метод наименьших квадратов.		**1**	**1**	**10**	

1	2	3	4	5	6	7
7.	**Стохастические методы в решении вариационных задач.** Методы случайного спуска. Понятие о метаэвристических алгоритмах решения задач оптимизации.	4/4		**2**	**10**	Презентация по теме
8.	**Вариационные методы нахождения спектральных характеристик линейных операторов**			**2**	**10**	Презентация по теме
	Всего		**6**	**12**	**90**	Зачёт

Содержание дисциплины

Вариационные задачи и задачи, решаемые вариационными методами

Классические задачи вариационного исчисления и их связь с задачами математического программирования. Задачи оптимального управления. Основные идеи решения, прямые и непрямые методы. Идея частичного изменения, динамическое программирование Беллмана, принцип максимума Понтрягина.

Проблема существования наименьшего значения функционала: теорема Вейерштрасса в бесконечномерном пространстве (банаховом, гильбертовом). Случай полунепрерывного снизу функционала на компакте в банаховом пространстве. Случай слабо полунепрерывного снизу функционала на слабо компактном множестве в гильбертовом пространстве. Понятие корректности задачи минимизации функционала.

Вариационные принципы в физике. Гамильтониан, функционал действия и энергетические уровни в задачах квантовой физики.

Операторные уравнения и вариационные методы их решения: основные идеи.

Непрямые методы решения вариационных задач. Необходимое условие экстремума функционала. Условные экстремумы и функционал Лагранжа

Необходимое условие экстремума функционала (теорема Ферма). Случай квадратичных функционалов, определенных на пространстве решений линейных динамических систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных параболического и гиперболического типа. Понятие трансверсальности многообразий. Случай функционалов классического вариационного исчисления: уравнение Эйлера, условие Вейерштрасса, условие Лежандра.

Задачи на условный экстремум функционала: функционал Лагранжа, необходимое условие условного экстремума. Различные виды условий связи в задачах классического вариационного исчисления. Изопериметрические задачи в вариационном исчислении.

Гладкие задачи вариационного исчисления с ограничениями в виде равенств и неравенств: необходимые условия второго порядка.

Проблема достаточных условий экстремума. Применение геометрических свойств гильбертовых и банаховых пространств

Достаточные условия (второго порядка) экстремума функционала. Погружение экстремалей в пучки (трубки экстремалей).

Выпуклые функционалы. Сильно выпуклые функционалы. Глобальный характер минимума выпуклого функционала. Условия выпуклости функционалов в терминах монотонности градиента, положительной определенности второго дифференциала, расположения касательной гиперплоскости к графику функционала. Случай квадратичного функционала.

Опорная гиперплоскость и субдифференциал выпуклого функционала. Двойственные экстремальные задачи, теорема Куна-Таккера, связь с вариационным неравенством в случае гильбертова пространства.

Прямые методы решения вариационных задач. Метод наискорейшего спуска. Метод Ритца. Метод Ньютона-Канторовича.

Минимизирующие последовательности функционала и некоторые достаточные условия их сходимости/ слабой сходимости.

Идея метода градиентного спуска, условия сходимости метода для дифференцируемых по Гато функционалов, для дважды дифференцируемых функционалов.

Идея метода Ритца, построение системы Ритца, условия слабой и сильной сходимости метода.

Идея метода Ньютона, условия сходимости приближений Ньютона-Канторовича.

Вариационные методы решения операторных уравнений. Однородные и неоднородные линейные уравнения. Нелинейные уравнения с потенциальными операторами. Случай монотонного оператора.

Однородные и неоднородные линейные операторные уравнения в бесконечномерном пространстве. Связь свойств однородного, неоднородного уравнений и сопряженных уравнений. Корректность задачи. Метод минимизации функционала невязки.

Понятие потенциального оператора в банаховом пространстве. Условия потенциальности оператора. Условия независимости криволинейного интеграла в банаховом пространстве от выбора контура интегрирования. Метод отыскания нулей потенциального оператора как точек экстремума его потенциала. Квадратный корень из оператора, некоторые обобщения метода.

Проекционные методы решения операторных уравнений и их связь с вариационными методами.

Применение теорем о неподвижной точке. Методы моментов (Бубнова-Галеркина, Галеркина-Петрова) и их связь с методом Ритца. Построение систем Галеркина. Методы коллокации в решении краевых задач для дифференциальных уравнений. Метод наименьших квадратов.

Стохастические методы в решении вариационных задач. Метод случайного спуска. Понятие о метаэвристических алгоритмах решения задач оптимизации.

