Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0233C9D60038B01A9E48C1A3FBB4A9D9F6
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 07.07.2023 до 28.04.2038

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе С.Н. Титов

КОМПЬЮТЕРНАЯ И АБСТРАКТНАЯ АЛГЕБРА

Программа учебной дисциплины мировоззренческого модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Информатика

(очная форма обучения)

Составители: Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «26» мая 2023 г. № 5

Ульяновск, 2023

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Компьютерная и абстрактная алгебра» относится к дисциплинам формируемым участниками образовательных отношений части, Блока 1. Дисциплины (модули) мировоззренческого модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Информатика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин Алгебра, Математические основы информатики, Теория чисел.

Результаты изучения дисциплины являются основой для прохождения практик: Научно-исследовательская работа, Подготовки к сдаче и сдача государственного экзамена, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины является подготовка учителя к будущей профессиональной деятельности: формирование способности к преподаванию учебных предметов по профилю, как в обычных общеобразовательных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Задачей освоения дисциплины является закрепление умений проводить математические преобразования выражений с помощью компьютерных технологий, отработка понятийного аппарата математики, техники проведения математических расчетов, формирование и закрепление умения проводить строгие абстрактно-логические доказательства.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	умеет	Владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации	ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач	ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в	ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические	ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в	ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения

предметной области при решении профессиональных задач. ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	единицы содержания школьного курса математики.	соответствии с современными требованиями к образованию.	различных методов, приемов и технологий в обучении математике.
ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов. ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).	ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.	ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.	ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.

2. **Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Номер семестра	Всего		Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Трудоемк.		Лекции, час.	Практические занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Лабораторные занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Самостоят. работа, час.	
	Зач. ед.	Часы							
5	3	108	18	-	-	30	-	33	экзамен (27)
Итого:	3	108	18	-	-	30	-	33	

2.1 .Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
5 семестр				
Представление данных в компьютере и алгоритмы символьных преобразований	8		16	13
Элементы абстрактной алгебры и их применения в кодировании	10		14	20
Экзамен				27
Всего по дисциплине:	18	-	30	60

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса

1. Представление данных в компьютере и алгоритмы символьных преобразований

Представление данных в компьютере. Позиционные системы счисления. Представления символьных данных. Общие сведения о программе Maple. Простейшие алгоритмы символьных преобразований (числа, многочлены, выражения). Многочлены от нескольких переменных. Интерактивная форма – работа с системами компьютерной алгебры.

2. Элементы абстрактной алгебры и их применения в кодировании

Группы и подгруппы. Сравнимость элементов группы по подгруппе. Нормальные делители. Циклические группы. Кольца классов вычетов (числа и многочлены). Кольца конечной характеристики и конечные кольца. Основы модулярной арифметики.

Расширения полей, алгебраические и конечные расширения. Алгоритмы работы с алгебраическими иррациональностями. Конечные поля. Элементы теории кодирования. Принципы помехоустойчивого кодирования, подгруппа линейных кодов и классы смежности. Алгоритмы с исправлением одной или двух ошибок, пути усовершенствования алгоритмов для исправления большего числа ошибок (применение конечных полей). Криптографические системы с открытым ключом..

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестов, контрольных и самостоятельных работ.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным докладам;
- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий

ОС-1. Самостоятельная работа

Примерный вариант .

1) Перевести 112_7 и $2(10)5_{12}$ в 9-чную систему счисления.
2) Найти сумму, разность, произведение, частное (если необходимо, округлить до трёх знаков после запятой) чисел $21{,}2_8$ и $7{,}3_8$.

ОС-2. Групповое интерактивное задание

Студенты разбиваются на микрогруппы по 4 человека и готовят конспект культурно-просветительского или внеурочного мероприятия для популяризации математических знаний, а также доклад с презентацией по одной из тем:

1. Применение простых расширений к преобразованию иррациональных выражений.
2. Составные конечные расширения полей.
3. Шифрование и дешифрование с секретным ключом
4. Алгоритмы кодирования с исправлением ошибок
5. Коды Рида-Соломона
6. Коды Гоппы
7. Система RSA

ОС-3. Контрольная работа

Примерный вариант:

1) Перевести 112_4 и $2(10)5_{16}$ в 8-чную систему счисления и найти в этой системе сумму, разность, произведение этих чисел, а также разделить большее на меньшее с остатком.

2) Составить таблицу сложения и умножения для конечного поля из 7 элементов. Найти обратные и противоположные для всех элементов (если они суествуют)

3) Кодирование с исправлением одной ошибки осуществляется с помощью генераторной матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

а) Найти проверочные символы, если передается сообщение (2, 4, 3).

б) Какое передавалось сообщение, если было получено сообщение (5, 2, 1, 9, 14)?

ОС-4. Тест.

Примерный вопрос

Представьте десятичное число 15 в двоичной системе счисления…

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

Глухова Н.В. Элементы абстрактной и компьютерной алгебры. Учебно-методическое пособие. – Ульяновск: УлГПУ, 2009. – 50 с

ФГОС ВО ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя	Образовательные

п/п	формирования компетенции	результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2 Выступление с докладами (интерактивное задание) ОС-3. Контрольная работа ОС-4. Тест	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики. ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию. ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике. ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; ОР-10. Владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике. ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности. ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-5 Экзамен в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-5 Экзамен в форме устного собеседования
Примерные вопросы к экзамену

1. Понятие группы, подгруппы
2. Смежные классы по подгруппе, фактор-группы. Теорема Лагранжа
3. Кольцо, подкольцо, идеал
4. Классы вычетов по произвольному идеалу. Фактор-кольцо
5. Кольцо классов вычетов по числовому модулю. Операции над классами вычетов.
6. Кольцо классов вычетов. Необходимое и достаточное условие того, чтобы это кольцо являлось полем (с доказательством)
7. Нахождение обратных элементов в поле классов вычетов
8. Кольцо многочленов от одной переменной, отношение делимости в нём, теорема о делении с остатком, НОД и НОК
9. Алгебраические расширения полей. Теорема о строении простого алгебраического расширения поля
10. Конечные поля, их простейшие свойства
11. Числа в конечных полях, характеристика поля
12. Теорема о количестве элементов произвольного конечного поля
13. Существование примитивного элемента в конечном поле (с доказательством)
14. Отношение сравнения многочленов по модулю
15. Фактор-кольцо многочленов по модулю многочлена. Необходимое и достаточное условие того, чтобы оно было полем (с доказательством)
16. Примеры вычислений над конечными полями
17. Основные понятия теории кодирования.
18. Групповые коды и их свойства, применение теории групп для исправления ошибок
19. Кодирование с проверкой на четность
20. Кодирование с повторениями, достоинства и недостатки метода.
21. Алгоритм кодирования, позволяющий найти и исправить одну ошибку.
22. Алгоритм кодирования, позволяющий найти и исправить две ошибки. Пути улучшения алгоритма
23. Общие представления об алгоритмах кодов Рида-Соломона.
24. Криптография. Применение подстановок в кодировании
25. Системы с открытым ключом (алгоритм RSA).
26. Представление чисел в различных системах счисления. Примеры арифметических действий над числами в позиционных системах
27. Перевод чисел из одной системы счисления в другую для целых чисел
28. Перевод чисел из одной системы счисления в другую для дробных чисел
29. Алгоритмы работы с обыкновенными дробями
30. Перевод периодических дробей в обыкновенные
31. Представление многочленов в компьютере. Разреженные и плотные представления
32. Методы приближенного вычисления корней многочлена. Система многочленов Штурма.
33. Многочлены от нескольких переменных (способы упорядочения членов,

рекурсивные и распределённые представления).

34. Дробно-рациональные выражения (нормальное и каноническое представления, алгоритмы работы)
35. Алгебраические числа. Алгоритмы работы с выражениями, содержащими иррациональность

Примерные практические задания к экзамену

1. Перечислить все элементы поля из 25 элементов. Указать квадраты любых 8 элементов и обратные для них
2. Найти информационное сообщением в системе, позволяющей найти и исправить одну ошибку, если принято сообщение (4, 3, 2, 1, 11, 21).

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение лабораторных занятий	Работа на лабораторных занятиях	Экзамен
5 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла max	236 баллов Max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая

в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы лабораторных занятий

ПЗ-1 Представление чисел в компьютере

1. Запишите первые 20 чисел в системах счисления с основаниями

а) 9, б) 14, в) 4, г) 11

2. Выполните действия сложения и вычитания:

а) $10465_7 + 3351_7$ б) $15(11)3_{12} + 2724_{12}$
в) $10441_5+203_5+4211_5+41030_5$ г) $8051_9 + 12356_9 + 8051_9$
д) $134602_8 – 26415_8$ е) $15(11)3_{16} – 2724_{16}$
ж) $21(11)39_{12} – 37(10)4_{12}$ з) $2304_6 – 425_6$

3. Выполнить действия умножения и деления

а) $32403_7 \cdot 623_7$ б) $545_6 \cdot 3_6$
в) $(10)5(11)_{12} \cdot 9(10)_{12}$ г) $125_7 \cdot 64_7$
д) $1141043_5 : 23_5$ е) $26833_9 : 1823_9$
ж) $4(11)0930_{12} : 6_{12}$ з) $9(10)166_{12} : (10)_{12}$

ПЗ 2. Позиционные системы счисления

1. Перевести число из одной системы счисления в систему с основанием g:

а) 2718_9, g = 7 д) 1927_{10}, g = 7
б) 34014_5, g = 8 е) 41102_7, g = 9
в) $(13)40(10)_{14}$, g =10 ж) $25(11)3_{12}$, g = 10
г) 34022_7, g = 5 з) $4(11)0930_{12}$, g = 6

2. Чему равно основание системы счисления x, в которой

а) $26 = 101_x$ б) $231_x = 123_7$

3. Запишите в двоичной системе счисления

а) 47056_8 в) 51435_8
б) $9(13)5_{16}$ г) $(12)4(11)7_{16}$

4. Запишите числа в восьмеричной и шестнадцатеричной системах

а)$111\ 000\ 101\ 011\ 010_2$ в) $100\ 111\ 010\ 101_2$
б) $1\ 110\ 000\ 011\ 100\ 110_2$ г) $1100\ 0100\ 1011\ 0111_2$

5. Выполните действия в соответствующей системе счисления, а затем переведите в десятичную и проверьте результат

а) $(1001101_2 + 1110001_2)\cdot(1110001_2 – 1001101_2)$
б) $45_8 + 60_9 + 55_{12} = x_{11}$

ПЗ 3. Представление дробей

1. Перевести в десятичную

а) $126{,}34_8$ б) $(10)49{,}62_{16}$

2. Перевести из десятичной в систему с основанием g

а) 634,36 , g = 8 б) 52,37, g = 8

в) 36,6, g = 2 г) 156,5, g = 2

д) 52,21, g = 16 е) 812,32, g = 16

3. Выполните действия:

а) $12{,}034_5 + 3{,}444_5$ б) $2{,}304_6 + 0{,}253_6$

в) $28{,}07_{12} – 8{,}23_{12}$ г) $3{,}04_7 – 2{,}15_7$

д) $23{,}4_5 \cdot 0{,}24_5$ е) $2{,}(10)1_{12} \cdot 3{,}7_{12}$

ж) $0{,}(11)4(11)_{12} : 2{,}7_{12}$ з) $1{,}03_6 : 0{,}43_6$

ПЗ-4 Работа с обыкновенными дробями

1. Можно ли сократить дробь 12/20 записанную в системе счисления , g = 7

2. Выяснить, обращаются ли в конечные систематические дроби по основанию g следующие обыкновенные дроби (записанные в десятичной системе счисления)

а) 7/400, g = 10 б) 23/48, g = 6

в) 25/288, g = 12 г) 5/384, g = 12

Если это возможно, выполните это обращение.

3. Представьте смешанную периодическую дробь в виде несократимого отношения двух целых чисел

а) 0, 233(37) б) 9, (387)

в) 11, (459) г) 7, 4(099)

д) $0{,}(02)_4$ е) $0, 0(2)_4$

ж) $0, 000(3)_6$ з) $0, 4(3)_7$

ПЗ 5. Группы, подгруппы, классы смежности, фактор-группы

1. Доказать, что множество целых чисел, кратных 3 (д/з 5) является подгруппой аддитивной группы всех целых чисел. Найдите правосторонне и левосторонне разложение группы целых чисел по данной подгруппе. Является ли данная подгруппа нормальным делителем?
2. Докажите, что множество самосовмещений правильного треугольника образует группу. Найдите все подгруппы данной группы. Найдите левые и правые классы смежности по всем подгруппам. Укажите те из них, которые являются нормальными делителями.
3. (д/з) Докажите, что множество поворотов квадрата образует подгруппу его самосовмещений. Найдите левые и правые классы смежности. Является ли эта подгруппа нормальным делителем.
4. Доказать, что множество всех чётных подстановок четырёхэлементного множества образует подгруппу всех подстановок данного множества. Докажите, что она является нормальным делителем. Постройте фактор-группу.
5. (д/з) Даны подстановки:

$a_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Найти все подгруппы и все нормальные делители данной группы. Построить левые и правые классы смежности по всем нетривиальным подгруппам. Где это возможно, указать фактор-группы.

6. Даны матрицы:

$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,

Найти все подгруппы и все нормальные делители данной группы. Построить левые и правые классы смежности по всем этим подгруппам. Где это возможно, указать фактор-группы.

ПЗ-6. Подстановки и их представление в виде циклов

7. Представьте в виде произведения независимых циклов подстановки:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 9 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 8 & 6 & 3\end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 & 4 & 5\end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 5\end{pmatrix}$

Найдите порядок и чётность каждой подстановки.

8. Представьте произведения независимых циклов в виде подстановок. Найдите порядок и чётность каждой подстановки.

а) (123)(4568) б) (34)(52618)

9. Вычислить τ^k

а) $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6\end{pmatrix}$, $k = 137$

б) $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 9 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 8 & 2\end{pmatrix}$, $k = 352$

ПЗ – 7. Работа с многочленами.

1. Расположите члены следующих многочленов в лексикографическом порядке, в порядке «общей степени, затем лексикографическом»:

а) $x_1 + x_2 + x_3$

б) $3x_1^2 + 3x_2^2 + x_2$

в) $x_1 x_2 + x_2 x_{13}$

г) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3$.

2. Укажите старшие члены многочленов:

а) $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$

б) $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$

в) $(x_1 - x_2 - x_3)(x_2 - x_1 - x_3)(x_3 - x_1 - x_2)$

г) $(x_2^3 + x_1^2x_3 - x_3^3)(x_1^2 - x_1^2x_2x_3)(x_1^3x_2^2 - x_1^4 + x_2^2)$

д) $2\sigma_1^4 \sigma_2^3\sigma_3^2$ (σ_i – элементарные симметрические многочлены)

е) $2\sigma_1^2 \sigma_2\sigma_3^3$.

3. Если это возможно, сократите дроби $f(x)/g(x)$:

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$, $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

б) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

в) $f(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 2$

г) $f(x) = x^6 + 6x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, $g(x) = x^5 + 6x^4 + 4x^2 + 4x + 6$.

4. Упростите выражения:

а) $\dfrac{1}{x^4+x^3+2x^2+x+1}+\dfrac{1}{x^3+2x^2+x-2}$

б) $\dfrac{x-1}{x^4+6x^3+17x^2+24x+12}\cdot\dfrac{x^3-2x^2-13x-10}{x^2-1}$

в) $\dfrac{x^2+1}{x^5+x^3+2x^2+2x+2}+\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^3+7x^2+2x+6}$

г) $\dfrac{x^4+x^3+3x^2+6x+3}{x^3+2x^2+2x+1}-\dfrac{x^6+x^5+3x^4+2x^3+4x+2}{x^5+3x^4+x^3+6x^2+4x+6}$.

