

Министерство просвещения Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работ

 И.Н. Тимошина

«29» июня 2023 г.

ПРОГРАММА

вступительного испытания в аспирантуру
по научной специальности

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Составители:

Столярова И.В.,

к.п.н., доцент, зав.кафедрой высшей математики,

Штраус В.А.,

д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры высшей математики,

Цыганов А.В.,

к.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры высшей математики

Рассмотрено и утверждено на заседании Учёного совета факультета физико-математического
и технологического образования (протокол от «26» мая 2023 г. № 5)

Ульяновск, 2023

Пояснительная записка

Программа составлена в соответствии с Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов), утвержденных приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 20.10.2021 г. № 951, а так же с требованиями, предъявляемыми к профессиональной подготовленности выпускника по направлениям 01.04.01 Математика (уровень магистратуры).

Цели и задачи вступительного испытания

Цель вступительного испытания – определение уровня готовности абитуриента к овладению программой аспирантуры.

Задачами вступительного испытания являются:

- определение уровня владения понятийно-категориальным аппаратом, необходимым для самостоятельного восприятия, осмыслиния и усвоения знаний в области математики, а также для самостоятельного решения новых математических задач;
- определение уровня владения навыками работы с математической информацией.

Требования к уровню подготовки, необходимому для освоения программы, и условия конкурсного отбора

Приступая к вступительным испытаниям абитуриент, должен

Знать:

- концептуально-понятийный и методологический инструментарий современной математической науки;
- основные понятия и положения классических разделов математической науки, базовые идеи математики.

Уметь:

- пользоваться научной, справочно-библиографической, методической литературой на русском и иностранных языках;
- анализировать результаты математических исследований, пользоваться языком математики, в том числе для построения моделей объектов;
- формулировать алгоритмы решения класса математических задач, выделять подзадачи и определять средства для их решения.

Владеть:

- современными методами и приемами обработки информации;
- навыками верификации, доказательства либо опровержения математических утверждений, аргументированного обоснования своей точки зрения, ведения дискуссии;
- навыками написания самостоятельной работы в форме реферата по математической проблематике в соответствии с общепринятыми научными стандартами и нормативами.

Форма вступительного испытания

Лица, желающие освоить программу подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по данному направлению, должны пройти вступительное испытание – устный экзамен.

Программа вступительного экзамена в аспирантуру

Группа научных специальностей: 1.1. Математика и механика

Научная специальность:

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1. Элементы теории множеств. Основные алгебраические структуры.

Бинарные операции и их свойства. Полугруппа, группа, кольцо, тело, поле, векторное (линейное) пространство, алгебра. Изоморфизмы и гомоморфизмы алгебраических структур. Ядро гомоморфизма.

Бинарные отношения и их свойства. Отношения эквивалентности и классификация. Идеал полугруппы, кольца, алгебры. Нормальная подгруппа. Факторгруппа, факторкольцо, факторпространство, факторалгебра.

Отношения порядка. Частичный порядок, линейный порядок, полный порядок. Наибольшие и наименьшие, максимальные и минимальные элементы, верхние и нижние грани подмножеств (частично) упорядоченного множества. Решетки.

Бинарные операции над множествами, кольцо множеств.

Равномощные множества, понятие мощности множества. Счетные множества, множества мощности континуум. Сравнение мощностей, теорема Кантора-Бернштейна, бесконечность шкалы мощностей (теорема Кантора о сравнении мощности множества и его булеана).

Эквивалентные упорядоченные множества, понятие порядкового типа (ординала). Аксиома выбора и эквивалентные ей утверждения. Понятие о трансфинитной индукции.

2. Основные числовые структуры.

Множество действительных чисел как полное упорядоченное поле. Расстояние во множестве действительных чисел, модуль числа как норма в пространстве действительных чисел. Принцип Архимеда. Неполнота множества рациональных чисел, плотность множества рациональных чисел во множестве действительных чисел, счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества действительных чисел, его равномощность отрезку. Представление рациональных чисел периодическими позиционными дробями, реализация действительных чисел в виде бесконечных (периодических и непериодических) дробей. Эквивалентные формулировки свойства полноты множества действительных чисел: существование точной грани у ограниченного множества, существование разделяющего числа для разграниченных множеств, лемма о вложенных отрезках вместе с принципом Архимеда, сходимость фундаментальных последовательностей (последовательностей Коши). Эквивалентные формулировки свойства компактности отрезков: принцип Больцано-Вейерштрасса и теорема Больцано-Вейерштрасса, лемма Гейне-Бореля-Лебега о конечном под покрытии, существование ε -сетей. Расширенная числовая прямая как компактификация пространства действительных чисел.

Поле комплексных чисел и расширенная комплексная плоскость. Сходимость последовательностей комплексных чисел, поле \mathbb{C} как полное метрическое пространство, модуль комплексного числа как норма в пространстве \mathbb{C} , расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ как компактное пространство, окрестности бесконечно удаленной точки. Алгебраическая, тригонометрическая, показательная формы записи комплексного числа. Умножение на комплексное число как оператор в пространстве \mathbb{C} . Единичная окружность в \mathbb{C} как мультипликативная группа, ее параметризация. Извлечение корня из комплексного числа. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.