Идея метода случайного спуска. Реализация случайного спуска.

Идея «постоянного улучшения» и ее реализация в алгоритмах оптимизации.

Идея «временного ухудшения» и ее реализация в алгоритмах оптимизации.

Вариационные методы нахождения спектральных характеристик линейных операторов

Граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных: операторная трактовка. Спектральный радиус, границы спектра в случае симметрических линейных операторов с компактной резольвентой. Поиск наименьшего собственного значения.

Образовательные технологии

Выбор образовательных технологий при реализации курса диктуется постановкой следующих педагогических целей:

1) **фундаментальная теоретическая подготовка аспирантов**, расширение математического кругозора, формирование цельной картины современной математики, представления о месте в ней функционального анализа, о его связях с другими разделами математики и с приложениями;
2) **формирование различных компонентов математической деятельности**, в т.ч. навыков чтения и понимания аутентичной математической литературы, выдвижения и проверки математических гипотез, доказательства теорем, выяснения границ применимости алгоритмов решения определенных классов задач и модификации таких алгоритмов в случае необходимости, доказательства правомерности и оценки погрешностей приближенных методов решения задач и т.д.; освоение компьютерных математических сред как одного из инструментов математической деятельности;
3) **формирование навыков профессиональной коммуникации**, в т.ч. ведения математической дискуссии, реферирования математической литературы, составления обзоров по заданной теме, представления новых результатов и др.

Основой методики преподавания дисциплины должен быть мыследеятельностный подход в математическом образовании. При реализации курса используются элементы следующих образовательных технологий:

- продуктивное обучение (образовательный процесс направлен на самостоятельное реконструирование системы знаний по дисциплине);
- контекстное обучение (образовательный процесс погружён в контекст будущей преподавательской и/или исследовательской деятельности аспиранта);
- технология развития критического мышления (образовательный процесс опирается на рефлексивную работу с математическими текстами);
- технологии взаимообучения, кооперативного обучения (в различных организационных формах, в зависимости от численности группы), при возможности – с использованием принципов социально-психологического обучения.

Для достижения указанных целей предполагается использование активных методов обучения, в том числе проблемных лекций, аналога case-технологий на практических занятиях, по возможности - элементов ролевых технологий (генератор идей – критик и т.п.) Предусмотрена большая доля самостоятельной работы исследовательского характера, в частности, ознакомительное или детальное (по выбору аспиранта, в зависимости от тематики его исследовательской работы) знакомство с источниками литературы, содержащими дальнейшее развитие вопросов, включенных в программу (в списке дополнительной литературы отмечены *).

Предлагается включение заданий на установление связей между фрагментами теории и указанными приложениями, на самостоятельный поиск приложений в математической литературе, на составление аннотированных библиографических указателей по предложенной тематике и др. Подразумевается использование компьютерных технологий не только для поиска информации, но и в плане применения пакетов компьютерной математики. Степень использования компьютерных математических сред и конкретный набор инструментов зависит от смещения акцентов в изучении курса на теоретический или численный аспект задач и определяется научными интересами аспиранта.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов

Самостоятельная работа аспирантов имеет основную цель – обеспечить качество подготовки выпускаемых специалистов в соответствии с требованиями основной программы высшего образования – программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по профилю «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

К самостоятельной работе относятся:

- самостоятельная работа на аудиторных занятиях (лекциях, коллоквиумах, практических занятиях);
- внеаудиторная самостоятельная работа.

В процессе обучения предусмотрены следующие виды самостоятельной работы обучающегося:

- работа с конспектами лекций;
- проработка пройденных лекционных материалов по конспекту лекций, учебникам и пособиям на основании вопросов, подготовленных преподавателем;
- написание рефератов по отдельным разделам дисциплины;
- подготовка научных докладов и творческих работ;
- проработка дополнительных тем, не вошедших в лекционный материал, но обязательных согласно учебной программе дисциплины;
- самостоятельное решение сформулированных задач по основным разделам курса;
- работа над проектами;
- изучение обязательной и дополнительной литературы;
- подготовка к текущему и промежуточному контролю знаний.

В целях фиксации результатов самостоятельной работы аспирантов по дисциплине проводится аттестация самостоятельной работы. Контроль результатов самостоятельной работы осуществляется преподавателем в течение всего семестра.

При освоении дисциплины могут быть использованы следующие формы контроля самостоятельной работы:

1) реферат,
2) коллоквиум,
3) тестовый контроль,
4) другие по выбору преподавателя.