ПЗ-8. Метод Штурма вычисления корней

Пользуясь теоремой Штурма, отделить действительные корни многочлена

а) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4$,

б) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 4x - 8$, (д/з)

в) $f(x) = x^3 - 3x - 3$,

г) $x^4 - 12x^2 - 16x - 4$,

д) $x^4 - x - 1$,

е) $x^4 + x^2 - 1$,

ж) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$,

з) $x^5 - 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3$.

Интерактивная форма: микрогруппы составляют уравнения четвертой степени с иррациональными корнями, которые приближенно оценивают с помощью микрокалькуляторов. Другие микрогруппы ищут корни данных многочленов методом Штурма на скорость.

ПЗ-9 Числовые конечные поля

1. Доказать, что кольцо классов вычетов $\mathbf{Z_p}$ является полем тогда и только тогда, когда p – простое число.

2.Найти элемент обратный для элемента a в поле $\mathbf{Z_p}$:

а) a = 10, p = 17

б) a = 7, p = 31

в) a = 12, p = 29

г) a = 23, p = 41

д) a = 11, p = 13

е) a = 19, p = 23

ж) a = 13, p = 17

3.Построить фактор-кольцо кольца многочленов по главному идеалу, порождённому многочленом f(x) над полем $\mathbf{Z_p}$. Является ли данный идеал полем? Найдите квадраты всех его элементов и обратные элементы, когда они существуют.

а) $f(x) = x^2 + 1$, p = 3;

б) f(x) = x + 5, p = 5.

4.Решить систему

а) $\begin{cases}3x+y+2z=1\\x+2y+3z=1\\4x+3y+2z=1\end{cases}$ в $\mathbf{Z}_5$ и $\mathbf{Z}_7$

б) $\begin{cases}x+2z=1\\y+2z=x\\2x+z=1\end{cases}$ в $\mathbf{Z}_3$ и $\mathbf{Z}_5$

ПЗ-10. Конечные поля составной характеристики

1. В поле, полученном присоединением к в $\mathbf{Z}_3$ корня θ неприводимого многочлена f(x) перечислить все элементы. Вычислить θ^{-1} и θ^2

а) $f(x) = x^2 + x + 1$, $p = 2$ б) $f(x) = x^2 + 1$, $p = 3$

2. Доказать, что для поля характеристики p

а) $(a+b)^{p^f} = a^{p^f} + b^{p^f}$

б) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p = a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p$

в) $a^p = a$

ПЗ-11. Работа с иррациональными выражениями

1. Найдите минимальный многочлен для числа над полем рациональных чисел:

а) 1 е) i

б) $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ ж) $1 - 2\sqrt[3]{4}$

в) $-1 + i\sqrt{3}$ з) $1 + \sqrt[5]{11}$

г) $\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}$ и) $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

д) $\cos 10^0$ к) $\sin 10^0$.

2. Освободитесь от α в знаменателе дроби, где α – корень указанного уравнения:

а) $\frac{\alpha}{\alpha^3+1}$, $\alpha^3 - 2\alpha + 2 = 0$

б) $\frac{1}{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2}$, $\alpha^4 + \alpha^3 - 4\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$

в) $\frac{\alpha^2}{\alpha^4+1}$, $\alpha^4 + 2\alpha + 2 = 0$

г) $\frac{\alpha^2-3\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\alpha^3 + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$.

3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$ в) $\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt[4]{7}+\sqrt{7}-1}$

б) $\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$ г) $\frac{11}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1}$

4. Найти расширение поля рациональных чисел элементами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. Найти примитивный элемент этого поля и выразить через него $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$.

ПЗ-12. Элементы теории кодирования

1.Сообщение кодируется с проверкой на чётность, указать заведомо ошибочные среди пришедших сообщений:

а) 1 1 1 1 1 1

б) 0 0 0 0 0 0

в) 1 0 1 0 1 0

г) 0 0 1 1 0 0

2. Определите последнюю цифру, добавляемую к сообщению (1 1 1 0 0) при кодировании с проверкой на чётность
3. Информационное сообщение: (1, 1, 2, 3). Определите проверочные символы в алгоритме с исправлением одной и двух ошибок
4. Найти информационное сообщением в системе, позволяющей найти и исправить одну ошибку, если принято сообщение

а) (5, 3, 2, 9, 14) б) (4, 3, 2, 1, 11, 21)
в) (1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 6, 29) г) (1, 2, 2, 4, 5, 15, 55)
д) 4, 1, 10, 16 е) (1, 2, 3, 1, 2, 1, 10, 34)
ж) 1, 2, 1, 2, 1, 2, 9, 15
з) (1, 3, 0, -1, 4, 10) и) (1, 0, 1, 0, 2, 4)

5. Найти сообщения, которые не содержат ошибок в системе, позволяющей найти и исправить одну ошибку:

а) 1, 2, 3, 1, 2, 1, 11, 34
б) 1, 1, 1, 0, 0, 0, 3, 6
в) 3, 1, 0, 0, 1, 1, 6, 16
г) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6, 21

6. При кодировании сообщения каждый символ утраивается, какое сообщение согласно принципу наибольшего правдоподобия является правильным, если принято сообщение 111001010111
7. Закодировать сообщение для исправления двух ошибок:

а) 1, 0, 1, 1 б) (4, 3, 2, 1)
в) (2, 5) г) (1, 0, 1)

8. Декодировать сообщение (алгоритм с исправлением двух ошибок):
(2, 1, 1, 0, 1, 1, 6, 16, 68, 352)

ПЗ-14. Выступление с докладами

ПЗ 15. Контрольная работа

7. Перечень учебной литературы и ресурсов сети «Интернет», необходимых для проведения практики

Основная литература

1. Царев А.В., Шеина Г.В. Элементы абстрактной и компьютерной алгебры. – М.МПГУ, 2016 – 116 с. (Электронный ресурс: «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=471787)
2. Титов К.В. Компьютерная математика: Учебное пособие. - М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 261 с (http://znanium.com/bookread2.php?book=523231).
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру (в 3 томах). – М.: МЦНМО. – 2009. том 3. Основные структуры алгебры – 272 с. Электронный ресурс. – «Университетская библиотека онлайн», Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=62951).

Дополнительная литература

1. Крамарь В.А., Карапетьян В.А., Альчаков В.В. Специальные разделы математики: Практикум / - М.:Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 123 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=1019406)
2. Кнауб Л. В., Новиков Е. А., Шитов Ю. А. Теоретико-численные методы в криптографии: учебное пособие – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. – 160 с. (Электронный ресурс: «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=229582)
3. Комбинаторные алгоритмы: множества, графы, коды/БыковаВ.В. - Краснояр.: СФУ, 2015. - 152 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=550333)

4. Василенко О. Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. - М.: МЦНМО, 2006 – 336 с. (Электронный ресурс: «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=61814,)

Интернет-ресурсы

http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал

Лист согласования рабочей программы
учебной дисциплины

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Профиль: Математика. Информатика
Рабочая программа Компьютерная и абстрактная алгебра
Составитель: Н.В. Глухова – Ульяновск: УлГПУ, 2023.

Программа составлена с учетом федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, профиль подготовки «Математика. Информатика», утверждённого Министерством образования и науки Российской Федерации, и в соответствии с учебным планом.

Составители _____ Н.В. Глухова (подпись)

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) одобрена на заседании кафедры высшей математики "23" мая 2023г., протокол № 10
Заведующий кафедрой
_____ И.В. Столярова 23.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) согласована с библиотекой
Сотрудник библиотеки
_____ Ю.Б. Марсакова 19.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Программа рассмотрена и одобрена на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования "26" мая 2023 г., протокол № 5
Председатель ученого совета факультета физико-математического и технологического образования
_____ Е.М. Громова 26.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*