Министерство Просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0233C9D60038B01A9E48C1A3FBB4A9D9F6
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 07.07.2023 до 28.04.2038

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе С.Н. Титов

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Программа учебной дисциплины модуля
«Содержательные аспекты современного математического образования»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки
44.04.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Методология математического образования
(очная форма обучения)

Составитель:
Волкова Н.А., старший преподаватель кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от
«26» мая 2023 г. № 5

Ульяновск, 2023

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Динамические системы» относится к дисциплинам модуля «Содержательные аспекты современного математического образования» Блока 1. *Дисциплины (модули)* части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Методология математического образования», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках математических дисциплин образовательных программ бакалавриата.

Результаты освоения дисциплины являются основой для научно-исследовательской работы магистрантов, а также для изучения дисциплин по выбору «Прикладной функциональный анализ», «Теория принятия решений», «Математические модели в естественно-научных и социально-гуманитарных исследованиях» и др.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Актуальность курса определяется:

- важной ролью понятия динамической системы в современной математике и её приложениях, а также в общенаучном и общекультурном контексте;
- необходимостью актуализации, систематизации, выравнивания знаний, полученных магистрантами в рамках программы бакалавриата, установления связей между различными типами динамических систем (детерминированными и стохастическими, с непрерывным временем и с дискретным временем), изучения их качественных характеристик;
- возможностью изучения некоторых динамических систем в рамках профильного курса математики в среднем образовании, в дополнительном образовании, в рамках школьных математических проектов.

Целями освоения дисциплины «*Динамические системы*» являются:

- углубление представлений магистрантов о структуре современного математического знания, о месте и роли детерминистических и вероятностных моделей и методов в познании мира;
- продолжение формирования представлений о процессе математического исследования, его важнейших чертах, особенностях постановки проблемы и представления результатов;
- освоение приёмов математического моделирования, стратегий применения математических методов в различных областях знания;
- выделение магистрантами возможных направлений организации исследовательской работы школьников, связанных с детерминированными динамическими системами, со случайными процессами и стохастикой.

В соответствии с этим при преподавании дисциплины ставятся следующие **задачи**:

- рассмотрение конкретных классов динамических систем (обыкновенных дифференциальных уравнений, разностных уравнений) с точки зрения общей теории; систематизация и углубление знаний по методам решения и качественного исследования дифференциальных и разностных уравнений, в частности, изучение элементов теории устойчивости;

- актуализация и систематизация знаний магистрантов по освоенным ранее разделам теории вероятностей (случайные события, случайные величины, случайные векторы) в ходе освоения теории случайных процессов;
- освоение языка современной теории динамических систем, применяемого в областях, близких к научному направлению кафедры высшей математики;
- формирование представлений о связи между различными разделами математики, умений, связанных с переводом задачи с одного математического языка на другой;
- формирование умений, связанных с чтением учебной математической литературы достаточно высокого уровня сложности;
- формирование приемов мыслительной деятельности, связанных с обобщением (абстрагированием) и конкретизацией математических понятий;
- формирование методической грамотности и умений анализировать различные варианты построения математической теории, проектировать на основе избранного варианта учебный процесс для конкретной целевой аудитории.

В результате освоения программы магистрант должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	Умеет	владеет
УК-6. Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки УК 6.3. Формулирует цели собственной деятельности, определяет пути их достижения с учетом ресурсов, условий, средств, временной перспективы развития деятельности и планируемых результатов. УК 6.4. Критически оценивает эффективность использования времени и других ресурсов для совершенствования своей деятельности УК 6.5.	ОР-1. принципы и способы самоорганизации как основы саморазвития личности, средства приобретения новых знаний и умений с целью совершенствования своей деятельности ОР-7: приёмы структурирования информации для освоения разнопланового математического и внематематического содержания ОР-8: основные понятия и приёмы математического моделирования	ОР-2. проектировать траектории профессионального и личностного роста, определяет приоритеты собственной деятельности, выстраивает планы их достижения ОР-9: осваивать постановки проблем в различных предметных областях, участвовать в их постановке на языке математики ОР-13: выбирать тип модели, адекватной реальной системе (процессу), обосновывать выбор типа модели, строить модели	ОР-3 рефлексивными методами в процессе оценки разнообразных ресурсов (личностных, психофизиологических, ситуативных, временных и т.д.), используемых для решения задач самоорганизации и саморазвития. ОР-10: навыками использования компьютерных инструментов для выдвижения и проверки гипотез

Демонстрирует интерес к учебе и использует предоставляемые возможности для приобретения новых знаний и умений с целью совершенствования своей деятельности.	ОР-11: этапы математического моделирования применительно к описанию эволюционирующих систем; типовые классы динамических систем ОР-12: основные способы исследования конкретных динамических систем, в т.ч. доступные на этапах предпрофильного и профильного общего образования	изученных типов ОР-14: строить и исследовать динамические системы, использовать графические иллюстрации поведения динамических систем	
ПК-2. Способен проектировать и реализовывать учебные программы математических дисциплин (модулей) для образовательных организаций разных уровней образования. ПК 2.1. Знает содержание основных нормативных документов, регламентирующих математическое образование на разных уровнях; структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-методического обеспечения современного	ОР-4. структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-методического обеспечения современного процесса обучения математике.	ОР-5. проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.	

процесса обучения математике. ПК 2.2. Умеет проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.			