Научный руководитель организует самостоятельную работу аспиранта в соответствии с рабочим учебным планом и графиком, рекомендованным преподавателем. Аспирант должен выполнить объем самостоятельной работы, предусмотренный рабочим учебным планом, максимально используя возможности индивидуального творческого и научного потенциала для освоения образовательной программы в целом.

Самостоятельная работа аспирантов может носить репродуктивный, частично-поисковый и поисковый характер. Самостоятельная работа, носящая репродуктивный характер, предполагает, что в процессе работы аспиранты пользуются методическими материалами и методическими пособиями, в которых указывается, в какой последовательности следует изучать материал дисциплины, обращается внимание на особенности изучения отдельных тем и разделов. Самостоятельная работа, носящая частично-поисковый и поисковый характер, нацеливает аспирантов на самостоятельный выбор способов выполнения работы, на развитие у них навыков творческого мышления, инновационных методов решения поставленных задач.

Изучение дисциплины предполагает уверенное владение аспирантом основами теории экстремальных задач в объеме стандартных курсов математических специальностей классических университетов. При этом изучение дисциплины должно включать систематизацию таких базовых знаний. Предполагается самостоятельное освоение аспирантами основной части материала с последующим обсуждением важнейших вопросов с преподавателем. Основой для зачёта по дисциплине должно быть продемонстрированное аспирантом понимание основных результатов теории экстремальных задач, способность разобраться в их обоснованиях, умение выделить систему связей между фрагментами материала, между вариационным исчислением классическим дифференциальным исчислением, между вариационным исчислением и другими разделами математики. Для диагностики таких умений в качестве оценочных средств по дисциплине предлагается разработка ментальных карт и презентаций, представляющих указанные связи и визуализирующих процесс поиска экстремума.

Для анализа организации своей самостоятельной работы аспиранту рекомендуется в письменной форме ответить на предлагаемые вопросы и затем критически проанализировать, насколько эффективно он работает самостоятельно.

Во время самостоятельной работы обучающиеся обеспечены доступом к базам данных и библиотечным фондам, а также доступом к сети Интернет.

Фонд оценочных средств

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости,
для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

№ п/п	КОНТРОЛИРУЕМЫЕ МОДУЛИ, РАЗДЕЛЫ (ТЕМЫ) ДИСЦИПЛИНЫ	НАИМЕНО-ВАНИЕ ОЦЕНОЧНОГО СРЕДСТВА	КОД ФОРМИРУЕМОЙ КОМПЕТЕНЦИИ *общепрофессио-нальные компетенции (ОПК):* ОПК-1	КОД ФОРМИРУЕМОЙ КОМПЕТЕНЦИИ *профессиональные компетенции (ПК):* ПК- 3
1	Тема 1. Вариационные задачи и задачи, решаемые вариационными методами	Перечень задач		
2	Тема 2. Непрямые методы решения вариационных задач	Ментальная карта		
3	Тема 3. Проблема достаточных условий экстремума.			
4	Тема 4. Прямые методы решения вариационных задач.	Презентация по теме		
5	Тема 5. Вариационные методы решения операторных уравнений.	Библиографи-ческий список		
6	Тема 6. Проекционные методы решения операторных уравнений			
7	Тема 7. Стохастические методы в решении вариационных задач	Презентация по теме		
8	Тема 8. Вариационные методы нахождения спектральных характеристик линейных операторов	Перечень задач		
		НАИМЕНОВАНИЕ ОЦЕНОЧНОГО СРЕДСТВА	ОС 1-5	ОС 1-5

ОС-1: Аннотированный перечень задач по теме

Задание: Разработать структурированный по предметным областям и по получаемым математическим моделям перечень задач оптимизации (часть 1), а также математических задач, которые могут быть переформулированы в виде задач оптимизации (часть 2). Привести возможные формулировки задач, тип получаемой экстремальной задачи, возможные подходы к решению, возможную целевую аудиторию. Включить в перечень в том числе типы задач, доступные школьникам профильных математических классов.

ОС-2: Логическая схема материала (ментальная карта)

Задание: Разработать представление содержания материала тем «Непрямые методы решения экстремальных задач. Необходимые условия экстремума», «Проблема достаточных условий экстремума» в виде ментальной карты с помощью одного из сервисов создания ментальных карт. Отразить в схеме внутренние связи учебного материала, а также его связи с классическим дифференциальным исчислением функций одной и нескольких действительных переменных. К отдельным точкам карты прикрепить текстовые документы, содержащие доказательства важнейших результатов, при необходимости – примеры решения типовых задач.

