Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«24» июня 2022 г.

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Программа учебной дисциплины модуля
Задачи повышенной сложности в школьном курсе

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Иностранный язык

(очная форма обучения)

Составитель: Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «25» марта 2022 г. №5

Ульяновск, 2022

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Олимпиадная математика» относится к дисциплинам части· формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) модуля «Задачи повышенной сложности в школьном курсе» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Иностранный язык», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин: Алгебра и теория чисел, Математическая логика, Дискретная математика, Элементарная математика, а также учебной практики по математике .

Результаты изучения дисциплины являются основой для прохождения дисциплин и практик: Числовые системы, Теория вероятностей и основы математической статистики, Научно-исследовательская работа, Подготовки к сдаче и сдача государственного экзамена, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины является подготовка учителя к будущей профессиональной деятельности: формирование способности к преподаванию математики как в обычных общеобразовательных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Задачей освоения дисциплины является подготовка будущего учителя к индивидуальной работе с одаренными детьми, к проведению математических олимпиад и подготовки к ним, а также закрепление умений проводить математические преобразования выражений, закрепление умения проводить строгие абстрактно-логические доказательства, решать задачи повышенной сложности школьного курса математики.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	умеет	Владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации	ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач	ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности

деятельности.			
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач. ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.	ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.	ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Всего		Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Трудоемк.								
	Зач. ед.	Часы	Лекции, час.	Практические занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Лабораторные занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Самостоят. работа, час.	
7	2	72	12	20	-	-	-	40	зачет
Итого:	2	72	12	20	-	-	-	40	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
7 семестр				
Логические и комбинаторные задачи	4	8		10
Алгебраические задачи	4	6		10
Геометрические задачи	-	2		10
Функции и прикладные задачи	4	4		10
Всего по дисциплине:	**12**	**20**	**-**	**40**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

1 Логические и комбинаторные задачи

Элементы математической логики. Применение теоретико-множественных конструкций в олимпиадных задачах. Принцип Дирихле. Задачи на взвешивание. Задачи на истинность утверждений. Нестандартные логические задачи..

2. Алгебраические задачи.

Задачи на делимость, задачи решаемые в целых числах. Задачи на сокращение дробей, на установление остатков от выражений. Преобразование многочленов. Дробно-рациональные выражения. Иррациональные выражения и их упрощение. Задачи с параметром

3. Геометрические задачи

Планиметрические олимпиадные задачи. Стереометрические олимпиадные задачи.
Применение метода координат к решению олимпиадных задач. Задачи на разрезание и раскрашивание. Разные геометрические задачи

4. Функции и прикладные задачи.

Задачи для старших классов с логарифмическими и тригонометрическими функциями. Рекуррентные соотношения и функциональные уравнения. Прикладные задачи экономического содержания. Олимпиадные задачи биологического, физического, лингвистического характера. Задачи на коррекцию.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий.

Контрольная работа.

Примерный вариант

1.Доказать рациональность $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

2.Решить в целых числах уравнение $2x^2 - 11xy + 12y^2 = 17$

3. В парке n аттракционов. В воскресенье парк посетило ровно n детей. Стоимость каждого аттракциона 10 рублей. Каждый ребенок потратил либо 30, либо 160 рублей, при том не все дети потратили денег поровну (один аттракцион можно посетить много раз).

а) Могла ли выручка каждого аттракциона составить 60 рублей?

б) Какое наименьшее количество детей могло быть, если известно, что все аттракционы получили одинаковую выручку?

в) Пусть любые два аттракциона имеют разную выручку (возможно нулевую). Каково наибольшее возможное количество посетивших парк детей?

Групповое интерактивное задание 1.

Составление теста по одному из разделов дисциплины

При помощи системы Moodle (http://do.ulspu.ru), либо любой другой программы по выбору микрогруппой студентов составляются 4 олимпиадных задания в тестовой форме

Принцип Дирихле.
Комбинаторные задачи.
Логические задачи
Задачи на делимость и другие свойства целых чисел.
Текстовые задачи, решаемые без составления уравнений.