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоятельная работа, час	
	Трудоемкость						
	Зач. ед.	Часы					
1	5	180	6	40	-	107	Экзамен
Итого:	5	180	6	40	-	107	27

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Изучение соответствующих разделов может быть продолжено на более глубоком уровне в рамках учебного плана аспирантуры по направлению 01.06.01 *Математика. Механика,* профилю 01.01.01 *Вещественный, комплексный и функциональный анализ*.

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
1 семестр				
1. Основные понятия теории динамических систем. Классификация динамических систем	**-**	**4**	-	**15**
1.1. Примеры построения моделей эволюционирующих систем с непрерывным и с дискретным временем	-	2	-	7
1.2. Примеры построения детерминированных и	-	2	-	8

стохастических моделей эволюционирующих систем				
2. Линейные детерминированные динамические системы с непрерывным и дискретным временем. Классификация фазовых портретов	**2**	**8**	**-**	**24**
2.1. Одномерные линейные ДС с непрерывным и дискретным временем	-	2		8
2.2. Двумерные и многомерные линейные автономные детерминированные ДС с непрерывным временем	1	3		8
2.3. Линейные отображения многомерных пространств	1	3		8
3. Нелинейные детерминированные динамические системы: качественная теория	**2**	**10**		**24**
3.1. Одномерные нелинейные автономные ДС: различные методы исследования		2		6
3.2. Автономные нелинейные ДС на плоскости и их линеаризация. Неподвижные точки и предельные циклы.		4		6
3.3. Основы теории устойчивости динамических систем и теории возмущений: общий случай	1	2		6
3.4. Понятие о бифуркациях динамических систем. Детерминированный хаос	1	2		6
4. От случайных событий и случайных величин – к случайным процессам	**-**	**10**		**24**
4.1. Вероятностные пространства. Условная вероятность, независимость событий.		4		8
4.2. Случайные величины и случайные векторы. Совместные распределения вероятностей, условные математические ожидания.		4		8
4.3. Основные понятия теории случайных процессов.		2		8
5. Марковские процессы	**2**	**8**		**20**
5.1. Цепи Маркова		4		8
5.2. Простейшие марковские процессы с непрерывным временем. Случай дискретного пространства состояний	1	3		8
5.3. Понятие о марковских процессах с непрерывным временем и континуальным пространством состояний	1	1		4
Всего по дисциплине:	**6**	**40**	**-**	**107**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Тема 1. Основные понятия теории динамических систем. Классификация динамических систем.

Понятие (свободной) динамической системы, аксиоматическое определение: фазовое пространство, время, расширенное фазовое пространство, движение (оператор эволюции). Стационарные динамические системы. Системы с непрерывным и дискретным временем, обратимые и необратимые системы. Траектории и фазовые портреты стационарных динамических систем. Потоки

(каскады) как однопараметрические полугруппы преобразований фазового пространства динамической системы с непрерывным (дискретным) временем; орбиты потока (каскада). Гладкие динамические системы, фазовая скорость, поле направлений гладкой ДС. Задание гладкой динамической системы её полем направлений (стационарной ДС – векторным полем). Оператор преобразования дискретной динамической системы.

Простейшая классификация движений гладкой стационарной динамической системы (покой, унивалентное движение, периодическое движение). Инвариантные множества движения, замкнутость множества состояний равновесия динамической системы. Задача топологической классификации динамических систем, понятие о топологических инвариантах.

(*) Группа симметрий векторного поля, поля направлений. Симметрии дифференциальных уравнений. Примеры: однородное поле направлений и однородное дифференциальное уравнение первого порядка; квазиоднородные дифференциальные уравнения, преобразование траекторий и периодов движения по замкнутым траекториям под действием линейных преобразований плоскости, случай поля тяготения. Понижение порядка дифференциального уравнения при наличии симметрии.

(*) Разрешение особенностей дифференциальных уравнений.

(*) Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной: пространства 1-струй, контактная структура, регулярные и особые точки криминанта и дискриминантная кривая. Пример: уравнения Клеро; преобразования Лежандра, проективная двойственность, сопряжённые нормы; семейства плоских кривых и их огибающие. Регулярные особые точки дифференциального уравнения. Нормальная форма дифференциального уравнения первого порядка, не разрешённого относительно производной.

(*) Пример: анализ уравнения Шрёдингера. Оператор монодромии, вещественная симплектическая группа второго порядка, коэффициенты прохождения и отражения, матрица рассеяния, понятие об обратной задаче теории рассеяния, стационарные уровни и связанные состояния.

Тема 2. Линейные динамические системы с непрерывным и дискретным временем. Классификация фазовых портретов.

2.1. Одномерные линейные ДС с непрерывным и дискретным временем

Понятие линейной динамической системы. Аффинные (линейные стационарные неоднородные) системы и их сведение к линейным.

Случай одномерной системы: явное представление потока (каскада) в виде экспоненты (геометрической прогрессии). Понятие об устойчивости движения.

2.2. Двумерные и многомерные линейные автономные детерминированные ДС с непрерывным временем

Разрешающий оператор линейного дифференциального уравнения в многомерном пространстве как операторная экспонента. Простые линейные системы. Фазовые портреты двумерных линейных динамических систем с непрерывным временем (узел, дикритический узел, фокус, центр). Непростые системы. Понятие о ситуациях общего положения. Линейные динамические системы в многомерных пространствах: нормальная жорданова форма матрицы и возможность редукции к подсистемам. Топологические инварианты и топологическая классификация линейных стационарных систем.

