Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
_____ Н.А. Ильина
«30» августа 2016 г.

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ И БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Программа учебной дисциплины вариативной части
для направления подготовки 01.06.01 Математика и механика
Направленность (профиль): Вещественный, комплексный и функциональный анализ
(очная и заочная форма обучения)

Составители:
Штраус В.А., доктор физико-математических наук,
Фолиадова Е.В., кандидат физико-математических наук

Рассмотрено и утверждено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования
(протокол от «22» июня 2016 г. № 9).

Ульяновск, 2016

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа дисциплины «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах» в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации), утверждённого приказом Министерством образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 года № 866 (зарегистрирован в Минюсте России 25.08.2014 № 33837), и с учебным планом..

Цель дисциплины «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах» - ознакомление будущих научных работников и преподавателей математики с дополнительными (не входящими в программы педагогических университетов) разделами функционального анализа, необходимыми при изучении различных разделов математики и получении новых научных результатов в этих областях.

Задачи дисциплины:

1) сформировать у аспирантов систему базовых понятий общей теории операторов в гильбертовых и банаховых пространствах в ее современной форме (включая основы теории банаховых алгебр); углубить знания основ функционального анализа, связанных со свойствами гильбертовых, банаховых, линейных топологических пространств, а также важнейших результатов, относящихся к функциональным пространствам; познакомить аспирантов с типичными для функционального анализа принципами получения результатов и с возможностями их обобщения;
2) углубить или сформировать знания о полинормированных (локально выпуклых) пространствах и об обобщенных функциях как функционалах на этих пространствах; вычленить иные связи между абстрактными понятиями и процедурами функционального анализа и конкретными проблемами теории функций, теории дифференциальных уравнений, теории интегральных уравнений и т.п.; совершенствовать умение применять аппарат функционального анализа при решении задач различной природы;
3) развивать умение формулировать математические задачи на языке функционального анализа, интерпретировать результаты в терминах исходной задачи, навыки использования геометрического языка в описании аналитических объектов, умение переводить утверждения с одного математического языка на другой;
4) подготовить аспирантов к восприятию результатов современных научных исследований в области функционального анализа (монографий, статей в профильных научных журналах), к проведению собственных исследований и представлению их результатов.

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах» относится к вариативной части блока дисциплин (Б1.В.03) и изучается в пятом семестре при очной форме обучения, в шестом семестре при заочной форме обучения. Изучение дисциплины предполагает уверенное владение аспирантом основами теории функций действительной переменной, топологии, дифференциальных уравнений и теории функций комплексной переменной в объеме стандартных курсов математических специальностей классических университетов. Знания и умения, полученные при изучении курса «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах», необходимы при изучении ряда дисциплин аспирантской подготовки: дисциплин по выбору «Теория линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой», «Вариационные проблемы и методы в математическом анализе». Учебный материал дисциплины входит в программу кандидатского экзамена по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Знания и умения, полученные при изучении дисциплины «Теория меры и интеграла», используются также при изучении оригинальной научной литературы по теме диссертации и проведении самостоятельных исследований. Уверенное владение учебным материалом дисциплины важно для успешного прохождения аспирантом педагогической практики.

Требования к уровню усвоения содержания дисциплины.

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом и видами профессиональной деятельности, формируемыми в рамках ОПОП аспирантуры по профилю «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», аспирант должен обладать следующими компетенциями:

общими профессиональными компетенциями:

- способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);
- готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2);

профессиональными компетенциями:

- готовность применять и самостоятельно пополнять знания о различных математических структурах, о типичных задачах математического анализа и методах их решения, о способах построения математических теорий и их развитии на протяжении истории математики (ПК-1);
- способностью ставить и решать новые задачи в области математики, корректно формулировать математические результаты и логически безупречно обосновывать процесс их получения (ПК-2);
- способностью приводить информацию к проблемно-задачной форме, строить математические модели объектов и процессов из различных предметных областей (ПК-3).

В результате изучения курса «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах» аспирант должен:

знать

- основные понятия и теоремы теории линейных топологических, банаховых, гильбертовых пространств, конструкции основных пространств функционального анализа;
- важнейшие результаты теории линейных операторов в бесконечномерных пространствах, основные методы их получения; основные принципы функционального анализа в банаховых пространствах, основы спектральной теории операторов в банаховых и в гильбертовых пространствах
- историю идей функционального анализа; современные подходы к изложению базовых результатов функционального анализа;
- границы применимости классических результатов и методов теории операторов и возможности их модификации в более общих ситуациях;
- принципы применения функционального анализа к теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), к проблемам других разделов математики и её приложений;

уметь

- решать типовые задачи функционального анализа;

- самостоятельно осваивать методы решения задач теории операторов;
- выделять генезис, логику возникновения основных идей функционального анализа, их роль в построении теории операторов и других разделов математики;
- анализировать истинность утверждений, сформулированных на языке теории операторов, находить примеры и контрпримеры;
- формулировать серии задач с целью обоснования и применения основных результатов функционального анализа;
- формулировать задачи исследовательского характера в области теории операторов;
- объяснять некоторые результаты комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений и др. на основе теории операторов;

владеть

- языком и символикой функционального анализа, связанной с ним терминологией общей топологии, абстрактной алгебры;
- навыками переформулирования частных проблем различных математических дисциплин на языке теории операторов;
- приёмами построения логических схем учебного материал различных разделов анализа;
- навыками чтения и понимания аутентичной математической литературы по тематике, связанной с функциональным анализом и его приложениями;
- средствами пакетов компьютерной математики для решения некоторых задач представления данных.

Аспирант имеет возможность:

- освоить применение идей и методов функционального анализа к широкому кругу задач теории функций действительной переменной, теории дифференциальных уравнений, дифференциально-интегральных, дифференциально-функциональных и др. уравнений, задач оптимизации и т.п., в том числе к нерешенных проблемам;
- изучить современные подходы (с использованием конструкций алгебры и топологии) к введению понятий и получению результатов теории операторов.

Структура и содержание дисциплины «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы (72 часа): 4 часа – лекции, 20 часов практическая работа, 48 часов самостоятельной работы. Форма отчетности – зачет.

№ п/п	Раздел дисциплины	**Год обучения** (очная/заочная форма)	**Виды учебной работы, включая самостоятельную работу аспирантов, и трудоемкость (в часах)**			**Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям)* Формы промежуточной аттестации *(по итогам освоения дисциплины)***
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	
1	2	3	4	5	6	7
1.	Тема 1. Геометрия гильбертовых и банаховых пространств	3/3		**2**	**12**	Логическая схема учебного материала (ментальная карта темы)
2.	Тема 2. Основные принципы функционального анализа в банаховых пространствах		**2**	**2**	**6**	
3.	Тема 3. Сопряжённые пространства и сопряжённые операторы			**2**	**6**	Логическая схема учебного материала (ментальная карта темы)
4.	Тема 4. Полинормированные пространства и обобщенные функции			**2**	**6**	Реферат
5.	Тема 5. Банаховы алгебры. Спектры элементов		**2**	**2**	**6**	Реферат
6.	Тема 6. Спектральная теория линейных операторов в банаховом пространстве. Теория Фредгольма		**-**	**4**	**6**	Презентация по теме
7.	Тема 7. Спектральная теория линейных операторов в гильбертовом пространстве		**-**	**4**	**6**	Презентация по теме
8.	Тема 8. Дифференциальное исчисление операторов в банаховых пространствах			**2**	**6**	Логическая схема учебного материала (ментальная карта темы)
	Всего		**4**	**20**	**48**	Зачет

Содержание дисциплины

Геометрия гильбертовых и банаховых пространств. Компактность. Выпуклость. Отделимость. Кратчайшие расстояния. Проекторы.

Топологические пространства, аксиомы отделимости и счетности. Метрические пространства, полнота, полная ограниченность. Компактные и секвенциально компактные множества в топологических пространствах. Случай метрического пространства, критерий Хаусдорфа компактности метрического пространства. Случай нормированного пространства, устойчивость предкомпктности относительно линейных операций и перехода к выпуклой оболочке. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном банаховом пространстве.

Выпуклые множества и выпуклые функционалы в линейных топологических и банаховых пространствах, теорема Хана-Банаха (аналитическая формулировка, геометрическая формулировка). Функционал Минковского. Отделимость множеств.

Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве: существование и единственность ближайшего элемента. Расстояние от точки до подпространства. Оператор ортогонального проектирования на подпространство, свойства ортопроекторов.

Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества в банаховом пространстве: существование аппроксимирующей последовательности (теорема о «почти-перпендикуляре»). Операторы проектирования на подпространство параллельно заданному подпространству в банаховом пространстве. Свойства проекторов.

Приложения к некоторым экстремальным задача и задачам аппроксимации.

Основные принципы функционального анализа в метрических и нормированных пространствах

Множества первой и второй категории Бэра в метрических пространствах. Теорема Бэра о категориях. Пространство функций, непрерывных на компакте, и подмножество дифференцируемых функций. Операторы в метрических пространствах: ограниченность, непрерывность, равномерная непрерывность. Равностепенно непрерывные семейства операторов.

Линейные операторы в нормированных пространствах: ограниченность и непрерывность, достаточные условия ограниченности. Алгебра линейных ограниченных операторов. Существование линейных неограниченных операторов в бесконечномерном пространстве.

Открытые отображения нормированных пространств. Теорема Банаха об открытом отображении. Теорема об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Продолжение линейного ограниченного оператора и дополняемость подпространств банахова пространства; случай гильбертова пространства. Замкнутые неограниченные операторы, замыкание линейного оператора.

Равномерно ограниченные семейства линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабая ограниченность семейства элементов нормированного пространства и ограниченность по норме. Равномерная сходимость на предкомпактах поточечно сходящихся последовательностей линейных операторов. Существование непрерывных функций, для которых ряд Фурье не сходится поточечно.

Компактные (вполне непрерывные) линейные операторы. Множество компактных операторов как двусторонний идеал алгебры линейных ограниченных операторов, как подпространство. Необратимость компактного оператора в бесконечномерном пространстве. Образы ограниченных последовательностей при компактных отображениях.

Сопряженные пространства и сопряженные операторы. Различные виды сходимости

Сопряженное пространство к нормированному пространству, к линейному топологическому пространству. Второе сопряженное пространство. Рефлексивные и нерефлексивные пространства. Теорема Рисса о сопряженном к гильбертову пространству. Аннулятор подмножества нормированного пространства.

Пространства $L_p[a;b]$, $L_\infty[a;b]$, $C[a;b]$ и сопряженные к ним. Критерии компактности множеств в пространствах суммируемых, существенно ограниченных, непрерывных функций. Связь между сепарабельностью нормированного пространства и его сопряженного.

Сопряженные операторы. Связь между свойствами линейного оператора и его сопряженного (в случае банахова пространства, в случае гильбертова пространства). Оператор, сопряженный к плотно заданному неограниченному линейному оператору.

Виды сходимости в банаховом пространстве, в его сопряженном, в пространствах линейных операторов. Слабая топология и *-слабая топология. Критерий *-слабой сходимости. Поляра и биполяра множества в нормированном пространстве. Теорема о биполяре. Теорема Банаха-Алаоглу (*-слабая компактность единичного шара).

Полинормированные пространства и обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями

Топология, порожденная семейством полунорм. Локальная выпуклость полинормированного пространства. Задание топологии локально выпуклого пространства семейством полунорм. Пространства Фреше.

Пространства основных функций (с компактным носителем, быстро убывающих, бесконечно дифференцируемых) и пространства обобщенных функций. Порядок обобщенной функции. Носитель обобщенной функции, обобщенные функции с одноточечным носителем, обобщенные функции с компактным носителем. Действия над обобщенными функциями (дифференцирование, прямое произведение, свертка). Преобразование Фурье обобщенных функций. Преобразование Лапласа обобщенных функций.

Приложения обобщенных функций в теории дифференциальных уравнений. Пространства Соболева, понятие о теоремах вложения.

. Банаховы алгебры. Спектры элементов, функциональное исчисление

Банаховы алгебры. Непрерывность умножения. Обратимые элементы. Открытость множества обратимых элементов. Непрерывность оператора перехода к обратному элементу. Спектр элемента банаховой алгебры, замкнутость спектра, ограниченность спектра. Спектр обратного элемента. Спектральный радиус элемента банаховой алгебры. Резольвента элемента банаховой алгебры, тождество Гильберта, аналитичность резольвенты. Непустота спектра элемента банаховой алгебры. Интеграл Бохнера, функции элементов банаховой алгебры. Алгебра функций, аналитических в окрестности спектра, интеграл Данфорда. Разложение функций в степенные ряды. Спектральное разложение.

Спектральная теория линейных операторов в банаховом пространстве. Теория Фредгольма

Резольвентное множество и спектр линейного оператора в банаховом пространстве. Точечный, непрерывный и остаточных спектр. Аппроксимативные собственные значения. Собственные подпространства и инвариантные подпространства линейного оператора.

Необратимость компактного оператора. Операторы вида $I - T$, где T - компактный оператор. Структура спектра компактного оператора. Конечномерность собственных подпространств компактного оператора, соответствующих ненулевым собственным значениям. Компактные операторы как граничные точки множества необратимых операторов. Операторы с компактной резольвентой. Альтернатива Фредгольма.

Операторные уравнения: разрешимость, корректность постановки задачи.

Приложения к теории линейных интегральных уравнений. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода, первого рода. Случай вырожденного ядра. Уравнения Вольтерра.

Спектральная теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Спектральная теорема для самосопряженных операторов

Спектр оператора, сопряженного к данному оператору в гильбертовом пространстве. Самосопряженные и симметрические операторы. Унитарные и изометрические операторы. Нормальные операторы. Условие самосопряженности проекторов в гильбертовом пространстве.

Квадратичная форма самосопряженного оператора и оценка его спектра. Непустота спектра.

Неотрицательные, неположительные, положительно определенные операторы. Сравнение симметрических операторов. Монотонные последовательности симметрическх операторов и их поточечная сходимость.

Компактные самосопряженные операторы и их спектральные свойства. Существование ортогонального базиса, состоящего из собственных векторов самосопряженного компактного оператора.

Многочлены от операторов. Непрерывные функции от самосопряженных операторов, их свойства. Критерий обратимости функции от оператора. Теорема об отображении спектра. Векторные меры и спектральные функции оператора. Спектральная теорема для самосопряженного ограниченного оператора. Случай неограниченного оператора.

Спектральные свойства унитарных операторов. Полярное представление и ослабленное полярное представление линейного оператора.

Симметрические операторы: точки регулярного типа, индексы дефекта, симметрические и самосопряженные расширения. Обобщенные резольвенты и обобщенные спектральные функции. Преобразование Кэли, теория расширений изометрических операторов.

Дифференциальное исчисление операторов в банаховых пространствах. Начала вариационного исчисления

Нелинейные операторы в нормированных пространствах: производная по направлению, первая вариация, производная Гато, производная Фреше, слабая и сильная дифференцируемость. Дифференцирование композиции операторов. Теорема о среднем. Дифференцирование в произведении пространств, частные производные оператора, теорема о полном дифференциале. Полилинейные отображения, производные высших порядков, вторая вариация, формула Тейлора.

Теорема о неявном операторе. Теорема об обратном отображении. Принципы неподвижной точки и их связь с теоремой о неявном операторе. Теорема Люстерника о касательном пространстве к поверхности уровня оператора.