Групповое интерактивное задание 2.

Студенты по микрогруппам с использованием материалов, изученных в рамках дисциплины разрабатывают конспект занятия кружка по подготовке к олимпиаде для школьников. Проведение фрагмента занятия.
Возможные темы:
Многочлены
Иррациональные выражения. .
Текстовые задачи.
Функции
Геометрические задачи

Индивидуальное задание

Разработка критериев оценивания одной из олимпиадных задач
Примерный вариант:

Аня и Боря хотят угадать день Рожденья Саши. Саша написала список из 12 дат: 25 января, 26 января, 27 января, 28 февраля, 29 февраля, 25 марта, 29 марта, 30 марта, 26 апреля, 30 апреля. «мой день рождения в один из этих дней», – сказала она. Затем Саша сказала на ухо Ане только месяц, а Боре – только число. Далее происходит следующий разговор:

Аня: «Я не знаю, когда Сашин День рожденья, но я знаю, что Боря тоже не знает»
Боря: «Раньше не знал, а теперь знаю».
Аня: «Теперь и я знаю!»

Когда у Саши день рождения?

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

Глухова Н.В., Фолиадова Е.В. Олимпиадные и исследовательские задачи в общем и профессиональном математическом образовании: учебное пособие для подготовки магистров и бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» физико-математического профиля – Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2018 – 66 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Контрольная работа ОС-2 Интерактивное групповое задание № 1 ОС-3 Интерактивное групповое задание № 2 ОС-4 Индивидуальное задание	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики. ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию. ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-5 Зачет в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости

обучающихся по дисциплине

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Принцип Дирихле
2. Олимпиадные задачи на сочетания
3. Олимпиадные задачи на размещения
4. Олимпиадные комбинаторные задачи геометрического характера
5. Задачи на взвешивание.
6. Логические задачи на делимость
7. Задачи на делимость и принцип Дирихле
8. Метод математической индукции в олимпиадных задачах
9. Применение теоретико-множественных конструкций в олимпиадных задачах.
10. Задачи на истинность утверждений.
11. Нестандартные логические задачи..
12. Задачи на делимость,
13. Текстовые задачи, решаемые в целых числах.
14. Задачи на сокращение дробей,
15. Задачи на нахождение остатков.
16. Задач на преобразование многочленов.
17. Дробно-рациональные выражения.
18. Иррациональные выражения и их упрощение. Задачи с параметром
19. Планиметричесикие олимпиадные задачи.
20. Стереометрические олимпиадные задачи.
21. Применение метода координат к решению олимпиадных задач.
22. Задачи на разрезание и раскрашивание. Разные геометрические задачи
23. Рекуррентные соотношения и функциональные уравнения.
24. Прикладные задачи экономического содержания.
25. Правила составления критериев оценивания.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачет
7 семестр	Разбалловка по видам работ	6 х 1=6 баллов	10 х 1=10 баллов	152 балла	32 балла
	Суммарный макс. балл	6 баллов max	16 баллов max	168 балла max	200 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

	Баллы (2 ЗЕ)
«зачтено»	более 100
«не зачтено»	100 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Практическое занятие № 1. Принцип Дирихле.

№. 1.1.1. В городе 16 школ. В них обучается 6412 школьников. В концертном зале городского Дворца Культуры 400 мест. Доказать, что найдется школа, ученики которой не поместятся в этот зал.

№. 1.1.2. В средней школе 5 классов (с 5-го по 9-ый). В каждом классе учится по 32 человека. Докажите, что найдутся 14 человек, у которых день рожденья в один месяц.

№ 1.1.3. В классе учится 27 школьников, все вместе они знают 109 разных стихотворений. Докажите, что найдется школьник, знающий не менее пяти стихотворений.

№ 1.1.4. В ящике лежат цветные карандаши: 10 красных, 8 синих, 8 зелёных и 4 жёлтых. В темноте берём из ящика карандаши. Какое наименьшее число карандашей надо взять, чтобы среди них заведомо:

а) было не меньше 6 карандашей одного цвета;

б) был хотя бы один карандаш каждого цвета;

в) было бы не меньше 6 синих карандашей?