3. Основные топологические структуры.

Топологическое пространство, топология, открытые множества, окрестности точек, замкнутые множества. База топологии Внутренние точки, точки прикосновения, предельные точки, граничные точки множества в топологическом пространстве. Внутренность, замыкание, граница множества в топологическом пространстве. Связные топологические пространства. Предел последовательности точек топологического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств, гомеоморфизмы. Топологические свойства объектов. Понятие о классификации топологических пространств.

Метрическое пространство, метрика, ε -окрестности точек. Предел последовательности точек метрического пространства. Ограниченные множества в метрическом пространстве, ограниченные последовательности, ограниченность сходящейся последовательности. Внутренние точки, точки прикосновения, предельные точки, граничные точки множества в метрическом пространстве. Внутренность, замыкание, граница множества в метрическом пространстве. Связные метрические пространства. Фундаментальные последовательности (последовательности Коши), полные метрические пространства, понятие о пополнении. Компактные метрические пространства, равносильность различных определений компактности для метрических пространств. Компактность и полнота, компактность и ограниченность. Предкомпактные (относительно компактные) множества, понятие о компактификации. Непрерывные отображения метрических пространств. Сохранение компактности и связности при непрерывных отображениях. Равномерная непрерывность отображений, непрерывных на компакте. Изометрии. Сжимающие отображения, принцип сжимающих отображений (теорема Банаха о неподвижной точке).

Линейные топологические пространства. Линейные многообразия и подпространства. Выпуклые множества. Линейные оболочки и выпуклые оболочки множеств.

Нормированные пространства, норма и порожденная ею метрика. Банаховы пространства. Линейные подпространства, базисы, размерность. Ряды в банаевых пространствах, критерий сходимости (критерий Коши), абсолютная сходимость.

Пространства со скалярным произведением (предгильбертовы пространства), скалярное произведение и порожденная им норма, неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Евклидовы пространства и бесконечномерные гильбертовы пространства. Ортогональные элементы и системы элементов, ортогонализация. Ортогональные дополнения, существование проекций, теорема Пифагора. Ряд Фурье по ортогональной системе, частичная сумма ряда Фурье как проекция на подпространство, неравенство Бесселя. Ортогональные базисы, равенство Парсеваля.

Пространство R^n как евклидово пространство. Полнота R^n . Компакты в R^n . Связные множества в R^n . Области и замкнутые области в R^n . Линейные многообразия (гиперплоскости) и многообразия в R^n . Размерность многообразия в R^n . Кривые в R^n . Мера Жордана области в R^n . Мера Лебега области в R^n .

4. Числовые последовательности и их пределы. Числовые функции и их пределы. Непрерывные числовые функции. Измеримые числовые функции.

Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности, ограниченность как необходимое условие сходимости. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, сравнение бесконечно малых, сравнение бесконечно больших. Переход к пределу в неравенствах. Монотонность последовательности как достаточное условие существования ее предела (конечного или бесконечного). Принцип вложенных отрезков. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

Определение предела числовой функции действительной переменной в точке и на бесконечности в терминах окрестностей, в терминах последовательностей. Бесконечно малые и бесконечно большие вблизи данной точки функции, сравнение бесконечно малых, сравнение бесконечно больших. Переход к пределу в неравенствах. Односторонние пределы, существование односторонних пределов у монотонной функции.

Эквивалентные определения непрерывности числовой функции в точке, непрерывность композиции непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация, мощность множества точек разрыва монотонной функции. Функции, непрерывные на промежутке. Теорема Коши о промежуточном значении функции, непрерывной на отрезке. Теорема Вейерштрасса. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема о непрерывности обратной функции. Мощность множества непрерывных числовых функций, мощность множества монотонных функций. Функции, равномерно непрерывные на промежутке. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

Функциональные последовательности, их поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Банахово пространство $C[a; b]$. Пространство ограниченных числовых функций $M[a; b]$.

Измеримые числовые функции. Устойчивость множества измеримых функций относительно основных операций. Измеримость непрерывных функций. Понятия сходимости почти всюду и сходимости по мере.

Числовые функции нескольких действительных переменных: предел и непрерывность. Предел в пространстве R^n и повторные пределы. Теорема Коши о промежуточном значении, теорема Вейерштрасса для функций нескольких переменных.

5. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких действительных переменных.

Дифференцируемые функции одной и нескольких действительных переменных. Семейство касательных к графику функции одной переменной, семейство касательных плоскостей (гиперплоскостей) к графику функции двух (нескольких) переменных. Дифференцируемые отображения евклидовых пространств. Дифференцируемость и существование частных производных. Полный дифференциал, градиент, матрица Якоби. Дифференцирование сложного отображения.

Существование и дифференцирование функции, заданной неявно, системы неявных функций. