Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«25» июня 2021г.

ТЕОРИЯ МНОГООБРАЗИЙ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕРЫ

Программа учебной дисциплины модуля
«Содержательные аспекты современного математического образования»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки
44.04.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Методология математического образования

(очная форма обучения)

Составитель: Фолиадова Е.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория многообразий и общая теория меры» относится к дисциплинам модуля «Содержательные аспекты современного математического образования» Блока 1. *Дисциплины (модули)* части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Методология математического образования», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках математических дисциплин образовательных программ бакалавриата, а также дисциплины Б1.В.01.01. «Динамические системы», дисциплин по выбору Б1.В.01.ДВ.01.01/02/03 «Задачи оптимизации и их математические модели»/ «Вариационные методы и модели»/ «Теория принятия решений».

Результаты освоения дисциплины являются основой для научно-исследовательской работы магистрантов.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Актуальность включения дисциплины в ОПОП определяется следующими обстоятельствами:

- важной ролью общематематического понятия многообразия и связанных с ним понятий размерности и меры как в высшей, так и в элементарной математике, а также в общенаучном и общекультурном контексте;
- поэтапным характером формирования представлений о линиях и поверхностях, фигурах на плоскости и телах, об измерении и вычислении длин, площадей, объемов на различных этапах математического образования; неизбежным смешением в сознании магистрантов различных (и построенных на различном уровне строгости) подходов к введению соответствующих понятий;
- наличием различных вариантов построения теории меры в современной математике, активным использованием идей актуальных математических дисциплин при перестройке учебных курсов по теории меры и теории интеграла;
- значением теории меры для теории вероятностей, для спектральной теории операторов, для различных разделов физики, в частности, для исследований в области космологии;
- прикладным значением теории меры, необходимостью выявления связей между абстрактными конструкциями современной математики и ее приложениями.

Целями освоения дисциплины «*Теория многообразий и общая теория меры*» являются:

- систематизация и углубление представлений магистрантов о специфике математического знания, месте и роли математики в познании мира, о единстве математики в ее многообразии;
- продолжение формирования представлений о процессе математического исследования, его важнейших чертах, особенностях постановки проблемы и представления результатов;
- формирование понятийного аппарата в области геометрической и аналитической теории многообразий, в области теории меры, необходимого при проведении самостоятельных исследований;
- формирование умения работать с математическими объектами высокого уровня абстракции, развитие соответствующего типа мышления.

В соответствии с этим при преподавании дисциплины ставятся следующие **задачи**:

- рассмотрение конкретных вещественных многообразий (кривых, поверхностей и их многомерных аналогов) с точки зрения общей теории;
- систематизация и углубление знаний по теории интегрирования в многомерных пространствах;
- освоение языка современной абстрактной теории меры и теории интеграла, применяемого в областях, близких к научному направлению кафедры высшей математики;
- формирование умений, связанных с чтением учебной математической литературы достаточно высокого уровня сложности;
- формирование представлений о связи между различными разделами математики, умений, связанных с переводом задачи с одного математического языка на другой;
- формирование приемов мыслительной деятельности, связанных с обобщением (абстрагированием) и конкретизацией математических понятий, продолжение освоения языка абстрактной алгебры и соответствующего стиля рассуждений;
- формирование методической грамотности и умений анализировать различные варианты построения математической теории, проектировать на основе избранного варианта учебный процесс для конкретной целевой аудитории.

В результате освоения программы магистрант должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

<table>
<tr><th rowspan="2">Компетенция</th><th rowspan="2">Индикаторы достижения компетенции</th><th colspan="3">Образовательные результаты дисциплины
(этапы формирования компетенции)</th></tr>
<tr><th>теоретический</th><th>модельный</th><th>практический</th></tr>
<tr><td rowspan="8">ПК-4</td><td colspan="4">Способен разрабатывать методическое обеспечение предмета «математика», математических дисциплин (модулей) на разных уровнях обучения</td></tr>
<tr><td rowspan="7">ИПК.4.1</td><td colspan="3">Знает: структуру и функции учебно-методического комплекса (УМК) по математике; требования к разработке компонентов УМК по математике; требования к использованию УМК в процессе обучения математике образовательных организациях соответствующих уровней образования; характеристики достижений обучающихся в контексте обучения математике (согласно ФГОС соответствующих уровней образования)</td></tr>
<tr><td>Магистрант знает</td><td>Магистрант умеет</td><td>Магистрант владеет</td></tr>
<tr><td>ОР-1: содержание разделов математики, связанных с понятиями многообразия и меры, на разных ступенях образования</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ОР-2: различные подходы к введению понятий и получению результатов, связанных с многообразиями, мерой, касательными, интегрированием, на разных ступенях образования</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>ОР-3: основные классы и способы решения задач на касательные, задач на вычисление меры объектов, включая историю их становления</td></tr>
</table>

	ИПК.4.2	**Умеет: разрабатывать элементы УМК по математике: дидактические материалы и раздаточные учебные материалы, задания и задачи; применять приемы ориентирования обучающихся в учебном материале, организации работы с математическим текстом, геометрическими чертежами, графиками, числовыми данными, вовлечения обучающихся в работу с УМК по моделированию и тестированию**		
		Магистрант знает	Магистрант умеет	Магистрант владеет
			ОР-4: выделять инвариантное содержание раздела, подлежащее освоению обучающимися, определять его образовательную ценность, выбирать адекватные уровню образования подходы к введению понятий и обоснованию результатов	ОР-7: навыками оформления и проверки решений задач элементарной и высшей математики, связанных с многообразиями и их мерой
			ОР-5: использовать основные идеи теории меры для решения различных математических задач, в том числе задач элементарной математики повышенного уровня сложности;	
			ОР-6: поддерживать при изучении многообразий и меры оптимальное соотношение между достижением понимания на качественном уровне, самостоятельным открытием результатов и освоением готовых формул	
ПК-5	**Способен осуществлять поиск, анализ и обработку научной информации в целях исследования проблем образования в предметной области направленности (профиля) магистратуры**			
	ИПК 5.1	**Знает: источники научной информации, необходимой для обновления содержания образования по дисциплинам (курсам) предметной области направленности (профиля) магистратуры и трансформации процесса обучения; методы работы с научной информацией; приемы дидактической обработки научной информации в целях ее трансформации в учебное содержание**		
		Магистрант знает	Магистрант умеет	Магистрант владеет
		ОР-7: литературные и сетевые источники, позволяющие сопоставлять подходы элементарной и высшей математики к общим понятиям		ОР-10: навыками восприятия математической информации высокого уровня абстракции, построения моделей-интерпретаций абстрактных конструкций,
		ОР-8: приёмы структурирования информации для освоения математического содержания различного уровня абстракции		
		ОР-9: принципы построения теории многообразий и общей теории меры; **имеет представление** о современных направлениях развития теории многообразий и теории меры		

	ИПК 5.2	**Умеет: вести поиск и анализ научной информации; осуществлять дидактическую обработку и адаптацию научных текстов в целях их перевода в учебные материалы**		
		Магистрант знает	Магистрант умеет	Магистрант владеет
			ОР-11: понимать математическое рассуждение, вплоть до доказательства нового математического результата в научной публикации	ОР-14: навыками адаптации математического текста (популярная статья, учебник) в целях ознакомления обучающихся с его основной проблематикой
			ОР-12: осваивать математическое содержание на новом уровне, находя и используя связи с известным материалом	
			ОР-13: выделять и сопоставлять основные подходы к построению базовых математических понятий, представлять их в компактной форме	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоятельная работа, час	
	Трудоемкость						
	Зач. ед.	Часы					
3	5	180	6	40	-	107	Экзамен
Итого:	5	180	6	40	-	107	27

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Отбор математического содержания дисциплины определяется необходимостью знакомства магистрантов с классическими и современными подходами к построению понятий многообразия, меры, интеграла, к решению базовых задач математики. Основное внимание уделяется взаимосвязям различных математических дисциплин, изучающих кривые, поверхности, их многомерные и бесконечномерные обобщения. При этом изучение предлагается проводить на базе методов классического математического анализа, дифференциальной геометрии, функционального анализа и в некоторой степени общей топологии, алгебраической топологии, математической физики, что соответствует профилю аспирантуры при кафедре высшей математики. Изучение соответствующих разделов может быть продолжено на более глубоком уровне в рамках учебного плана аспирантуры по направлению 01.06.01 *Математика. Механика,* профилю 01.01.01 *Вещественный, комплексный и функциональный анализ*.

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
3 семестр				
1. Элементарная теория многообразий размерности 1 и 2.		8	-	22
2. Топологические многообразия и гладкие структуры. Карты и атласы. Размерность и коразмерность.	2	6	-	15
3. Дифференциальные формы на многообразиях. Касательное расслоение. Связность	1	6		15
4. Интегрирование по многообразию. Формула Стокса	1	6		15
5. Основы абстрактной теории меры и интеграла	2	6		15
6. Величины и их меры в школьном курсе математики, в курсе высшей математики		8		25
Всего по дисциплине:	**6**	**40**	**-**	**107**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Тема 1. Элементарная теория многообразий размерности 1 и 2.

Кривые на плоскости, в трехмерном пространстве: параметризовванная кривая (путь), эквивалентные пути, простые пути, гладкие пути, регулярные пути, (жорданова) кривая как класс эквивалентности; множества на плоскости, заданные уравнениями, простая точка множества, неособая точка множества, простая линия; длина кривой, натуральный параметр, кривизна кривой; нормаль плоской кривой, сопровождающий базис Френе плоской кривой, главная нормаль пространственной кривой, соприкасающаяся плоскость, бинормаль, нормальная плоскость, спрямляющая плоскость, сопровождающий базис Френе, кручение пространственной кривой. Поверхности в трехмерном пространстве: параметризованная поверхность, (гладкие регулярные простые) параметризации, эквивалентные параметризации, координаты на поверхности, диффеоморфизмы и замена координат, элементарные поверхности как классы эквивалентности; касательная плоскость элементарной поверхности, касательные векторы; гладкие отображения элементарных поверхностей и их дифференциалы, диффеоморфизмы элементарных поверхностей, дифференциал диффеоморфизма как изоморфизм касательных пространств; первая квадратичная форма поверхности и метрический тензор, длина кривой на поверхности, угол между кривыми на поверхности; площадь поверхности и первая квадратичная форма; вектор нормали к элементарной поверхности и сопровождающий базис поверхности; вторая квадратичная форма поверхности, главные кривизны, полная и средняя кривизна; коэффициенты связности (символы Кристоффеля); графики в трехмерном пространстве, неявное задание поверхности.

Интерактивные формы: Парад кривых и поверхностей (учебная конференция, **ОС-1**).

Тема 2. Топологические многообразия и гладкие структуры. Карты и атласы. Размерность и коразмерность. Касательные пространства. Гладкие отображения многообразий.

Карты в произвольном множестве, носитель карты, локальные координаты; согласованные карты, функции перехода; атлас на множестве, максимальные атласы, гладкие структуры (гладкости), гладкие многообразия (класса r), топологические многообразия, аналитические многообразия. Теорема о неявной функции, теорема о системе неявных функций и гладкие многообразия. Размерность и коразмерность многообразия. Группы прямоугольных матриц, ортогональных матриц, унитарных матриц как гладкие многообразия; многообразия Штифеля и Грассмана. Понятие о матричных группах Ли и их алгебрах Ли как гладких многообразиях. Векторные и тензорные поля на многообразии. Траектории векторного поля. Дифференциальные уравнения на многообразии.

Касательный вектор многообразия (аксиоматическое определение). Касательное пространство в заданной точке. Гладкие отображения многообразий и их дифференциалы. Кокасательное пространство, градиент, производная по вектору. Локальные диффеоморфизмы и их дифференциалы. Теорема о замене локальных координат. Локально плоские в заданной точке отображения (отображения локально постоянного ранга). Погружения (иммерсии) и наложения (субмерсии) многообразий. Регулярные значения отображений, теорема о полном прообразе регулярного значения. Теорема вложения Уитни (без доказательства). Критические точки отображений, теорема Сарда (без доказательства)..

Интерактивные формы: Работа в микрогруппах **(ОС-2)**. Учебная дискуссия «Некоторые классические многообразия, их размерность и свойства» **(ОС-3)**.

Тема 3. Дифференциальные формы на многообразиях. Касательное расслоение. Связность.

Параллельный перенос вектора вдоль пути. Касательное расслоение гладкого многообразия. Понятие аффинной связности. Коэффициенты аффинной связности и примеры вычисления символов Кристоффеля. Перенос векторных и тензорных полей с помощью диффеоморфизмов с одного многообразия на другое. Дифференцирования. Производная Ли тензорного поля по векторному полю. Линейные дифференциальные формы (ковекторные поля) на многообразии. Дифференциальные формы степени p .на многообразии (кососимметрические тензорные поля). Внешнее произведение дифференциальных форм. Внешнее дифференцирование (антидифференцирование) дифференциальных форм. Перенос дифференциальной формы посредством гладкого отображения многообразий. Производная Ли дифференциальной формы. Точные и замкнутые дифференциальные формы, комплекс де Рама, коциклы и кограницы. Лемма Пуанкаре о точности замкнутых форм на открытом кубе.

Интерактивные формы: Семинар переводчиков «Дифференциальные формы на языке математического анализа и на языке алгебраической топологии» **(ОС-4)**.

Тема 4. Интегрирование по многообразию. Формула Стокса.

Множества (жордановой) меры нуль в пространстве R^n. Интеграл (Римана) по кубируемой области пространства R^n. Нуль-множества и кубируемые множества на многообразии. Понятие плотности на многообразии. Интегралы (первого рода) от плотности по паракомпактному многообразию.

Ориентирующие атласы и ориентируемые многообразия; ориентация многообразия и индуцированная ориентация касательного пространства. Дифференциальные формы максимальной степени и плотности. Интеграл от дифференциальной формы максимальной степени (определение с помощью переноса формы). Случаи криволинейных и поверхностных интегралов второго рода в R^3.

*Степень отображения. Теорема о гомотопической инвариантности степени. Ретракты. Теорема о барабане. Теорема Брауэра о неподвижной точке. Теорема о причесывании ежа.

Области с регулярной границей. Ориентация края ориентированного многообразия. Интеграл от дифференциальной формы по границе многообразия. Формула Стокса (для дифференциальных форм произвольной степени). Формулы Стокса в R^3, Остроградского-Гаусса, Грина, Ньютона-Лейбница как частные случаи общей формулы Стокса..

Интерактивные формы: Математический турнир «Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов». **(ОС-5).** Круглый стол «Криволинейные системы координат в n-мерном пространстве. Объемы n-мерных шаров и сфер, цилиндров, конусов» **(ОС-6)**.

Тема 5. Основы абстрактной теории меры и интеграла..

Кольцо множеств, конечно-аддитивные и счетно-аддитивные функции множеств. Кольцо многоугольников, кольцо многогранников, симплексы и конечно-аддитивные инвариантные меры. *Равнообъемность и равносоставленность. *Объемы многогранников и третья проблема Гильберта. *Инвариант Дэна как мера, различающая равновеликие многогранники.

Решетки, булевы алгебры, представления булевых алгебр в виде алгебр подмножеств. Конечно-аддитивные меры на алгебре подмножеств и порожденные ими внешние меры. Множества меры нуль, измеримые множества. *Расстояние между множествами, определяемое мерой; пространство измеримых множеств как пополнение факторалгебры множеств, рассматриваемых с точностью до множества меры нуль, по введенной метрике. Счетно-аддитивные меры, продолжение меры. Мера Лебега как продолжение меры с алгебры борелевских множеств.

Функции, измеримые относительно заданной пары мер. Свойства измеримых функций.

Интеграл Лебега как (однозначно определенный) функционал на классе измеримых функций. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Пространства суммируемых по Лебегу функций.

*Меры и заряды. Теорема Радона-Никодима о представлении заряда. Мера Стилтьеса и интеграл Лебега-Стилтьеса. Прямые произведения мер и теорема Фубини..

Интерактивные формы: Групповая дискуссия «Способы введения понятия меры: проблема выбора уровня абстракции (в зависимости от ступени и уровня обучения)» **(ОС-7)**.

Тема 6. Величины и их меры в школьном курсе математики, в курсе высшей математики.

Величины и их меры в математике: исторический обзор. Изучение понятия площади в школьном курсе математики. Изучение понятия объема в школьном курсе математики. Площадь криволинейной трапеции как задача, приводящая к понятию определенного интеграла (школьный курс математики, курс высшей математики). Различные подходы к введению понятия интеграла Римана; связь между задачами дифференцирования и интегрирования в теории Римана. Определение квадрируемых фигур, кубируемых тел, спрямляемых кривых, квадрируемых поверхностей в курсе математического анализа.

Множества, не измеримые по Жордану, понятие о дробной размерности.
Применение интегрального исчисления к вычислению площадей и объемов в школьном курсе математики, в курсе высшей математики. Физические приложения определенного интеграла (школьный курс математики, курс высшей математики). Различные подходы к введению понятия меры Лебега и интеграла Лебега; связь между задачами дифференцирования и интегрирования в теории Лебега. Дискретные меры, использование аналогии между интегрированием и суммированием. Меры Стилтьеса и интеграл Стилтьеса, возможности их изучения в курсе высшей математики.

Интерактивные формы: Математический турнир «Длины, площади, объемы» (задачи предлагаются магистрантами, **ОС-8**). Методический семинар «Различные подходы к введению понятия определенного интеграла» **(ОС-9)**.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Общий объем самостоятельной работы магистрантов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную (107 часов) самостоятельную работу в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется преимущественно в малых группах, с использованием технологий взаимообучения. Дидактические материалы для организации работы разрабатываются самими магистрантами в ходе внеаудиторной самостоятельной работы (обмен заданиями между малыми группами).