Понятия устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости решения дифференциального уравнения. Критерии устойчивости для случая линейных динамических систем.

2.3. Линейные отображения многомерных пространств

Линейные динамические системы с дискретным временем (линейные однородные разностные уравнения). Фазовые портреты (типы орбит). Критерии устойчивости.

Тема 3. Нелинейные динамические системы: качественная теория..

3.1. **Одномерные нелинейные автономные ДС: различные методы исследования**

Нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка: качественная теория.

Неподвижные точки, линеаризация в окрестности неподвижной точки, фазовые портреты и их классификация. Сравнение фазового портрета и семейства интегральных кривых. Аттракторы и репеллеры

3.2. . Автономные нелинейные ДС на плоскости и их линеаризация. Неподвижные точки и предельные циклы

Нелинейные двумерные динамические системы. Неподвижные (особые) точки, линеаризация в окрестности особой точки, простые особые точки, теорема о линеаризации, гиперболические особые точки, аттракторы и репеллеры. Поведение нелинейной системы в окрестности непростой особой точки. Асимптотически устойчивые, нейтрально устойчивые и неустойчивые особые точки.

3.3. Основы теории устойчивости динамических систем и теории возмущений: общий случай

Глобальное поведение нелинейных динамических систем. Обыкновенные точки нелинейной двумерной системы: теорема о трубке траекторий (о выпрямлении векторного поля). Первые интегралы и консервативные системы. Предельные циклы двумерной нелинейной системы; устойчивые, полуустойчивые и неустойчивые предельные циклы. Положительно инвариантные множества и существование предельных циклов. Сепаратрисы.

Устойчивое и неустойчивое многообразия динамической системы. Устойчивое и неустойчивое многообразия линеаризованной системы. Функции Ляпунова и доказательство теоремы о линеаризации динамической системы.

Малое возмущение динамической системы. Понятие о методе усреднения.

3.4. **Понятие о бифуркациях динамических систем. Детерминированный хаос**

Нормальная форма отображения в окрестности неподвижной точки. Случаи общего положения. Устранение центров и непростых особых точек малым шевелением.

(*) Семейства динамических систем, зависящие от параметров, и неустранимость негиперболических точек. Понятие о трансверсальности многообразий и теоремах трансверсальности. Примеры бифуркации непростых особых точек векторного поля при малых шевелениях.

(*) Многогранники Ньютона и смешанный объём. Применение многогранника Ньютона к анализу кратности особой точки векторного поля.

(*) Матрицы, зависящие от параметров: версальные деформации и построение бифуркационных диаграмм. Декремент-диаграммы. Анализ бифуркаций фазового портрета динамической системы.

Бифуркационные диаграммы для дискретных динамических систем. Бифуркация рождения цикла, бифуркация удвоения цикла. Понятие о детерминированном хаосе.

Тема 4. От случайных событий и случайных величин – к случайным процессам.

4.1. **Вероятностные пространства. Условная вероятность, независимость событий**. Аксиоматическое определение вероятности и его связь со статистическим определением. Сигма-алгебра случайных событий. Дискретные и континуальные вероятностные пространства. Произведение вероятностных пространств. Схемы равновероятных элементарных событий для дискретных и континуальных вероятностных пространств. Условная вероятность и вероятностные графы. Независимые случайные события. Формула полной вероятности, формула Байеса.

4.2. **Случайные величины и случайные векторы. Совместные распределения вероятностей, условные математические ожидания**. Скалярная случайная величина и её закон распределения. Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины, плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины. Числовые характеристики случайных величин. Интеграл Стилтьеса и вычисление характеристик случайных величин общего вида. Случайные векторы (двумерные и многомерные случайные величины), совместные распределения вероятности и плотности вероятности, условные распределения и условные математические ожидания. Зависимость и независимость компонент случайного вектора.

4.3. **Основные понятия теории случайных процессов**. Поток сигма-алгебр. Случайные последовательности и случайные функции. Реализация случайного процесса. Совместные конечномерные распределения. Случайные процессы с независимыми приращениями. Условное математическое ожидание. Понятие мартингала. Субмартингалы и супермартингалы. Мартингалы как модель «эффективного рынка».

Тема 5. Марковские процессы

Марковское свойство случайного процесса.

5.1. Цепи Маркова. Основные понятия. Однородные цепи Маркова. Матрица переходных вероятностей, вероятности перехода за несколько шагов. Классификация состояний. Предельное распределение вероятностей. Эргодические цепи Маркова. Невозвратные состояния, поглощающие состояния, периодические цепи. Алгебраическая трактовка конечных цепей Маркова (случайные блуждания с отражающими экранами). Марковские цепи как модели процессов.

5.2. Простейшие марковские процессы с непрерывным временем. Случай дискретного пространства состояний. Основные понятия. Потоки событий. Ординарные стационарные потоки без последействия (простейшие потоки). Плотности вероятностей перехода. Вероятности перехода за несколько шагов. Дифференциальные уравнения Колмогорова для нахождения распределения вероятностей. Пуассоновский процесс. Процессы размножения и гибели. Основные понятия и результаты теории массового обслуживания (одноканальные и многоканальные системы массового обслуживания с отказами и с очередями).