№ 1.1.5. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

№ 1.1.6. В пакете лежат карточки с различными натуральными числами. Из них, не глядя, вынимают наугад карточки. Какое минимальное количество карточек нужно взять, чтобы разность между числами, написанными на каких-нибудь двух из них, точно делилась на 5?

Домашнее задание:

№ 1.1.7. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками 3 сортов, причем в каждом ящике лежат яблоки одного сорта. Можно ли среди найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?

№ 1.1.8. Докажите, что среди 5 любых человек имеются двое, имеющие среди них одинаковое число знакомых.

№ 1.1.9. В первенстве по футболу участвуют 10 команд, каждые две из которых должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент соревнований найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей .

№ 1.1.10. Каково наибольшее количество разных натуральных чисел, не больших 10, которые можно взять так, чтобы среди них не нашлось двух, одно из которых точно вдвое больше другого.

№ 1.1.11. Верно ли, что среди любых 30 разных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два, одно из которых точно в два раза больше другого.

№ 1.1.12. Доказать, что для каждого натурального n найдется такое число, которое состоит только из нулей и пятерок, которое делится на n.

Практическое задание № 2. Комбинаторные задачи

№ 1.2.1. Сколько чисел от 1 до 100 не делятся ни на 5, ни на 7?

№ 1.2.2. Сколько существует трёхзначных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания?

№ 1.2.3. Сколько существует четырёхзначных чисел, состоящих из чётных цифр, в которых ни одна из цифр не может повторяться?

№ 1.2.4. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «университет»?

№ 1.2.5. В фирме 5 инженеров, 4 связиста и 2 водителя. Сколькими способами можно составить группу из инженера, связиста и водителя?

№ 1.2.6. Имеется 6 электриков, 5 сантехников и 3 сварщика. Сколькими способами можно направить бригады на 3 объекта, если для обслуживания каждого объекта необходимы ровно по одному электрику, сварщику и сантехнику.

№ 1.2.7. Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек. Сколькими способами можно накрыть стол на 3 человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце и одну ложку?

№ 1.2.8. Сколькими способами можно распределить 12 различных учебников между 4 школьниками?

№ 1.2.9. Сколько существует способов награждения 3 рабочих путёвками в 3 разных санатория, если претендентов на награждение 10?

№ 1.2.10. Сколькими способами можно распределить путёвки в 2 санатория между 9 сотрудниками (каждый санаторий может принять неограниченное число сотрудников, но каждый должен поехать в санаторий)?

Задания для самостоятельного решения

Сколькими способами можно распределить поровну 6 заказов между 2 исполнителями?

В отделении 5 сотрудников, сколькими способами можно распределить между ними 3 заказа (на каждый заказ требуется только один сотрудник, каждый выполняет по одному заказу)?

Сколькими способами можно разместить в 2 офисах 9 сотрудников?

Сколько словарей нужно издать, чтобы непосредственно осуществлять переводы с любого из 4 языков: русского, немецкого, английского и французского на любой другой язык?

Сколько существует способов освещения помещения, в котором имеются 4 лампочки, включаемые независимо?

Круг разбит на равные секторы, каждый из которых закрашивается в один определенный цвет. Сколькими разными способами можно раскрасить круг а) разбитый на 7 равных секторов, если имеется 5 красок; б) разбитый на 4 сектора, если имеется 3 краски? Раскраски, совпадающие при повороте круга, считаем одинаковыми.

Практическое задание № 3. Логические задачи на истинность утверждений.

№ 1.3.1. На острове Рыцарей и Лжецов живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В Думе острова 1001 депутат. В целях сокращения бюджета было решено сократить думу на одного депутата. Но каждый из депутатов заявил, что если его выведут из состава Думы, то среди оставшихся 1000 депутатов большинство будет лжецами. Сколько рыцарей и сколько лжецов в Думе?