Внеаудиторная самостоятельная работа нацелена на диагностику и совершенствование умений магистрантов осваивать теоретические и прикладные разделы математики. Внеаудиторная самостоятельная работа включает также разработку консультационных материалов по отдельным темам, решение задач, в том числе исследовательского характера, разработку критериев оценивания решений задач, оформление карт для базы задач, относящихся к линиям, плоским фигурам и поверхностям, их мерам.

Перечень рассматриваемых ресурсов пополняют в ходе освоения дисциплины сами магистранты, т.е. комплект дидактических материалов окончательно формируется уже в ходе реализации программы (что соответствует системно-деятельностному подходу к организации образования).

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине «Теория многообразий и общая теория меры»

1. Системы заданий по отдельным темам элементарной и высшей математики, связанным с многообразиями и их мерами (разрабатываются магистрантами; предлагаются для решения другим малым группам; решения проверяются магистрантами). Оценивается качество разработки заданий; качество разработки критериев оценивания; правильность решения задач; качество проверки решений.
2. Консультационные материалы по отдельным темам/методам решения задач, связанных с многоообразиями и их мерами (разрабатываются и представляются в виде электронной презентации, примерная тематика см. выше).
3. Задания контрольно-измерительных материалов КИМ ЕГЭ по темам, связанным с двумерными и трёхмерными геометрическими объектами и их мерами, а также задачи на наибольшие/наименьшие значения величин.
4. Задачи на вычисление интегралов различных типов (криволинейных, поверхностных, двойных, тройных) и их связи между собой согласно формулам Грина, Остроградского-Гаусса, Стокса, а также аналогичные по форме задачи в многомерных пространствах (дифференцирование и интегрирование дифференциальных форм, общая формула Стокса).

Структура контрольных работ по дисциплине

Структура контрольных работ по дисциплине «Теория многообразий и общая теория меры»

1. **Домашняя контрольная работа (ОС-10.1).**
   1.1. Изучить одно из конкретных гладких многообразий (или один из классов многообразий). Форма отчета: презентация (+выступление на практическом занятии, оценивается в рамках практического занятия).
   1.2. Изучить одну из конкретных проблем теории меры и интеграла (по указанию преподавателя), в том числе рассмотреть историю вопроса (по научным обзорам или сетевым материалам). Форма отчета: конспект с пояснениями (+выступление на практическом занятии, оценивается в рамках практического занятия).
   1.3. Решить задачи на приложения интегрального исчисления к вычислению геометрических и физических величин.

2. **Аудиторная контрольная работа (ОС-10.2).**.
   2.1. Тест по основным понятиям теории кривых и поверхностей, теории интегрирования в математическом анализе, теории функций действительной переменной. дифференциальной геометрии**.**
   2.2. Задача повышенного уровня школьного курса математики (КИМ ЕГЭ, олимпиады и т.п.)
   2.3. Мини-исследование: доказать или опровергнуть сформулированное утверждение, в последнем случае скорректировать его; либо: проверить правильность рассуждений, при необходимости скорректировать рассуждения и вывод.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине «Теория многообразий и общая теория меры», указаны также в разделе 5.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Цель проведения аттестации – диагностика сформированности запланированных образовательных результатов. Для проверки освоения программы дисциплины «Теория многообразий и общая теория меры» используются технологии формирующего оценивания (текущая аттестация) и суммативного оценивания (промежуточная аттестация в форме экзамена, завершающая изучение дисциплины).

Разделы (темы) дисциплины	Средства оценивания, используемые для текущего оценивания индикатора формирования компетенции	Показатели формирования компетенции (образовательные результаты)													
		ОР-1	ОР-2	ОР-3	ОР-4	ОР-5	ОР-6	ОР-7	ОР-8	ОР-9	ОР-10	ОР-11	ОР-12	ОР-13	ОР-14
		ПК-4						ПК-5							
		ИПК 4.1			ИПК 4.2			ИПК 5.1				ИПК 5.2			
Элементарная теория многообразий размерности 1 и 2.	ОС-1 Парад кривых и поверхностей (учебная конференция)	+	+				+		+		+	+			
Топологические многообразия и гладкие структуры.	ОС-2 Работа в микрогруппах	+	+				+			+		+			

Карты и атласы. Размерность и коразмерность	ОС-3 Учебная дискуссия	+							+				+	+	
Дифференциальные формы на многообразиях. Касательное расслоение. Связность	ОС-4 Семинар переводчиков		+			+				+	+				+
Интегрирование по многообразию. Формула Стокса	ОС-5 Математический турнир		+			+					+				+
	ОС-6 Круглый стол														
Основы абстрактной теории меры и интеграла	ОС-7 Групповая дискуссия				+			+						+	+
Величины и их меры в школьном курсе математики, в курсе высшей математики	ОС-8 Математический турнир														
	ОС-9 Методический семинар														
	ОС-10.1 (домашняя контрольная работа)	+	+			+		+		+		+	+		+
	ОС-10.2 (аудиторная контрольная работа)		+		+						+			+	
Промежуточная аттестация	ОС-11. Экзамен в форме учебной конференции. Представление и обсуждение докладов														

Оценочными средствами текущего оценивания являются: выступление с мини-докладом, участие в работе микрогруппы, в коллективном исследовании. Контроль формирования компетенций ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

Подробное описание необходимого оборудования (демонстрационного материала), а также процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Промежуточная аттестация (экзамен) проводится в форме собеседования по билету и участия в учебной конференции (публичная презентация самостоятельно разработанного дидактического материала по одному из вопросов теории многообразий и теории меры (выбор темы осуществляется магистрантами по согласованию с преподавателем).

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-11.1. Программа экзамена по дисциплине
«*Теория многообразий и общая теория меры*»

1. Понятие топологического многообразия. Карты и атласы. Многообразие с краем. Размерность многообразия и размерность его края.
2. Понятие гладкого многообразия. Диффеморфизмы гладких многообразий.
3. Касательные векторы и касательные пространства.
4. Пути на многообразии. Перенос вектора вдоль пути. Понятие о связности.

5. Теорема о неявной функции, теорема о системе неявных функций и гладкие многообразия. Размерность и коразмерность.
6. Важнейшие примеры гладких многообразий: кривые и поверхности в трехмерном пространстве.
7. Важнейшие примеры гладких многообразий: группы матриц.
8. Основные понятия тензорного анализа.
9. Дифференциальные формы на многообразии и линейные операции над ними. Внешнее умножение дифференциальных форм.
10. Перенос дифференциальных форм посредством отображения многообразий.
11. Внешнее дифференцирование дифференциальных форм. Точные и замкнутые дифференциальные формы, связь между классами точных и замкнутых дифференциальных форм на заданном многообразии.
12. Плотность. Интеграл плотности по области в n-мерном пространстве (n-кратный интеграл).
13. Ориентируемые многообразия, ориентация. Примеры ориентируемых и неориентируемых многообразий. Ориентация многообразия и ориентация его края.
14. Определение интеграла по ориентированному многообразию (поверхностного интеграла от дифференциальной формы степени m по поверхности размерности m в в n-мерном пространстве) с помощью переноса форм. Случаи криволинейных и поверхностных интегралов в трехмерном пространстве.
15. Интеграл по многообразию и интеграл по его краю. Общая формула Стокса и ее частные случаи.
16. Кольцо множеств, конечно-аддитивные и счетно-аддитивные функции множеств. Понятие меры, понятие счетно-аддитивной меры.
17. Кольцо многоугольников, кольцо многогранников и меры на них.
18. Борелевские алгебры множеств и меры на них.
19. Конструкция лебегова продолжения меры (один из вариантов по выбору магистранта).
20. Сигма-конечные меры. Последовательности измеримых множеств и предельный переход.
21. Измеримые функции и их свойства. Сходимость по мере и сходимость почти всюду.
22. Конструкция интеграла Лебега (один из вариантов по выбору магистранта).
23. Прямые произведения мер, кратные интегралы и теорема Фубини.
24. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
25. Меры и заряды. Теорема Радона-Никодима.

ОС-11.2. ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ТЕМ ДОКЛАДОВ НА УЧЕБНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

«Некоторые классы гладких многообразий»

1. Некоторые замечательные кривые на плоскости.
2. Некоторые замечательные кривые в пространстве.
3. Кривые нулевой кривизны, постоянной кривизны, нулевого кручения, постоянного кручения.
4. Локальный портрет регулярной кривой в сопровождающем базисе Френе.
5. Некоторые замечательные кривые на сфере.
6. Некоторые замечательные поверхности в трехмерном пространстве.
7. Многомерные аналоги шаров, сфер, цилиндров, конусов и их свойства.
8. Лист Мебиуса и его параметризация.
9. Группа унимодальных матриц как аналитическое многообразие.
10. Группа ортогональных матриц как аналитическое многообразие.
11. Группа унитарных матриц как аналитическое многообразие.