Задача на экстремум функционала в банаховом пространстве без ограничений. Необходимое условие экстремума первого порядка (теорема Ферма). Необходимое условие экстремума второго порядка. Достаточные условия экстремума в задаче без ограничений. Гладкие задачи на экстремум с ограничениями типа равенств: функционал Лагранжа, необходимые условия экстремума (регулярный случай, вырожденный случай).

Применение к простейшей задаче классического вариационного исчисления. Применение к изопериметрическим задачам.

Образовательные технологии

Выбор образовательных технологий при реализации курса диктуется постановкой следующих педагогических целей:

1) фундаментальная теоретическая подготовка аспирантов, расширение математического кругозора, формирование цельной картины современной математики, представления о месте в ней действительного, комплексного и функционального анализа, о взаимосвязях этих дисциплин, их связях с другими разделами математики и с приложениями;

2) формирование различных компонентов математической деятельности, в т.ч. навыков чтения и понимания аутентичной математической литературы, выдвижения и проверки математических гипотез, доказательства теорем, выяснения границ применимости алгоритмов решения определенных классов задач и модификации таких алгоритмов в случае необходимости, доказательства правомерности и оценки

погрешностей приближенных методов решения задач и т.д.; освоение компьютерных математических сред как одного из инструментов математической деятельности;

3) формирование навыков профессиональной коммуникации, в т.ч. ведения математической дискуссии, реферирования математической литературы, составления обзоров по заданной теме, представления новых результатов и др.

Для достижения указанных целей предполагается использование активных методов обучения, в том числе проблемных лекций. Предусмотрена большая доля самостоятельной работы учебно-исследовательского характера, в частности, ознакомительное или детальное (по выбору аспиранта, в зависимости от тематики его исследовательской работы) знакомство с источниками литературы, предлагающими углубленную либо нестандартную точку зрения на вопросы, включенные в программу (в списке дополнительной литературы отмечены *).

При реализации курса используются элементы следующих образовательных технологий:

— продуктивное обучение (образовательный процесс направлен на самостоятельное реконструирование системы знаний по дисциплине);

— контекстное обучение (образовательный процесс погружён в контекст будущей преподавательской и/или исследовательской деятельности аспиранта);

— технология развития критического мышления (образовательный процесс опирается на рефлексивную работу с математическими текстами);

— технологии взаимообучения, кооперативного обучения (в различных организационных формах, в зависимости от численности группы), при возможности – с использованием принципов социально-психологического обучения, например, ролевых технологий (генератор идей – критик и т.п.).

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов

К самостоятельной работе относятся:

- самостоятельная работа на аудиторных занятиях (лекциях, коллоквиумах, практических занятиях);
- внеаудиторная самостоятельная работа.

В процессе обучения предусмотрены следующие виды самостоятельной работы обучающегося:

- работа с конспектами лекций; постановка вопросов по теме лекции;
- проработка математического содержания темы по конспекту лекций, учебникам и пособиям на основании вопросов, подготовленных преподавателем либо самим аспирантом;
- проработка дополнительных тем, не вошедших в лекционный материал, но обязательных согласно учебной программе дисциплины;
- изучение, анализ, реферирование обязательной и дополнительной литературы, сопоставление различных подходов к построению математических теорий;
- установление связей между фрагментами теории и указанными приложениями, на составление схем взаимозависимостей между фрагментами курса и их связей с другими разделами математики;
- составление аннотированных библиографических указателей по предложенной тематике;
- написание рефератов по отдельным разделам дисциплины; подготовка научных докладов и творческих работ;
- решение сформулированных преподавателем и/или самостоятельно поставленных задач по основным разделам курса; разработка систем заданий по курсу; работа над проектами;

- подготовка к текущему и промежуточному контролю знаний.

В целях фиксации результатов самостоятельной работы аспирантов по дисциплине проводится аттестация самостоятельной работы. Контроль результатов самостоятельной работы осуществляется преподавателем в течение всего семестра.

При освоении дисциплины могут быть использованы следующие формы контроля самостоятельной работы:

1) реферат,
2) коллоквиум,
3) тестовый контроль,
4) другие по выбору преподавателя.

Научный руководитель организует самостоятельную работу аспиранта в соответствии с рабочим учебным планом и графиком, рекомендованным преподавателем. Аспирант должен выполнить объем самостоятельной работы, предусмотренный рабочим учебным планом, максимально используя возможности индивидуального творческого и научного потенциала для освоения образовательной программы в целом.

Для анализа организации своей самостоятельной работы аспиранту рекомендуется в письменной форме ответить на предлагаемые вопросы и затем критически проанализировать, насколько эффективно он работает самостоятельно.

Во время самостоятельной работы обучающиеся обеспечены доступом к базам данных и библиотечным фондам, а также доступом к сети Интернет.

Фонд оценочных средств

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости,
для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

№ п/п	КОНТРОЛИРУЕМЫЕ МОДУЛИ, РАЗДЕЛЫ (ТЕМЫ) ДИСЦИПЛИНЫ	НАИМЕНО-ВАНИЕ ОЦЕНОЧНОГО СРЕДСТВА	КОД ФОРМИРУЕМОЙ КОМПЕТЕНЦИИ *общепрофессио-нальные компетенции (ОПК):*		КОД ФОРМИРУЕМОЙ КОМПЕТЕНЦИИ *профессиональные компетенции (ПК):*		
			ОПК-1	ОПК-2	ПК- 1	ПК- 2	ПК- 3
1	Тема 1. Геометрия гильбертовых и банаховых пространств	Ментальная карта					
2	Тема 2. Основные принципы функционального анализа						
3	Тема 3. Сопряженные пространства и сопряженные операторы.	Ментальная карта					
4	Тема 4. Полинормированные пространства и обобщенные функции.	Реферат					
5	Тема 5. Банаховы алгебры.	Реферат					
6	Тема 6. Спектральная теория линейных операторов в банаховом пространстве.	Презентация					
7	Тема 7. Спектральная теория линейных операторов в гильбертовом пространстве	Презентация					
8	Тема 8. Дифференциальное исчисление операторов в банаховых пространствах	Ментальная карта					
		НАИМЕНОВАНИЕ ОЦЕНОЧНОГО СРЕДСТВА	ОС 1-3	ОС 1-3	ОС 1-3	ОС 1-3	ОС 1-3

Оценочное средство 1. Ментальная карта.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Кафедра высшей математики

Ментальная карта
по дисциплине «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах**»**

Задание: Разработать представление содержания материала темы, в виде ментальной карты с помощью одного из сервисов создания ментальных карт. Отразить в схеме внутренние связи учебного материала, а также его связи с иными разделами вещественного и комплексного анализа. К отдельным точкам карты прикрепить текстовые документы, содержащие доказательства важнейших результатов, при необходимости – примеры решения типовых задач. Ментальная карта представляется в электронном виде и хранится в портфолио аспиранта.

Оценочное средство 2. Реферат.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Кафедра высшей математики

Реферат
по дисциплине «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах**»**

Задание: подготовить реферат по выбранному фрагменту темы.

Требования к оформлению реферата:

1. Объем: 5-10 страниц. В рекомендуемый объём работы не входят титульный лист, план, список литературы и приложения.
2. Шрифт – Times New Roman.
3. Размер шрифта – 14.
4. Выравнивание текста – по ширине, кроме титульного листа.
5. Междустрочный интервал – 1,5.
6. Отступ: 1,25.
7. Параметры страницы: размер –А4, поля: сверху, снизу – 2 см, справа – 1,5 см, слева – 2,5 см.
8. Структура реферата:
    - Титульный лист
    - План
    - Основной текст реферата
    - Список литературы (не менее 5 источников)
    - Приложение (не обязательно)

Оценочное средство 3. Презентация.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Кафедра высшей математики

Презентация
по дисциплине «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах**»**

Задание: Разработать презентацию с помощью выбранных программных средств, отразив в ней основное содержание темы. Представить материал в виде схем, использовать графики и иные средства визуализации. Презентация должна содержать как описание основных результатов, так и схемы их доказательств.

Презентация представляется в электронном виде и хранится в портфолио аспиранта.

Тематика рефератов и презентаций выбирается из списка вопросов к зачёту.

Итоговый контроль проводится в виде зачета.

Примерные вопросы к зачету

Раздел «Геометрия гильбертовых и банаховых пространств. Компактность. Выпуклость. Отделимость. Кратчайшие расстояния. Проекторы»

1. Топологические пространства, аксиомы отделимости и счетности, хаусдорфовы пространства, сходимость последовательностей в топологических пространствах. Топологические линейные пространства. Компактные и секвенциально компактные множества в топологических пространствах, предкомпактные множества.
2. Метрические пространства, отделимость и счетность, сходимость последовательностей в метрических пространствах. Всюду плотные множества, сепарабельные метрические пространства. Полнота и полная ограниченность. Эквивалентность компактности и

секвенциальной компактности. Критерий Хаусдорфа компактности метрического пространства. Предкомпактные множества в метрических пространствах.

3. Нормированные пространства; полные системы и базисы; размерность. Конечномерные нормированные пространства, сепарабельные нормированные пространства. Условие предкомпактности в конечномерных пространствах. Устойчивость предкомпктности относительно линейных операций и перехода к выпуклой оболочке. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном банаховом пространстве.
4. Евклидовы и гильбертовы пространства, ортогональные системы, их полнота, замкнутость и базисность. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Изоморфизм гильбертовых пространств одинаковой размерности.
5. Выпуклые множества и выпуклые функционалы в линейных топологических и банаховых пространствах, теорема Хана-Банаха (аналитическая формулировка для пространства над полем действительных чисел, для пространства на полем комплексных чисел; геометрическая формулировка). Функционал Минковского. Отделимость множеств.
6. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве: существование и единственность ближайшего элемента. Расстояние от точки до подпространства. Оператор ортогонального проектирования на подпространство, свойства ортопроекторов. Угол между подпространствами.
7. Частичная сумма ряда Фурье элемента бесконечномерного гильбертова пространства как проекция на конечномерное подпространство. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля, условие полноты ортонормированной системы. Стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.
8. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества в банаховом пространстве: существование аппроксимирующей последовательности (теорема о «почти-перпендикуляре»). Прямая сумма подпространств, оператор проектирования на подпространство параллельно заданному подпространству. Свойства проекторов. Критерий дополняемости подпространства.