№ 1.3.2. Каково наибольшее число утверждений, которые могут быть одновременно истинными:

а) Джо хитрец;
б) Джо не везёт;
в) Джо везёт, но он не хитрец;
г) Если Джо хитрец, то ему не везёт;
д) Джо хитрец тогда и только тогда, когда ему везёт,
е) Либо Джо хитрец, либо ему не везёт, но не то и другое одновременно.

№ 1.3.3. Один из четырёх лиц А, Б, В и Г совершил преступление. А сказал, что это был не Б. Б сказал, что это либо В, либо Г. В сказал, что это либо А либо Б, а Д сказал, что это либо А, либо С. Кто совершил преступление, если лжёт только преступник.

Девочка Маша загадала число и попросила четырех подруг отгадать его. Первая сказала: «Это 5», вторая: «Это не 5», третья «Это не 6», четвертая «Это 8». Маша сказала: «Только одна из Вас сказала правильно». Что это было за число?

Один из трех злодеев (Кощей, Баба Яга, Кикимора) украл Василису. Иван Царевич пошел ее искать. Кощей сказал, что это была Баба Яга. Что сказали остальные, Иван царевич забыл, но запомнил, что только вор был единственным, кто сказал правду. Кто украл Василису?

Электрик монтажник и инженер, фамилии которых Иванов, Петров и Кузнецов, летели в самолете и разговаривали. Выяснилось, что Иванов и монтажник – ровесники, Кузнецов моложе монтажника, а Петров старше инженера. Определите фамилию каждого специалиста.

Был очень жаркий день, и четыре супружеских пары отправились на пикник. Энн выпила две бутылки кока-колы, Бетти – три бутылки, Сьюзен – четыре, а Дороти – целых пять бутылок. Мистер Браун выпил столько же кока-колы, сколько и его жена, мистер Грин вдвое больше своей жены, мистер Уайт в три раза больше своей, а мистер Рэд вчетверо больше, чем его супруга.

а) Какое наибольшее количество кока-колы могли выпить все четыре пары вместе?

б) Назовите фамилии Энн, Бетти, Сьюзен и Дороти, если известно, что было выпито 44 бутылки кока-колы.

В комнате было не менее 10 и не более 40 человек. Первый человек встал, сказал, «здесь все, кроме меня, лжецы!» и ушел. Затем каждый человек, выходящий после него, говорил «Все, кто вышел до меня – солгали». Сколько человек сказали правду?

Практическое занятие № 4. Задачи на взвешивания

- Из четырёх деталей одна отличается по весу от остальных, имеющих одинаковый вес. Как выделить ее двумя взвешиваниям ни весах с двумя чашками из гирь? Можно ли при этом выяснить, легче ли она остальных или тяжелее.
- Вы подошли к 100-литровой бочке с молоком. У Вас есть в руках два ведра – емкостью 9 литров и емкостью 5 литров. Вам необходимо отмерить ровно 8 литров. Как это сделать, если других емкостей поблизости нет и выливать молоко на пол, разумеется, нельзя?

- Из восьми гирь массами 1г, 2г,...,8г без надписей одну потеряли. Известно, что чем больший вес имела гиря, тем больше был её размер. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах определить, какая из гирь потерялась?
- Среди 12 монет одинаковых по виду монет имеется одна фальшивая (отличается по весу). Как найти ее с помощью весов с двумя чашечками без гирь, если неизвестно, легче она или тяжелее чем остальные, сделав при этом минимальное количество взвешиваний? Какое количество взвешиваний потребуется?

Задания для самостоятельного решения

Аня и Боря хотят угадать день Рожденья Саши. Саша написала список из 12 дат: 25 января, 26 января, 27 января, 28 февраля, 29 февраля, 25 марта, 29 марта, 30 марта, 26 апреля, 30 апреля. «мой день рождения в один из этих дней», – сказала она. Затем Саша сказала на ухо Ане только месяц, а Боре – только число. Далее происходит следующий разговор:

Аня: «Я не знаю, когда Сашин День рожденья, но я знаю, что Боря тоже не знает»

Боря: «Раньше не знал, а теперь знаю».