Ментальная карта представляется в электронном виде и хранится в портфолио аспиранта.

ОС-3: Презентация по теме «Прямые методы решения вариационных задач»

Презентация по теме «Стохастические методы решения вариационных задач»

Задание: Разработать презентацию с помощью выбранных программных средств, отразив в ней основное содержание темы. Презентация должна содержать как описание общих принципов построения соответствующих алгоритмов, так и основные этапы их реализации, а также примеры решения задач.

Презентация представляется в электронном виде и хранится в портфолио аспиранта.

ОС-4: Аннотированный библиографический список

Задание: Составить список учебной и научной литературы по темам «Вариационные методы решения операторных уравнений», «Проекционные методы решения операторных уравнений», отразив основное содержание каждого из источников.

Список представляется в электронном виде и хранится в портфолио аспиранта.

ОС-5: Аннотированный перечень задач по теме

Задание: Разработать несколько задач по теме «Вариационные методы нахождения спектральных характеристик линейных операторов». Привести решение одной из задач, кратко охарактеризовать особенности остальных.

Примерные вопросы к зачету

1. Достаточные условия существования наименьшего (наибольшего) значения функционала на множестве банахова пространства, гильбертова пространства.
2. Необходимое условие локального экстремума функционала первого порядка. Применение к задачам математического программирования, к задачам классического вариационного исчисления.
3. Необходимое условие локального экстремума функционала второго порядка. Применение к задачам математического программирования, к задачам классического вариационного исчисления (условие Лежандра.
4. Достаточные условия экстремума функционала в терминах второй производной (второго дифференциала).
5. Достаточные условия экстремума функционала в терминах погружения экстремалей в трубки.
6. Экстремальные задачи с ограничениями и метод множителей Лагранжа. Изопериметрические задачи в вариационном исчислении.
7. Существование и единственность минимума в случае выпуклых функционалов.
8. Теория двойственности в задачах математического программирования и в задачах вариационного исчисления. Теорема Куна-Таккера.
9. Задачи оптимального управления. Принцип минимума Гильберта и принцип максимума Понтрягина. Принцип оптимальности Беллмана.
10. Метод градиентного спуска в решении задач на экстремум функционалов.
11. Метод Ритца в решении задач на экстремум функционалов.
12. Метод Ньютона-Канторовича в решении задач на экстремум функционалов.
13. Методы Бубнова-Галеркина в решении задач на экстремум функционалов.
14. Метод коллокации в решении краевых задач для дифференциальных уравнений.
15. Вариационное неравенство в гильбертовых пространствах и его применение к решнию экстремальных задач.

Критерии формирования зачетной оценки

Цель зачета по дисциплине «Вариационные проблемы и методы в математическом анализе» - проверить усвоение основной проблематики курса, свободное владение терминологией классического математического и функционального анализа, знание ядра изученных в курсе результатов, понимание идей основанных на них алгоритмов, умение проводить доказательные рассуждения, анализировать и критически оценивать фрагменты математических текстов.

Зачет проводится в форме очного собеседования по предложенным теоретическим вопросам и/или фрагментам монографий и актуальных научных публикаций по тематике дисциплины. Собеседование включает задания на проверку истинности утверждений, относящихся к конечномерным и бесконечномерным пространствам, на иллюстрацию утверждений примерами, поиск контрпримеров, оценку возможности и перспективности использования известных методов (в т.ч. вычислительных) при решении предложенных проблем. Разрешается использование справочных материалов.

Оценка «зачтено» ставится, если аспирант продемонстрировал указанные выше знания, умения, качества мышления. Аспиранты, не сдавшие зачет, сдают его повторно в соответствии с графиком, разработанным отделом аспирантуры.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература

1. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972. 416 с. (Библиотека УлГПУ)
2. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: ЛКИ, 2007. – 624 с. (Библиотека УлГПУ)
3. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. - 623 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459742
4. Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. - М. : Издательство Физматлит, 2014. - 522 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468381.
5. Тихомиров, В.М. Оптимальное управление / В.М. Тихомиров, В.М. Алексеев, С.В. Фомин. - М. : Физматлит, 2007. - 192 с. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=67593