«Некоторые проблемы теории меры и интеграла»

1. Интеграционные методы в трудах Архимеда.
2. Проблема обоснования интегрального исчисления до Б.Римана.
3. Третья проблема Гильберта и ее решение.
4. Классическая изопериметрическая задача, классическая изопифанная задача и их обобщения.
5. Проблема продолжения меры с полукольца на кольцо.
6. Различные способы введения понятия интеграла Римана.
7. Различные способы введения понятия интеграла Лебега.
8. Различные способы введения понятия интеграла Стилтьеса.
9. Интеграл Бохнера от операторнозначных функций. Основы функционального исчисления операторов.
10. Основные понятия теории операторных мер. Спектральное разложение некоторых классов операторов.
11. Дифференцирование и интегрирование как взаимно обратные операции (в теории Римана, в теории Лебега).
12. Возможность предельного перехода под знаком интеграла (в теории Римана, в теории Лебега).
13. Сведение кратных интегралов к повторным (в теории Римана, в теории Лебега).
14. Считающие меры (меры на нульмерных многообразиях) и их применение.

ФОРМИРОВАНИЕ БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ РАБОТЫ МАГИСТРАНТА

№ п/п	**Вид деятельности** (3 семестр)	**Максимальное количество баллов**
1.	Посещение лекционных занятий	3
2.	Посещение практических занятий	20
3.	Работа на занятиях и самостоятельная внеаудиторная работа, всего	349
в том числе:	ОС-1 Учебная конференция ОС-2 Работа в микрогруппах ОС-3 Учебная дискуссия ОС-4 Семинар переводчиков ОС-5 Математический турнир ОС-6 Круглый стол ОС-7 Групповая дискуссия ОС-8 Математический турнир ОС-9 Методический семинар ОС-10.1 Домашняя контрольная работа ОС-10.2 Аудиторная контрольная работа	35 24 25 30 40 25 30 40 40 30 30
4.	ОС-11.1 Учебная конференция ОС-11.2 Экзамен по билетам	36 60
Итого	5 зачетных единиц	500

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

По итогам освоения дисциплины «Теория многообразий и общая теория меры», которая изучается в 3 семестре и трудоёмкость которой составляет 5 ЗЕ, магистрант набирает определённое количество баллов, которое соответствует результату «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно» согласно следующей таблице:

Итоговое количество баллов	Итоговая отметка
0-250	неудовлетворительно
251-350	удовлетворительно
351-450	хорошо
451-500	отлично

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Дисциплина «*Теория многообразий и общая теория меры*» нацелена на формирование прочных знаний по ряду разделов математики, находящихся «на стыке» функционального анализа и других дисциплин, тесно связанных с приложениями, на осознание связей между далекими на первый взгляд задачами, в том числе некоторыми задачами элементарной и высшей математики. В рамках курса предполагается изучение разделов математики, тесно связанных, с одной стороны, с фундаментальными разделами функционального анализа, с другой стороны, с приложениями в теории оптимизации, теории игр, теории динамических систем, в том числе стохастических. Критерием для отбора материала служила, с одной стороны, необходимость знакомства магистрантов с широко применяемыми понятиями (обобщенной функции, случайного процесса и др.), без которых невозможно представить законченное математическое образование; с другой стороны, возможность продемонстрировать применения абстрактных теорий и «теоретизированный» характер современной «прикладной» математики. В рамках небольшого по объему курса собраны разделы, каждый из которых мог бы изучаться в отдельном семестровом или годичном курсе. Это делает невозможным одинаково глубокое изучение всех разделов; предполагается освоение базовых понятий и идей и более подробное знакомство с разделом, наиболее близким к тематике самостоятельных исследований каждого магистранта. Магистрант может выбрать необходимый для него уровень овладения учебным материалом дисциплины с углублением в один из разделов программы в зависимости от его научных интересов и тематики самостоятельной исследовательской работы.

При этом базовые понятия должны быть изложены вполне корректно, на соответствующем уровне строгости и на основе использования изученных разделов функционального анализа. С другой стороны, важно и рассмотрение конкретных примеров применения этих концепций к частным и достаточно наглядным объектам, часть из которых доступна пониманию школьников (дискретные случайные процессы, динамические системы с дискретным временем, конечномерные задачи оптимизации и их графические интерпретации и др.). Основное время, отведенное на аудиторные занятия, предлагается посвятить формированию у будущих магистров основ умений, связанных с математическими исследованиями (в частности, с «переводом» проблем с одного математического языка на другой), в естественной связи с актуализацией и расширением понятийного аппарата, необходимого для их проведения.