5.3. Понятие о марковских процессах с непрерывным временем и континуальным пространством состояний. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Вероятности перехода. Понятие о стохастических дифференциальных уравнениях.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Общий объем самостоятельной работы магистрантов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную (107 часов) самостоятельную работу в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется преимущественно в малых группах, с использованием технологий взаимообучения. Дидактические материалы для организации работы разрабатываются самими магистрантами в ходе внеаудиторной самостоятельной работы (обмен заданиями между малыми группами).

Внеаудиторная самостоятельная работа нацелена на диагностику и совершенствование умений магистрантов осваивать теоретические и прикладные разделы математики. Эта деятельность включает также разработку консультационных материалов по отдельным темам, решение задач, в том числе исследовательского характера. Соответствующие источники указаны в разделе 6, выбор осуществляет преподаватель. Кроме того, предполагается разработка магистрантами примерных программ проектно-исследовательских работ старшеклассников, посвящённых проблематике детерминированных динамических систем с дискретным и непрерывным временем и случайных процессов.

Перечень рассматриваемых ресурсов пополняют в ходе освоения дисциплины сами магистранты, т.е. комплект дидактических материалов окончательно формируется уже в ходе реализации программы (что соответствует системно-деятельностному подходу к организации образования).

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине «Динамические системы»

1. Задания по отдельным темам, связанным с динамическими системами (разрабатываются магистрантами; предлагаются для решения другим малым группам; решения проверяются магистрантами). Оценивается качество разработки заданий; качество разработки критериев оценивания; правильность решения задач; качество проверки решений.
2. Консультационные материалы по отдельным темам/методам решения задач, связанных с дифференциальными и разностными уравнениями (качественная теория, теория устойчивости, теория возмущений, теория бифуркаций; разрабатываются и представляются в виде электронной презентации, примерная тематика см. выше).
3. Задания контрольно-измерительных материалов КИМ ЕГЭ по темам, связанным с последовательностями.
4. Задачи на исследование динамических систем различными способами (явное решение начальной задачи для дифференциального или разностного уравнения, качественный анализ фазового портрета, использование системы первого приближения, использование признаков устойчивости/ неустойчивости) и сравнение результатов.
5. Материалы научных и научно-популярных статей и книг по тематике, связанной со случайными процессами с дискретным и непрерывным временем (контроль понимания математического текста).
6. Материалы презентаций и видеолекций, посвящённых проблемам современной стохастической математики, в том теории случайных процессов, доступным по постановке учащимся старших классов. Перечень вопросов по содержанию лекций.
7. Перечень вопросов к конкретному математическому тексту (статья, фрагмент монографии, фрагмент научно-популярной книги), составленный магистрантом, углублённо изучавшим этот текст.
8. Презентации по отдельным направлениям математических исследований (по материалам статей, монографий и др., изучавшимся магистрантами, с привлечением дополнительных источников информации – «пререквизитов»); разрабатываются

магистрантами в рамках подготовки к зачёту по дисциплине. Рекомендуется (но не является обязательным) представление содержания материала также в виде ментальной карты.

9. Задачи по темам «Цепи Маркова», «Марковские процессы с непрерывным временем», «Одномерные случайные блуждания», «Элементы теории массового обслуживания», составленные магистрантами (предлагаются для решения другим микрогруппам, решения проверяются магистрантами микрогруппы, предложившей задачу, и обсуждаются затем фронтально).

10. Программы мини-исследований школьников или студентов бакалавриата по темам, связанным со случайными процессами (разрабатываются магистрантами).

ОС-1. Самостоятельная работа

1.1. Выберите из числа предложенных статей и разделов книг по стохастическим динамическим системам одну работу для подробного изучения. Разберите содержание работы. Подготовьте реферативную статью (не более 1000 слов) по изученной работе.

1.2. Составьте список вопросов по содержанию изученной работы – тех, которые возникли у Вас при её чтении. Вопросы могут относиться к определениям понятий, использованных в работе, к формулировкам утверждений и их модификациям, к деталям рассуждений, приведённых в работе, к возможностям применения результатов.

1.3. Представьте содержание изученной работы в виде презентации для ознакомления с предметом студентов магистратуры. В презентации необходимо привести все необходимые для понимания содержания работы определения и факты, постановки задач, формулировки основных результатов, схему доказательства хотя бы одного из них.

1.4. (по желанию) Представьте содержание изученной работы и связанных с ней понятий в форме ментальной карты.

ОС-2. Самостоятельная работа

Вариант 1. В магазин с двумя продавцами заходит в среднем 10 покупателей в час, средняя скорость обслуживания для одного продавца – 10 покупателей в час. Определите вероятностные характеристики системы, если ожидать своей очереди в данном магазине будут одновременно не более 2 покупателей.

Вариант 2. На автозаправочной станции имеется 4 заправочные колонки, заправка машины длится в среднем 3 минуты. Интенсивность потока подъезжающих к станции машин – одна машина в минуту. Если все колонки заняты, машины ожидают очереди. Найдите вероятность простоя данной автозаправочной станции, среднее количество занятых колонок и абсолютную пропускную способность, если в очередь могут встать не более 2 машин.

ОС-3. Контрольная работа (часть заданий выносится на внеадиторное время).

Примерные задания

1. Для заданного дифференциального уравнения первого порядка найдите положения равновесия, изобразите фазовые линии и эскизы интегральных кривых. Проверьте ответ, найдя общее решение уравнения. Укажите тип положений равновесия. $x'(t) = x^4 - 5x^2 + 4;$

2. Найдите положение равновесия (стационарное решение $x(t) = \text{const}, y(t) = \text{const}$) и общее решение системы дифференциальных уравнений. Нарисуйте фазовый портрет системы. Укажите тип фазового портрета и положения равновесия как особой точки

системы (узел, седло, фокус, центр). Исследуйте положение равновесия на устойчивость (укажите, является ли оно асимптотически устойчивым; устойчивым по Ляпунову; неустойчивым).

$$\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = x - 2y; \end{cases}$$

3. Найдите положения равновесия (стационарные решения) нелинейной плоской динамической системы. Запишите систему первого приближения для каждой из неподвижных точек. Найдите общие решения линеаризованной системы (систем) и общее решение исходной системы. Проанализируйте неподвижные точки исходной системы и линеаризованных систем на устойчивость. Попробуйте изобразить фазовый портрет исходной системы. Совпадают ли качественно фазовые портреты системы и её линеаризаций в окрестности неподвижных точек? Если нет, то чем это можно объяснить?

$$\begin{cases} x' = xy + y^2, \\ y' = 2 - 2y; \end{cases}$$

4. Тривиальное решение ($y(x) = 0$) линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется устойчивым по Ляпунову (асимптотически устойчивым, неустойчивым), если положение равновесия соответствующей нормальной системы уравнений является устойчивым по Ляпунову (соответственно асимптотически устойчивым или неустойчивым). Исследуйте на устойчивость тривиальное решение уравнения: $y'' + 9y = 0$;
5. Дано разностное уравнение первого порядка. Найдите положения равновесия (стационарные решения $x_n = \mathrm{const}$) уравнения. Запишите уравнение первого приближения (линеаризованное уравнение) в окрестности каждого положения равновесия. Исследуйте положения равновесия на устойчивость. Нарисуйте диаграмму Ламерея. Попытайтесь исследовать возможные типы орбит при помощи динамических таблиц, по возможности изобразите эскизы орбит. $x_{n+1} = 2 - x_n^2$;
6. Найдите положение равновесия (стационарное решение $x_n = \mathrm{const}, y_n = \mathrm{const}$) и общее решение линейной автономной системы разностных уравнений. Укажите типы орбит и исследуйте положение равновесия на устойчивость.

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n - 2y_n; \end{cases},$$

7. Найдите общее решение линейного разностного уравнения, исследуйте его на устойчивость. $x_{n+2} = 1 + x_{n+1} + x_n$;
8. Рассмотрим одномерную динамическую систему, зависящую от параметра:

$$x'(t) = x^3 - ax.$$

Исследуйте изменение фазового портрета в зависимости от значений параметра a. Решите аналогичную задачу для одномерной системы с дискретным временем $x_{n+1} = x_n^3 - ax_n$.

ОС-4. Выступление с докладом по микрогруппам.

Примерный перечень тем докладов:

1. Модели радиоактивного распада, охлаждения нагретого тела, торможения и разгона при движении, другие примеры экспоненциальных процессов в физике и химии.
2. Простейшие балансовые модели (засоление водоёма с заливом, простейшая энергетическая модель сердца и др.)
3. Модели роста популяции (дискретные и непрерывные): беспрепятственное размножение, модель Ферхюльста, другие уточнения.
4. Модели динамики популяции (дискретные и непрерывные) с учётом возрастной структуры популяции.

5. Модели многоступенчатого управления организационными системами (дискретные и непрерывные).
6. Модели динамики популяции (дискретные и непрерывные) с учётом внешнего воздействия (лимитированный отлов).
7. Модели линейных и нелинейных колебаний (в механике и электродинамике). Осциллятор Ван дер Поля.
8. Модели динамики взаимодействующих популяций (дискретные и непрерывные): модель “хищник-жертва”, модель борьбы за ресурсы и др.
9. Детерминированные модели водных экосистем.
10. Детерминированные модели развития предприятия, монополии, дуополии и олигополии.
11. Детерминированные модели развития экономики в условиях стабильности и в условиях кризиса.
12. Детерминированные модели исторической динамики.

ОС-5. Самостоятельная работа

1. На пункт связи с двумя каналами поступает поток звонков (в среднем 2 звонка в минуту), средняя продолжительность разговора – 3 минуты. Если оба канала заняты, заявка получает отказ.

а) составить схему переходов и систему уравнений Колмогорова-Эрланга;

б) найти p_0, p_1, p_2 для системы, работающей в установившемся режиме, а также вероятность отказа и среднее число занятых каналов.

2. В магазин с двумя кассами заходит в среднем 3 покупателя в минуту, среднее время обслуживания ½ минуты. Определить вероятность простоя, среднюю длину очереди, среднее время, проводимое покупателем в очереди.

ОС-6 Творческая разработка

Разрабатывается программа элективного курса или проектно-исследовательской работы для школьников по тематике применения математики в теории принятия решений. Делается выступление, представляющее фрагмент мероприятия, программа сдается в письменной форме. Составляются контрольно-измерительные материалы по теме занятия в форме тестов и/или кейс-заданий.

ОС-7 Тест

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Глухова Н.В. Математические модели для магистров-биологов: учебное пособие. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. – 90 с. (Электронное учебное пособие)
2. Теория вероятностей с элементами математической статистики и анализа систем массового обслуживания. Часть 2. Математическая статистика. Элементы теории случайных процессов и теории массового обслуживания. Учебное пособие для студентов специальности «Управление персоналом» / сост. Н.А. Волкова, Н.В. Глухова. – Ульяновск: УлГПУ, 2010. – 76 с.

9. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Цель проведения аттестации – диагностика сформированности запланированных образовательных результатов. Для проверки освоения программы дисциплины «Динамические системы» используются технологии формирующего оценивания (текущая

аттестация) и суммативного оценивания (промежуточная аттестация в форме экзамена, завершающая изучение дисциплины).

Оценочными средствами текущего оценивания являются: выступление с мини-докладом, участие в работе микрогруппы, в коллективном исследовании, в работе педагогической мастерской. Контроль формирования компетенций ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1, ОС-2, ОС-5 Самостоятельная работа. ОС-3. Контрольная работа. ОС-4 Выступление с докладом. ОС-6. Творческая разработка. Ос-7. Тест.	ОР-1. знает принципы и способы самоорганизации как основы саморазвития личности, средства приобретения новых знаний и умений с целью совершенствования своей деятельности ОР-2. Умеет проектировать траектории профессионального и личностного роста, определяет приоритеты собственной деятельности, выстраивает планы их достижения ОР-3. Владеет рефлексивными методами в процессе оценки разнообразных ресурсов (личностных, психофизиологических, ситуативных, временных и т.д.), используемых для решения задач самоорганизации и саморазвития. ОР-4. знает структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-методического обеспечения современного процесса обучения математике. ОР-5 умеет проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-8 Экзамен в форме устного собеседования	

Промежуточная аттестация (экзамен) проводится в форме участия в учебной конференции (публичная презентация самостоятельно разработанного дидактического материала по одному из вопросов математической экономики (выбор темы осуществляется магистрантами по согласованию с преподавателем).

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-8. Программа экзамена по дисциплине

1. Динамические системы и операторы эволюции. Динамические системы с непрерывным и дискретным временем. Классификация динамических систем.
2. Векторные поля, автономные дифференциальные уравнения, интегральные кривые, фазовые кривые. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Локальные фазовые потоки.
3. (*) Диффеоморфизмы областей евклидова пространства и фазовые потоки. Локальные фазовые потоки. Теорема о выпрямлении векторного поля.
4. Рекуррентно заданные последовательности, разностные уравнения, орбиты точек. Существование и единственность решения.
5. (*) Связь между дифференциальными и разностными уравнениями. Ломаные Эйлера. Методы Рунге-Кутта.
6. Линейные дифференциальные уравнения: глобальная теорема существования и единственности. Структура множества решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Структура множества решений нормальной системы линейных однородных дифференциальных уравнений.
7. Структура множества решений линейного однородного разностного уравнения n-го порядка. Линейные преобразования векторов n-мерного пространства и определяемые ими рекуррентные соотношения.
8. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: построение фундаментальной системы решений.
9. Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами: построение фундаментальной матрицы.
10. (*) Фазовые потоки линейных векторных полей и экспоненты линейных операторов.
11. (*) Нормальная жорданова форма матрицы и построение фундаментальной матрицы соответствующей системы линейных однородных дифференциальных уравнений.
12. Линейные однородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами: построение фундаментальной системы решений.
13. Одномерные линейные динамические системы с непрерывным временем: интегральные кривые и фазовые кривые.
14. Типы фазовых портретов двумерных линейных динамических систем с непрерывным временем.
15. Асимптотическая устойчивость и устойчивость по Ляпунову. Топологическая классификация двумерных линейных динамических систем с непрерывным временем.
16. Исследование устойчивости неподвижной точки линейной многомерной динамической системы с помощью собственных значений матрицы системы.
17. Линейные однородные n-мерные системы с дискретным временем: анализ зависимости от времени.
18. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения: структура множества решений. Подбор частного решения для неоднородности специального вида (квазиполинома).
19. Особые точки векторного поля и стационарные решения дифференциального уравнения (положения равновесия). Линеаризация поля (дифференциального уравнения) в окрестности особой точки.

20. Качественный анализ обыкновенных дифференциальных уравнений (случай одномерных динамических систем). Аттракторы, репеллеры, шунты.
21. (*) Одномерные нелинейные динамические системы с дискретным временем: неподвижные точки, рождение циклов.
22. Качественный анализ обыкновенных дифференциальных уравнений (случай двумерных динамических систем). Типы положений равновесия. Теорема Ляпунова об устойчивости.
23. (*) Предельные циклы двумерной динамической системы с непрерывным временем.
24. (*) Пример нелинейной динамической системы: уравнения Лоттки-Вольтерра.
25. Комбинаторный и алгебраический подходы в анализе одномерных случайных блужданий.
26. Примеры случайных блужданий на плоскости.
27. Задача о разорении как модель процессов различной природы.
28. Задача о разорении и диффузионные процессы.
29. (*) Винеровский случайный процесс.
30. Процессы размножения и гибели.
31. (*) Задача о разборчивой невесте.
32. Марковские цепи как модель процессов различной природы.
33. Марковские процессы с непрерывным временем и дифференциальные уравнения.
34. Одноканальная и многоканальные системы массового обслуживания с отказами.
35. Одноканальная и многоканальные системы массового обслуживания с очередью.

ФОРМИРОВАНИЕ БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ РАБОТЫ МАГИСТРАНТА

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
1 семестр	Разбалловка по видам работ	1 х 3=3 балла	20 х 1= 20 баллов	349 баллов	128 баллов
	Суммарный макс. балл	3 балла Max	23 баллов max	372 балла max	500 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

По итогам освоения дисциплины «Динамические системы», которая изучается в 1 семестре и трудоёмкость которой составляет 5 ЗЕ, магистрант набирает определённое количество баллов, которое соответствует результату «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно» согласно следующей таблице:

Итоговое количество баллов	**Итоговая отметка**
0-250	неудовлетворительно
251-350	удовлетворительно
351-450	хорошо
451-500	отлично

10. **Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Дисциплина нацелена на формирование прочных знаний по ряду разделов математики, находящихся «на стыке» различных математических дисциплин и тесно связанных с приложениями, на осознание связей между далекими на первый взгляд задачами, в том числе некоторыми задачами элементарной и высшей математики. В рамках единого курса собраны разделы, каждый из которых мог бы изучаться в отдельном семестровом или годичном курсе. Это делает невозможным одинаково глубокое изучение всех вопросов; предполагается освоение базовых понятий и идей и более подробное знакомство с разделом, наиболее близким к тематике самостоятельных исследований каждого магистранта. Магистрант может выбрать необходимый для него уровень овладения учебным материалом дисциплины с углублением в один из разделов программы в зависимости от его научных интересов и тематики самостоятельной исследовательской работы.

При этом базовые понятия должны быть изложены вполне корректно, на соответствующем уровне строгости и на основе использования изученных в рамках бакалавриата разделов математики. С другой стороны, важно и рассмотрение конкретных примеров применения этих концепций к частным и достаточно наглядным объектам, часть из которых доступна пониманию школьников (динамические системы с дискретным временем, дискретные цепи Маркова и др.). Основное время, отведенное на аудиторные занятия, предлагается посвятить формированию у будущих магистров основ умений, связанных с математическими исследованиями (в частности, с «переводом» проблем с одного математического языка на другой), в естественной связи с актуализацией и расширением понятийного аппарата, необходимого для их проведения.

В рамках разделов, посвящённых детерминированным динамическим системам, предполагается обобщающее изучение разделов математики, связанных с дифференциальными и разностными уравнениями, а также – по желанию магистрантов - первоначальное знакомство с иными видами ДС (уравнениями с отклоняющимся аргументом, функциональными и дифференциально-функциональными уравнениями, интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями). Предполагается как сопоставление классических «операциональных» подходов к изучению различных классов уравнений и соответствующих начальных и граничных задач и формирование единой терминологии, включая понятия, связанные с устойчивостью и бифуркациями, так и рассмотрение конкретных примеров детерминированных динамических систем различного происхождения. Предлагается уделить внимание соотношению внешней мотивации и внутренней логики развития математических понятий, положительным и отрицательным сторонах «структуралистского» подхода к построению математического знания, ср. программу дисциплины «Методология и методы научных исследований (специальные науки)». В данном случае общие методологические аспекты преподавания и изучения математики должны рассматриваться на примере конкретных проблем теории динамических систем, что весьма естественно с учетом её тесных связей с приложениями.

В рамках разделов, посвящённых стохастическим динамическим системам, предполагается первоначальное знакомство с некоторыми направлениями развития современной «стохастической» математики, без требований исчерпывающей полноты такого знакомства. На лекциях предполагается краткое изложение логики развития теории вероятностей в её взаимосвязях с другими разделами математики, выделение сквозных идей дисциплины, демонстрация ее связей с приложениями. При этом акцент должен быть сделан именно на методологических особенностях и важнейших методах получения результатов в теории случайных процессов – как общих с теорией детерминированных динамических систем, так и специфических. Могут быть указаны несколько проблем, ключевых для становления теории случайных процессов либо актуальных для приложений, самостоятельное рассмотрение которых предлагается студентам. Проблемы желательно подбирать так, чтобы их решение демонстрировало пользу переформулировки

исходной задачи и типичные элементы дальнейшего исследования. С другой стороны, эти проблемы должны быть связаны с интересами конкретного магистранта.

Самостоятельное изучение предложенных проблем студентами предполагает чтение не только учебной, но и аутентичной математической литературы – прежде всего научно-популярных книг, адресованных школьникам и студентам младших курсов вузов, но также и оригинальных статей, обзоров по указанной тематике, монографий. Отчет по какой-либо из изученных работ (конспект-презентация с необходимыми пояснениями и подробным разбором доказательств) является одним из контрольных заданий по дисциплине. Затем обсуждение этих проблем с акцентом на ключевых идеях и методах их решения может быть проведено на практическом (семинарском) занятии в форме коллективного исследования; итогом такого исследования должно быть выделение некоторых общих приемов работы с проблемой из области теории динамических систем (педагогическая мастерская).

На практических занятиях по каждому разделу программы предполагается активная работа студентов с теоретическим материалом, как известным им из математических курсов бакалавриата (цель в этом случае – систематизация материала и поиск перспективных методических приёмов его изложения школьникам или студентам), так и новым. Общие вопросы теории, тесно связанные с методологией современной математики в целом, предлагается вынести в большой степени на самостоятельное изучение. Обсуждение этих вопросов на аудиторных (практических/ семинарских) занятиях не должно сводиться к докладам студентов на общие темы, предлагается тесно связывать абстрактные построения с решением конкретных задач. Среди этих задач должны быть, в частности, и доступные (по постановке проблемы) школьникам, достаточное внимание должно быть уделено их связям с общей логической линией курса. Как преподавателю, так и студентам во время их сообщений рекомендуется применять проблемный стиль изложения материала, ставить вопросы перед аудиторией, в том числе для последующего обдумывания, предусматривать время для ответа на вопросы слушателей.

Еще одной сверхзадачей всего цикла занятий по дисциплине «*Динамические системы*» является демонстрация фрагментов методики, направленной на формирование культуры осмысленного учения и начальных исследовательских навыков в области математики.

Контрольное задание по дисциплине «*Динамические системы*» состоит из домашней и аудиторной частей; последняя может включать задания тестового характера (проверка владения понятийным аппаратом) и задания на установление истинности утверждений, формулирование результатов, контроль правильности рассуждений и пр. – т.е. мини-исследование.

Планы практических занятий

Основное содержание и возможные формы проведения практических занятий указаны в разделе 3.2.

Практическое занятие 1. Примеры построения моделей эволюционирующих систем с непрерывным и с дискретным временем.

Практическое занятие 2. Примеры построения детерминированных и стохастических моделей эволюционирующих систем.

Практическое занятие 3. Одномерные линейные ДС с непрерывным и дискретным временем.

Практическое занятие 4-5. Двумерные и многомерные линейные автономные детерминированные ДС с непрерывным временем.

Практическое занятие 6. Линейные отображения многомерных пространств.

Практическое занятие 7 . Одномерные нелинейные автономные ДС: различные методы исследования.

Практическое занятие 8-9. Автономные нелинейные ДС на плоскости и их линеаризация. Неподвижные точки и предельные циклы.

Практическое занятие 10. Основы теории устойчивости динамических систем и теории возмущений: общий случай. Понятие о бифуркациях динамических систем. Детерминированный хаос.

Практическое занятие 11-12. Вероятностные пространства. Условная вероятность, независимость событий **.**

Практическое занятие 13-14. Случайные величины и случайные векторы. Совместные распределения вероятностей, условные математические ожидания.

Практическое занятие 15. Основные понятия теории случайных процессов.

Практическое занятие 16-17. Цепи Маркова.

Практическое занятие 18. Простейшие марковские процессы с непрерывным временем. Случай дискретного пространства состояний.

Практическое занятие 19. Понятие о марковских процессах с непрерывным временем и континуальным пространством состояний.

Практическое занятие 20. Итоговое занятие.

11. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Коробова, Л. А. Теория динамических систем (теория и практика): учебное пособие / Л. А. Коробова, Ю. А. Сафонова ; науч. ред. Л. А. Коробова ; Воронежский государственный университет инженерных технологий. – Воронеж : Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2017. – 100 с. : граф., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=482071.

2. Братусь, А. С. Динамические системы и модели биологии : учебное пособие / А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. – Москва : Физматлит, 2009. – 400 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=67304

3. Специальные разделы теории управления: оптимальное управление динамическими системами : учебное пособие / Ю. Ю. Громов, О. Г. Иванова, В. В. Алексеев [и др.] ; Тамбовский государственный технический университет. – Тамбов : Тамбовский государственный технический университет (ТГТУ), 2012. – 108 с. : ил.,табл., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=277799

Дополнительная литература

4. Рыков, В. В. Основы теории массового обслуживания (Основной курс: марковские модели, методы марковизации) : учебное пособие / В.В. Рыков, Д.В. Козырев. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 223 с. — (Высшее образование). -

ISBN 978-5-16-010945-9. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1290321)

5. Левенштам, В. Б. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми. (Усреднение и асимптотики) / Левенштам В.Б. - Ростов-на-Дону:Издательство ЮФУ, 2008. - 368 с. ISBN 978-5-9275-0414-5. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/555586

6. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учебник : [16+] / Л. Э. Эльсгольц. – Москва : б.и., 1969. – 425 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455165

Интернет-ресурсы

- Сайт Московского центра непрерывного математического образования. URL: https://www.mccme.ru .
- Математические этюды [Электронный ресурс]. URL: http://www.etudes.ru .
- «Математическая составляющая» [Электронный ресурс]. URL: http://book.etudes.ru
- Общероссийский математический портал [Электронный ресурс]. URL: http://www.mathnet.ru .
- Мир математических уравнений [Электронный ресурс]. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm .
- Вероятность в школе [Электронный ресурс]. URL: http://ptlab.mccme.ru/.
- Прикладная математика [Электронный ресурс]. URL: http://primat.org

Лист согласования рабочей программы
учебной дисциплины (практики)

Направление подготовки: 44.04.01 Педагогическое образование
Профиль: Методология математического образования
Рабочая программа Динамические системы
Составитель: Н.А. Волкова– Ульяновск: УлГПУ, 2023.

Программа составлена с учетом федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, профиль подготовки «Методология математического образования» утверждённого Министерством образования и науки Российской Федерации, и в соответствии с учебным планом.

Составители _____Н.А. Волкова (подпись)

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) одобрена на заседании кафедры высшей математики «23» мая 2023г., протокол № 10
Заведующий кафедрой

_____ И.В. Столярова 23.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) согласована с библиотекой
Сотрудник библиотеки

_____ Ю.Б. Марсакова 19.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Программа рассмотрена и одобрена на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования "26" мая 2023 г., протокол № 5
Председатель ученого совета факультета физико-математического и технологического образования

_____ Е.М. Громова 26.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*