Раздел «Основные принципы функционального анализа в метрических и нормированных пространствах»

9. Нигде не плотные множества в метрических пространствах. Множества первой и второй категории Бэра. Теорема Бэра о категориях. Примеры множеств первой и второй категории в функциональных пространствах.
10. Операторы в метрических пространствах: ограниченность, непрерывность, равномерная непрерывность. Норма оператора. Прообразы открытых и замкнутых множеств при непрерывных отображениях. Образы сходящихся последовательностей при непрерывных отображениях. Сохранение компактности при непрерывных отображениях. Равномерно ограниченные семейства операторов. Равностепенно непрерывные семейства операторов.
11. Линейные операторы в нормированных пространствах: ограниченность и непрерывность, достаточные условия ограниченности. Эквивалентность различных определений нормы линейного оператора. Алгебра линейных ограниченных операторов. Существование линейных неограниченных операторов в бесконечномерном пространстве.
12. Открытые отображения нормированных пространств. Теорема Банаха об открытом отображении. Теорема об обратном операторе.
13. График оператора. Теорема о замкнутом графике. Продолжение линейного ограниченного оператора по непрерывности. Замкнутые неограниченные операторы, замыкание линейного оператора.
14. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабая ограниченность семейства элементов нормированного пространства и ограниченность по норме. Равномерная сходимость на предкомпактах поточечно сходящихся последовательностей линейных операторов.

15. Компактные (вполне непрерывные) линейные операторы. Множество компактных операторов как двусторонний идеал алгебры линейных ограниченных операторов, как подпространство. Необратимость компактного оператора в бесконечномерном пространстве. Образы ограниченных последовательностей при компактных отображениях.

Раздел «Сопряженные пространства и сопряженные операторы. Различные виды сходимости»

16. Линейные функционалы в векторном пространстве, алгебраически сопряженное пространство к векторному пространству. Непрерывные линейные функционалы в нормированном пространстве, в линейном топологическом пространстве; сопряженное пространство к нормированному пространству, к линейному топологическому пространству. Норма функционала. Полнота сопряженного пространства к произвольному нормированному пространству.
17. Второе сопряженное пространство и вложение в него исходного пространства. Рефлексивные и нерефлексивные пространства.
18. Теорема Рисса об общем виде линейных непрерывных функционалов на гильбертовом пространстве. Изоморфизм гильбертова пространства и его сопряженного
19. Слабая топология и слабая сходимость в линейном топологическом пространстве, в нормированном пространстве.
20. Аннулятор подмножества нормированного пространства. Теорема Хана-Банаха и достаточность запаса линейных функционалов (нетривиальность аннулятора собственного подмножества). Связь между сепарабельностью нормированного пространства и его сопряженного.
21. Пространства $L_p[a;b]$, $L_\infty[a;b]$, $C[a;b]$ и сопряженные к ним. Критерии компактности множеств в пространствах суммируемых, существенно ограниченных, непрерывных функций.
22. Билинейная форма, порожденная ограниченным линейным оператором, действующим из одного банахова пространства в другое. Сопряженный оператор. Связь между свойствами линейного оператора и его сопряженного.
23. Оператор, сопряженный к ограниченному линейному оператору в гильбертовом пространстве. Оператор, сопряженный к плотно заданному неограниченному линейному оператору.
24. *-слабая топология. Критерий *-слабой сходимости. Поляра. Теорема о биполяре. Теорема Банаха-Алаоглу.

Раздел «Полинормированные пространства и обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями»

25. Топология, порожденная семейством полунорм. Локальная выпуклость полинормированного пространства. Задание топологии локально выпуклого пространства семейством полунорм. Пространства Фреше.
26. Пространства основных функций (с компактным носителем, быстро убывающих, бесконечно дифференцируемых) и пространства обобщенных функций. Порядок обобщенной функции. Носитель обобщенной функции, обобщенные функции с одноточечным носителем, обобщенные функции с компактным носителем. Действия над обобщенными функциями (дифференцирование, прямое произведение, свертка).
27. Преобразование Фурье основных функций. Преобразование Фурье обобщенных функций (медленного роста).
28. Преобразование Лапласа основных функций, обобщенных функций.

Раздел «Банаховы алгебры. Спектры элементов, функциональное исчисление»

29. Банаховы алгебры. Непрерывность умножения. Обратимые элементы. Открытость множества обратимых элементов. Непрерывность оператора перехода к обратному элементу.
30. Спектр элемента банаховой алгебры, замкнутость спектра, ограниченность спектра. Спектр обратного элемента. Спектральный радиус элемента банаховой алгебры.
31. Резольвента элемента банаховой алгебры, тождество Гильберта, аналитичность резольвенты. Непустота спектра элемента банаховой алгебры.
32. Интеграл Бохнера, функции элементов банаховой алгебры.
33. Алгебра функций, аналитических в окрестности спектра, интеграл Данфорда. Спектральное разложение.