Аня: «Теперь и я знаю!»

Когда у Саши день рождения?

Задача о том, как можно незаметно разболтать государственную тайну. Его высокопревосходительство Генерал Ляпус объявил всем своим подчиненным: «Секретная военная операция назначена на один из следующих дней будущего года: 5 января, 6 января, 7 января, 8 февраля, 9 февраля, 5 марта, 9 марта, 10 марта, 6 апреля, 10 апреля, 4 мая, 11 мая. Поэтому в каждый из этих дней части должны быть в полной боевой готовности. В виду особой секретности, месяц, на который назначена операция, я сообщил только своему первому адъютанту - подполковнику князю Талантову, а день (число) известно только моему второму адъютанту - майору графу Разумовскому». После того, как генерал удалился, между его адъютантами произошел следующий разговор:

Князь: «Хотя полная дата начала операции мне неведома, однако ж доподлинно известно, что и Вы ее не знаете, Ваше высокоблагородие»

Граф: « Так точно, Ваше сиятельство, не знал за секунду до того, как Вы это сказали, но теперь, видите ли, она мне стала известна».

Князь: « Так ведь и мне она теперь известна, Ваше высокоблагородие…»

На какую дату назначена операция, если учесть, что все они были люди благородные, а следовательно, говорили только правду?

- Известно, что x и y – натуральные числа. Известно также, что среди следующих четырех утверждений 3 являются истинными, а одно – ложным:

А) $x + 1$ делится на y

Б) $x = 2y + 5$

В) $x+y$ делится на 3

Г) $x + 7y$ – простое число.

Найдите все такие пары натуральных чисел.

Практическое занятие № 5. Задачи на делимость и другие свойства целых чисел

№ 1.4.1. В магазин привезли леденцы ценой в 3, 5 и 7 рублей. Могут ли 10 леденцов стоить в сумме 53 рубля?

№ 1.4.2. Вокруг озера находится 7 поселков. Глава района решил пустить рейсовые катера, которые бы возили пассажиров из одного поселка в другой. Он хочет 7 имеющихся поселков соединить между собой так, чтобы каждый катер плавал только между парой поселков и чтобы из каждого поселка были рейсы ровно в три других поселка. Можно ли это сделать? Если да, то сколько катеров потребуется?

№ 1.4.3. Для съемок музыкального клипа группа «Егорушки» собирала в мешки тополиный пух. Саша собрал более половины всех мешков – в 5 раз больше, чем Валера, и на 10 мешков больше, чем Андрей. Возмущенный такой несправедливостью, Валера отобрал у каждого из приятелей несколько мешков, так что у всех троих мешков стало поровну. Сколько всего мешков пуха собрали «Егорушки»?

№ 1.4.4. Чему равна последняя цифра числа $9^{2016} - 7^{2016}$

№ 1.4.5. «Будьте взаимно просты», – сказал Умный Портняжка и разрезал показанную на рисунке ленту на несколько частей так, что числа на любых двух отрезках куска оказались взаимно простыми. Какое наибольшее количество кусков могло при этом получиться?

1	2	3	4	5	6	7	8	9

№ 1.4.6. Набор из 2015 чисел обладает свойством: если каждое число заменить на сумму остальных, то получится тот же набор чисел. Чему равно произведение чисел в наборе?

№ 1.4.7. Докажите, что для любого натурального n

а) $n^3 - n$ делится на 6;

б) $n^5 - n$ делится на 5;

в) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7;

г) $2^{2n+1} \cdot 3^{n+3} + 1$ делится на 11;

д) $n^7 - n$ делится на 7;

е) $3^{2n} + 2^{6n-5}$ делится на 11;

ж) $3^{2n} - 2^n$ делится на 7.

№ 1.4.8. Докажите, что если p – простое число, большее 3, то $p^2 - 1$ делится на 24.

№ 1.4.9. Докажите, что если x и y целые и $x^2 + y^2$ делится на 3, то и x делятся на 3, и y делятся на 3.