Дополнительная литература

1. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации [Текст] : Теория. Примеры. Задачи ; [для мат. спец. вузов] / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. - Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2011. - 256 с. – URL: http://znanium.com/go.php?id=544778
2. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации [Текст] : Теория. Примеры. Задачи ; [для мат. спец. вузов] / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. - Москва : Наука, 1984. - 288 с. (Библиотека УлГПУ)
3. Богатырев А.Б. Экстремальные многочлены и римановы поверхности. М.: МЦНМО, 2005. 173 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63245
4. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг; В.А. Треногин. - Москва : Наука, 1969. - 529 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457129
5. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. (Библиотека УлГПУ) То же: [Электронный ресурс] М.: 1978. 280 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456618
6. Гельфанд И. М. Вариационное исчисление [Текст] : [учебник для университетов]. - Москва : Физматгиз, 1961. - 228 с. (Библиотека УлГПУ) То же: [Электронный ресурс] URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455166
7. Демьянов В. Ф. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление [Текст] . - Москва : Наука, 1990. - 431 с. (Библиотека УлГПУ)
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Москва : Наука, 1984. - 752 с. (Библиотека УлГПУ)
9. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский; П.П. Забрейко. - Москва : Наука, 1975. - 512 с. - (Нелинейный анализ и его приложения). URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456622

10. Михлин С. Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / С.Г. Михлин; Х.Л. Смолицкий. - Москва : Изд-во "Наука", 1965. - 386 с. - (Справочная математическая библиотека).
URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=112178.
11. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Физматлит, 2002. 240 с. (Библиотека УлГПУ)
12. Функциональный анализ / А.Горин и др. – М.: Наука, 1964 с. – 424 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=112181
13. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с. (Библиотека УлГПУ) То же: Электронный ресурс.
URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455164
14. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. – 488 с. (Библиотека УлГПУ)

Информационное обеспечение дисциплины

1. http://www.mathnet.ru/ - Общероссийский математический портал (свободный доступ к полным текстам статей журналов Академиздатцентра "Наука" РАН).
2. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm (библиотека «Мир математических уравнений», книги по математике, математический анализ, функциональный анализ).
3. http://www.mccme.ru – Московский центр непрерывного математического образования.
4. http://ium.mccme.ru/courses.php - Московский центр непрерывного математического образования, библиотека курсов Независимого Московского университета.
5. http://lib.mexmat.ru/books - Электронная библиотека Попечительского совета МГУ.
6. http://math-portal.ru
7. http://reslib.com – Research library
8. http://people.virginia.edu
9. http://projecteuclid.org
10. http://www.springerlink.com
11. http://www.encyclopediaofmath.org
12. http://myweb.facstaff.wwu.edu

Материально-техническое обеспечение дисциплины

Образовательный процесс обеспечивается достаточным аудиторным фондом, оснащенным необходимым учебным оборудованием.

Для проведения лекционных занятий могут быть использованы лекционные аудитории; специализированные лекционные аудитории (оснащенные аудиовизуальными и мультимедийными средствами). Для проведения практических занятий, а также промежуточного и итогового тестирования используются малые аудитории.

Для проведения аудиторных занятий:

Наименование специализированных аудиторий и лабораторий	Перечень оборудования
Аудитория № 417 (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	Посадочные места – 50 Преподавательский стол – 1 шт. Столы ученические двуместные – 14 шт. Столы ученические трехместные – 8 шт. Тумба под компьютер – 1шт. Встроенные шкафы – 2 шт. Стулья – 50 шт. Мультимедийный класс в составе: интерактивная

	система SMART Boaro SB 685. Ноутбук HP Pavilion g6-2364. Доска – 1 шт. Жалюзи – 3 шт. Стул из кожи черный – 1 шт.

Помещения для самостоятельной работы аспирантов:

компьютерные классы (с выходом в Интернет), библиотека (с выходом в Интернет)

Медиацентр (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	73 моноблока, соединённых локальной компьютерной сетью; беспроводная сеть Wi-Fi; стационарный проектор; экран; 5 ЖК-мониторов, 2 ЖК-панели; система видеоконференцсвязи – PolycomHDX6000HD; акустическая система: вокальная аудиосистема и акустические колонки. Секционные столы-18шт.
Читальный зал (электронная библиотека, (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	Ноутбуки 15,6 ACER Packard Bell EasyNote ENTE11HC-B9604G50MNKS 8 шт. Ноутбук Lenovo IdeaPad B590 Intel Pentium Dual-Core B960 2.2Ггц 4G/500G/DVD-RW15.6*/Windows 7 Home -7шт.

Для самостоятельной работы аспирантов: компьютерные классы (с выходом в Интернет), библиотека (с выходом в Интернет)