Раздел «Спектральная теория линейных операторов в банаховом пространстве. Теория Фредгольма»

34. Резольвентное множество и спектр линейного оператора в банаховом пространстве. Точечный, непрерывный и остаточных спектр. Аппроксимативные собственные значения. Собственные подпространства и инвариантные подпространства линейного оператора.
35. Необратимость компактного оператора. Операторы вида $I - T$, где T - компактный оператор. Структура спектра компактного оператора. Конечномерность собственных подпространств компактного оператора, соответствующих ненулевым собственным значениям. Компактные операторы как граничные точки множества необратимых операторов. Операторы с компактной резольвентой.
36. Альтернатива Фредгольма.
37. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода, первого рода. Случай вырожденного ядра. Уравнения Вольтерра.

Раздел «Спектральная теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Спектральная теорема для самосопряженных операторов»

38. Спектр оператора, сопряженного к данному оператору в гильбертовом пространстве. Самосопряженные и симметрические операторы. Унитарные и изометрические операторы. Нормальные операторы. Условие самосопряженности проекторов в гильбертовом пространстве.
39. Квадратичная форма самосопряженного оператора и оценка его спектра. Непустота спектра. Неотрицательные, неположительные, положительно определенные операторы. Сравнение симметрических операторов. Монотонные последовательности симметрическх операторов и их поточечная сходимость.
40. Компактные самосопряженные операторы и их спектральные свойства. Существование ортогонального базиса, состоящего из собственных векторов самосопряженного компактного оператора. Самосопряженные операторы с компактной резольвентой и свойства их спектров.
41. Многочлены от операторов. Непрерывные функции от самосопряженных операторов, их свойства. Критерий обратимости функции от оператора. Теорема об отображении спектра.
42. Векторные меры и спектральные функции оператора. Спектральная теорема для самосопряженного ограниченного оператора. Случай неограниченного оператора.
43. Спектральные свойства унитарных операторов. Полярное представление и ослабленное полярное представление линейного оператора.
44. Симметрические операторы: точки регулярного типа, индексы дефекта, симметрические и самосопряженные расширения. Обобщенные резольвенты и обобщенные спектральные функции.
45. Преобразование Кэли, теория расширений изометрических операторов.

Раздел «Дифференциальное исчисление операторов в банаховых пространствах. Начала вариационного исчисления»

46. Нелинейные операторы в нормированных пространствах: производная по направлению, первая вариация, производная Гато, производная Фреше, слабая и сильная дифференцируемость.
47. Дифференцирование композиции операторов. Теорема о среднем. Дифференцирование в произведении пространств, частные производные оператора, теорема о полном дифференциале.
48. Полилинейные отображения, производные высших порядков, вторая вариация, формула Тейлора.
49. Теорема о неявном операторе. Теорема об обратном отображении.
50. Принципы неподвижной точки и их связь с теоремой о неявном операторе. Итерационный процесс Ньютона.
51. Теорема Люстерника о касательном пространстве к поверхности уровня оператора.
52. Задача на экстремум функционала в банаховом пространстве без ограничений. Необходимое условие экстремума первого порядка (теорема Ферма). Достаточные условия экстремума в задаче без ограничений.
53. Гладкие задачи на экстремум с ограничениями типа равенств: функционал Лагранжа, необходимые условия экстремума (регулярный случай, вырожденный случай).
54. Простейшая задача классического вариационного исчисления с закрепленными концами. Уравнение Эйлера. Экстремали.
55. Изопериметрические задачи в вариационном исчислении.

Конкретные пространства функционального анализа, операторы в них, сопряженные пространства

56. Пространства функций, непрерывных на компактах.
57. Пространства суммируемых функций (относительно меры Лебега, относительно заданной меры). Пространство существенно ограниченных функций.
58. Пространства аналитических функций (пространства Харди).
59. Пространства суммируемых последовательностей, пространство бесконечно малых последовательностей, пространство ограниченных последовательностей.
60. Пространства Соболева.

Критерии оценивания аспиранта на зачете

Цель зачета по дисциплине «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах» - проверить усвоение основной проблематики курса, свободное владение терминологией вещественного и функционального анализа, знание основных изученных в курсе определений и теорем, понимание идей основанных на них алгоритмов, умение проводить доказательные рассуждения, анализировать и критически оценивать фрагменты математических текстов.

Зачет принимает преподаватель, ведущий лекционные занятия по данной дисциплине. Зачет проводится очно, в устной форме, по билетам. Билет включает теоретические вопросы из программы зачета, а также задачи (на проверку свойств операторов в гильбертовом или банаховом пространстве, нахождение спектра дифференциального, интегрального, разностного или иного оператора, явное построение спектрального разложения конкретного оператора, вычисление функции от оператора, решение дифференциального уравнения в обобщенных функциях, вычисление слабой и сильной производной функционала, решение задачи вариационного исчисления с закрепленными концами либо изопериметрической задачи и др). Билет может включать также вопросы тестового характера, в том числе вопросы об истинности сформулированных утверждений. Билетов должно быть не менее чем на 20% больше числа аспирантов в учебной группе. Предварительное ознакомление аспирантов с билетами не разрешается. Кроме указанных в билете вопросов, преподаватель

имеет право задавать дополнительные вопросы с целью уточнения объема знаний аспирантов и оценки качества усвоения теоретического материала и практических навыков и умений. Разрешается использование справочных материалов.