№ 1.4.10. Существуют ли такие натуральные числа n при которых дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ сократима?

Практическое занятие № 6. Задачи на делимость и другие свойства целых чисел

№ 1.4.11. Докажите, что число $\frac{7^{1968^{1970}} - 3^{68^{70}}}{10}$ – целое.

№ 1.4.12. Найти все целые решения уравнений:

а) $y^2 - 2xy - 2x = 6$;

б) $2x^2 - 11xy + 12y^2 = 17$;

в) $2x^2 + 2y - 3xy + y^2 - 3x = 2$

г) $2xy - 3y^2 - 4y + 2x = 2$;

д) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} = 1$;

е) $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = y^2$;

ж) $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

№ 1.4.13. Найдите двузначное число, равное сумме чисел его десятков и квадрата его единиц.

№ 1.4.14. Найдите двузначное число, которое равно удвоенному произведению его цифр.

№ 1.4.15. Может ли четырёхзначное число, у которого все цифры одинаковые, быть точным квадратом (т.е. квадратом натурального числа)? Существует ли четырёхзначное число, являющееся точным квадратом, у которого последние три цифры одинаковые? Найдите четырёхзначное число, являющееся точным квадратом и такое, что его первые две цифры равны между собой и последние две цифры равны между собой.

№ 1.4.16. Докажите, что разность между трёхзначным числом и числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке не может быть квадратом натурального числа.

№ 1.4.17. Найдите все натуральные числа, оканчивающиеся на 91, которые после вычёркивания этих цифр уменьшаются в целое число раз.

№ 1.4.18. Найдите двузначное число, равное квадрату его единиц, сложенному с кубом его десятков.

№ 1.4.19. Найдите шестизначное число, начинающееся с цифры 2, которое от перестановки этой цифры в конец числа увеличивается в 3 раза.

№ 1.4.20. Известно, что числа 2077 и 100 при делении на а дают одинаковый остаток. Найдите а.

№ 1.4.21. На доске записано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно – 3, среднее арифметическое положительных из них равно 4, а среднее арифметическое отрицательных из них равно – 8. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел больше, положительных или отрицательных? в) Каково максимально возможное число положительных чисел?

Практическое занятие № 7. Многочлены

№ 1.5.1. Показать, что если многочлен f(x) с целыми коэффициентами принимает при x равном 1, 2, 3, 4 значения равные некоторому простому числу p, то он не может принимать значение 2p ни при каком целом x.

№ 1.5.2. Многочлен f(x) при делении на (x – 1) даёт остаток 1, при делении на (x – 2) даёт остаток 3, при делении на (x – 3) остаток 5 и при делении на (x – 4) остаток 6. Найти остаток от деления f(x) на произведение

$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$.

№ 1.5.3. Найти остаток от деления многочлена

$f(x) = 1 + x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ на

а) $x^2 - 1$; б) $x^2 + 1$; в) $x^4 - 1$.

№ 1.5.4. Разложите на множители:

а) $f(x) = x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72$,
б) $f(x) = x^5 - 7x^3 - 2x^2 + 12x + 8$,
в) $x^4 + x^2 + 1$
г) $x^4 + 8x^3 + 8x - 1$
д) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$
е) $f(x) = x^6 + 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 4x - 1$
ж) $x^8 + x^4 + 1$
з) $x^8 + x^7 + 1$
и) $x^8 + x + 1$
к) $x^8 + 3x^4 + 4$
л) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$
м) $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$
н) $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$
о) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

Практическое занятие № 8. Иррациональные выражения

№ 1.6.1. Чему равно n, если

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 10.$$

№ 1.6.2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

в) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

д) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$;

е) $\sqrt[3]{56+40\sqrt{2}} + \sqrt[3]{56-40\sqrt{2}}$;

ж) $(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}) \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

г) $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$;

з) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + 2\sqrt{6}$.