Общие вопросы теории, тесно связанные с методологией современной математики в целом, предлагается вынести в большой степени на самостоятельное изучение. Обсуждение этих вопросов на аудиторных (практических/ семинарских) занятиях не должно сводиться к докладам студентов на общие темы, предлагается тесно связывать

абстрактные построения с решением конкретных задач. Среди этих задач должны быть, в частности, и доступные (по постановке проблемы) школьникам, достаточное внимание должно быть уделено их связям с общей логической линией курса.

На лекциях (разделы 2, 4) предполагается краткое изложение истории/логики развития теории обобщенных функций, теории случайных процессов в их взаимосвязи с функциональным анализом и с приложениями, в частности, физическими, выделение основных идей. При этом акцент должен быть сделан именно на методологических особенностях и важнейших методах получения результатов – как общих для всей современной математики, так и специфических. Самостоятельное изучение основного теоретического материала студентами предполагает работу с математической литературой – учебниками и учебными пособиями.

Успешное освоение курса требует активной деятельности на практических занятиях и во внеаудиторное время, систематического выполнения домашних заданий, самостоятельной работы с учебной математической литературой высокого уровня сложности. Необходимо обратить особое внимание на дальнейшее освоение и применение языка абстрактной алгебры и функционального анализа. Желательно проработать глоссарий дисциплины и убедиться в четком понимании смысла содержащихся в нем терминов.

На практических занятиях по каждому разделу программы предполагается активная работа студентов с теоретическим материалом, как известным им из предшествующих математических курсов магистратуры, так и новым. На практических занятиях также решаются задачи на исследование спектральных свойств операторов, в т.ч. порожденных динамическими системами, на действия над обобщенными функциями и их применение к решению дифференциальных уравнений, задачи выпуклого программирования, задачи на исследование марковских цепей и других случайных процессов. При этом акцент должен делаться на моделировании внематематических процессов, а также на исследовательских (учебных) задачах – проверке истинности утверждений, поиске примеров и контрпримеров, формулировке общих свойств объектов и т.п. Как преподавателю, так и студентам во время их сообщений рекомендуется применять проблемный стиль изложения материала, ставить вопросы перед аудиторией, в том числе для последующего обдумывания, предусматривать время для ответа на вопросы слушателей.

Еще одной сверхзадачей всего цикла занятий по дисциплине «*Теория многообразий и общая теория меры*» является демонстрация фрагментов методики, направленной на формирование культуры осмысленного учения и начальных исследовательских навыков в области математики.

Контрольное задание по дисциплине «*Теория многообразий и общая теория меры*» состоит из домашней и аудиторной частей; последняя может включать задания тестового характера (проверка владения понятийным аппаратом) и задания на установление истинности утверждений, формулирование результатов, контроль правильности рассуждений и пр. – т.е. мини-исследование.

Планы практических занятий

Основное содержание и возможные формы проведения практических занятий указаны в разделе 3.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Быкова, О.Н. Теория функций действительного переменного : Учебное пособие. - Москва ;

Москва : ООО "КУРС" : ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2016. - 196 с. URL: http://znanium.com/go.php?id=543159
2. Звонкин, А. К. Графы на поверхностях и их приложения / А.К. Звонкин; С.К. Ландо. - Москва : МЦНМО, 2010. - 480 с. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63250
3. Примаков, Д. А. Геометрия и топология. - Москва : Московская финансово-промышленная академия (МФПА), 2011. - 272 с. URL: http://znanium.com/go.php?id=451172

Дополнительная литература

1. Асташова, И. В. Геометрия и топология : учебно-методический комплекс / И.В. Асташова; В.А. Никишкин. - - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - 258 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90953
2. Матвеев С.В. Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий / С.В. Матвеев. - Москва : МЦНМО, 2007. - 454 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63262
3. Арнольд, В. И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд; А.Н. Варченко; С.М. Гусейн-Заде. - Москва : МЦНМО, 2009. - 672 с. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62956
4. Прасолов, В. В. Элементы теории гомологий / В.В. Прасолов. - Москва : МЦНМО, 2006. - 449 с. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63246

Интернет-ресурсы

- Мир математических уравнений. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm
- Softline. http://exponenta.ru/
- Сайт Московского центра непрерывного математического образования. https://www.mccme.ru
- Математические этюды. http://www.etudes.ru
- Математическая составляющая. http://book.etudes.ru
- Общероссийский математический портал. http://www.mathnet.ru
- Единое окно доступа к образовательным ресурсам. http://window.edu.ru/