Оценка «зачтено» ставится, если аспирант в устном и/или письменном ответе продемонстрировал указанные выше знания и умения. Аспиранты, не сдавшие зачет, сдают его повторно в соответствии с графиком, разработанным отделом аспирантуры.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература

1. Данилин, А. Р. Функциональный анализ : учебное пособие / А.Р. Данилин. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2012. - 200 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=239528
2. Иосида К. Функциональный анализ. –М.: ЛКИ, 2007. – 624 с. (Библиотека УлГПУ)
3. Крепкогорский, В.Л. Функциональный анализ : учебное пособие / В.Л. Крепкогорский. - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 116 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428727.
4. Пирковский А.Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. – М.: МЦНМО, 2010. – 176 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63175
5. Подран В. Е. Элементы топологии [Текст] : учеб. пособие. . - СПб. и др. : Лань, 2008. – 186 с. (Библиотека УлГПУ)

Дополнительная литература

1. Асташова, И. В. Функциональный анализ : учебно-методический комплекс / И.В. Асташова; В.А. Никишкин. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - 110 с. - ISBN 978-5-374-00486-1. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90883
2. Васильева А.Б. Интегральные уравнения. М. : Физматлит, 2002. 159 с. (Библиотека УлГПУ)
3. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд; Г.Е. Шилов. - Изд. 2-е. - Москва : Государственное издательство физико-математической литературы , 1959. - 473 с. - (Обобщенные функции. Вып. 1). URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459735.
4. Гельфанд И.М. Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд; Г.Е. Шилов. - Москва : Государственное издательство физико-математической литературы , 1958. - 308 с. - (Обобщенные функции. Вып. 2). URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468172
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. - Москва : Наука, 1984. - 752 с. . (Библиотека УлГПУ)
6. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988. (Библиотека УлГПУ)
7. Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа. М.: Наука, 1967. 512 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=255666

8. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник; В.И. Соболев. - Изд. 2-е, перераб. - Москва : Наука, 1965. - 520 с. (Библиотека УлГПУ). То же: URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459769.
9. Ревина, С. В. Функциональный анализ в примерах и задачах : учебное пособие / С.В. Ревина; Л.И. Сазонов. - Ростов-н/Д : Издательство Южного федерального университета, 2009. - 120 с. - ISBN 978-5-9275-0683-5.
URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=240944.
10. Рудин У. Функциональный анализ: учебник. СПб.: Лань. 2005. 448 с.
11. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу [Текст] : [учеб. пособие для ун-тов] / В.М. Писаревский, Т.С. Соболева. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Физматлит, 2002. - 259 с. (Библиотека УлГПУ)
12. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459737
13. Хелемский А.Я. Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении. М.: МЦНМО, 2009. 304 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62973

Информационное обеспечение дисциплины

1. http://www.mathnet.ru/ - Общероссийский математический портал (свободный доступ к полным текстам статей журналов Академиздатцентра "Наука" РАН).
2. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm (библиотека «Мир математических уравнений», книги по математике, математический анализ, функциональный анализ).
3. http://www.mccme.ru – Московский центр непрерывного математического образования.
4. http://ium.mccme.ru/courses.php - Московский центр непрерывного математического образования, библиотека курсов Независимого Московского университета.
5. http://lib.mexmat.ru/books - Электронная библиотека Попечительского совета МГУ.
6. http://math-portal.ru
7. http://reslib.com – Research library
8. http://people.virginia.edu
9. http://projecteuclid.org
10. http://www.springerlink.com
11. http://www.encyclopediaofmath.org
12. http://myweb.facstaff.wwu.edu

Материально-техническое обеспечение дисциплины
«Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах»

Образовательный процесс обеспечивается достаточным аудиторным фондом, оснащенным необходимым учебным оборудованием.

Для проведения лекционных занятий могут быть использованы лекционные аудитории; специализированные лекционные аудитории (оснащенные аудиовизуальными и мультимедийными средствами). Для проведения практических занятий, а также промежуточного и итогового тестирования используются малые аудитории, компьютерные классы.

Для проведения аудиторных занятий:

Наименование специализированных аудиторий и лабораторий	Перечень оборудования
Аудитория № 417 (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	Посадочные места – 50 Преподавательский стол – 1 шт. Столы ученические двуместные – 14 шт. Столы ученические трехместные – 8 шт. Тумба под компьютер – 1шт. Встроенные шкафы – 2 шт. Стулья – 50 шт. Мультимедийный класс в составе: интерактивная система SMART Boaro SB 685. Ноутбук HP Pavilion g6-2364. Доска – 1 шт. Жалюзи – 3 шт. Стул из кожи черный – 1 шт.

Помещения для самостоятельной работы аспирантов:

компьютерные классы (с выходом в Интернет), библиотека (с выходом в Интернет)

Медиацентр (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	73 моноблока, соединённых локальной компьютерной сетью; беспроводная сеть Wi-Fi; стационарный проектор; экран; 5 ЖК-мониторов, 2 ЖК-панели; система видеоконференцсвязи – PolycomHDX6000HD; акустическая система: вокальная аудиосистема и акустические колонки. Секционные столы-18шт.
Читальный зал (электронная библиотека, (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	Ноутбуки 15,6 ACER Packard Bell EasyNote ENTE11HC-B9604G50MNKS 8 шт. Ноутбук Lenovo IdeaPad B590 Intel Pentium Dual-Core B960 2.2Ггц 4G/500G/DVD-RW15.6*/Windows 7 Home -7шт.