№ 1.6.3. Упростите выражения

а) $\sqrt{2^3\sqrt{5^3\sqrt{2^3\sqrt{5^3\sqrt{2^3\sqrt{....}}}}}}$;

б) $\sqrt{\underbrace{111...1}_{2n} - \underbrace{222...2}_{n}}$;

в) $\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{....}}}}}}$;

г) $\sqrt{7\sqrt{21\sqrt{7\sqrt{21\sqrt{7\sqrt{....}}}}}}$.

№ 1.6.4. Решите уравнение:

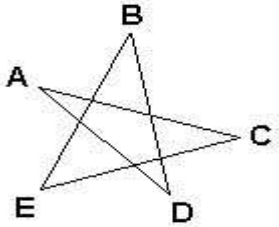
$\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{....}}}} = 49.$

№ 1.6.5. Не вычисляя корней, установите, является ли утверждение истинным или ложным:

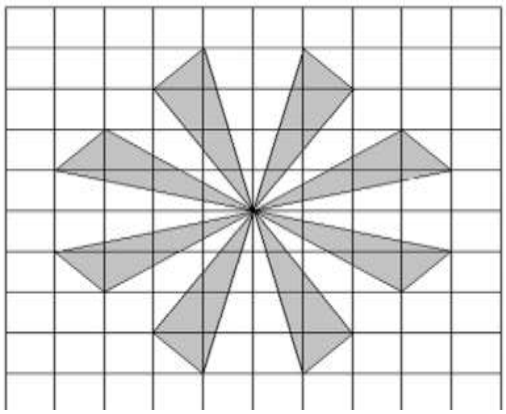
$\sqrt{2015} + \sqrt{2017} > 2\sqrt{2016}$.

Практическое занятие № 9. Геометрические задачи

№ 1.9.1. В пятиугольной звезде, изображенной на рисунке, $\angle ACE = \angle ADB$ и $\angle DBE = \angle BEC$. Известно также, что BD = CE. Докажите, что $\angle ACD = \angle ADC$.



№ 1.9.2. Лист бумаги расчерчен клетками площадью 1 см^2, найдите площадь фигуры (состоящей из восьми лепестков) изображенной на рисунке



№ 1.9.3. В треугольнике ABC проведена высота BH. M – середина BC, отрезок MH равен высоте BH. Чему равен угол C?

№ 1.9.4. В ромбе ABCD середина CD обозначена буквой M, а пересечение AC и BD – буквой O. Известно, что MO = OB. Найдите все углы ромба.

№ 1.9.5. Семен и Петр соседи по саду. Их прямоугольные участки имеют общую сторону, но площадь участка Петра на 10 % меньше, чем Семена. Если бы можно было увеличить каждую их сторон обоих участков на 10 метров, то участок Семена стал бы на 10 % больше, чем у Петра. На сколько метров надо увеличить каждую из сторон участков, чтобы участок Семена стал по площади всего лишь на 5 % больше, чем участок Петра.

№ 1.9.6. В трапеции ABCD с большим основанием AD равным 12 см и меньшим основанием BC равным 7 см и высотой 8 см, найдите площадь четырехугольника, ограниченного большим основанием трапеции, отрезками ее средней линией и диагоналей.

Задания для самостоятельного решения.

- Чему равна максимальная площадь квадрата, который целиком лежит в треугольнике площадью S.

- На двух сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты ABLD и BCEF. D и F соединены между собой. Продолжение высоты BN треугольника ABC пересекает отрезок DF в точке K. Чему равно отношение DK:KF?

- Может ли в прямоугольном треугольнике сумма катетов быть больше суммы гипотенузы и высоты, опущенной на гипотенузу?

Практическое занятие № 10. Функции.

№ 1.8.1. Укажите все значения a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} |x+a| \le 1 \\ |3x-a| \le 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 1.8.2. При каких значениях параметра m неравенство

$$\cos x + \frac{m(m+1)}{\cos x - 1} < \frac{2(m\cos x + 1)}{\cos x - 1}$$

не имеет решений? Что является решением неравенства при m > 2

№ 1.8.3. Один сплав, состоящий из меди и цинка, содержит в себе в два раза меньше меди, чем цинка, а во втором сплаве медь и цинк содержаться в отношении 2:3. а) Возможно ли создать из этих двух сплавов сплав, в котором цинка будет в 3 раза больше, чем меди? б) Меди будет в 1,5 раза меньше чем цинка? в) В какой пропорции нужно смешать сплавы, чтобы соотношение меди к цинку составляло 5:8 .

№ 1.8.4. Найдите все функции f, которые при любых действительных x и y удовлетворяют условию f(x – y) = f(x) + f(y) – 2xy.

№ 1.8.5. Функция f(x) удовлетворяет соотношению $2f(x) + f(x^2 - 1) = 2016$ при всех действительных значениях x. Чему равно $f(-\sqrt{2})$.

№ 1.8.6. Известно, что x_0 является решением уравнения

$$x^x = 10^{10^{1003}}$$

Пусть $x_0 = 10^y$. Чему равен y ($\lg x_0$) ?

№ 1.8.8. Дана функция

$$f(x) = \sqrt[2016]{(1+e^x)(1+e^{2x})(1+e^{3x})\cdot\ldots(1+e^{2016x})}$$

Чему равно $f'(0)$?

№ 1.8.9. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ (x^2+y^2+a)(x^2+y^2+2x+2y+a)(x^2+y^2+2x-2y+a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два решения? ровно три решения?

№ 1.8.10. Решите уравнение ||||x – 1| –2| – 4| – 8| –16| = 0

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Кремер, Н. Ш. Математика для поступающих в экономические и другие вузы : учебное пособие / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман ; ред. Н. Ш. Кремер. – М.: Юнити, 2017. – 695 с.– Режим доступа: – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=683160.
2. Шелехова, Л.В. Обучение решению сюжетных задач по математике : учебно-методическое пособие / Л.В. Шелехова. - Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. - 166 с. : [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=274518.
3. Ячменёв Л.Т. Математика в примерах и задачах для подготовки к ЕГЭ и поступлению в ВУЗ: Учебное пособие - М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2022. - 336 с.: - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/500649, https://znanium.com/read?id=400032.

Дополнительная литература

1. Сеничева, Н.Н. Школьные олимпиады по экономике в научной организации: препринт / Н.Н. Сеничева. - Вологда : ИСЭРТ РАН, 2016. - 100 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/1019495.
2. Воробьев В. В. Тренировочные варианты для качественной подготовки к ЕГЭ по математике для учащихся 10-11 классов / В.В. Воробьев. - Москва : Директ-Медиа, 2014. - 48 с. . URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233960
3. Математические головоломки профессора Стюарта / Стюарт И., Лисова Н. - М.:Альпина Паблишер, 2017. - 386 с.: (http://znanium.com/catalog/product/1002607) https://znanium.com/read?id=333393
4. Будак, Б. А. Математика: сборник задач по углублённому курсу : учебно-методическое пособие : [12+] / Б. А. Будак, Н. Д. Золотарева, Ю. А. Попов ; под ред. М. В. Федотова. – М. : Лаборатория знаний, 2020. – 329 с. : ил. – (ВМК МГУ - школе). – Режим доступа. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=595231

Интернет-ресурсы

1. http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал
2. http://ruolimpiada.ru/matematika/ Олимпиадные задания по математике
3. https://www.syl.ru/article/174987/new_printsip-dirihle-zadachi-s-resheniyami
4. http://www.e-osnova.ru/PDF/osnova_3_37_7016.pdf
5. http://iumka.ru/matematika/olimpiada/item/12434
6. https://ru.wikipedia.org/wiki/Комбинаторика
7. http://karusel.desc.ru/uploads/images/kar-krugok4.2.pdf
8. http://www.hintfox.com/article/printsip-dirihle-i-ego-primenenie.html
9. http://wiki.tgl.net.ru/index.php/Семинар_ДООМ_Кружок_5-8,_Принцип_Дирихле
10. http://diskmat.ucoz.ru/index/0-19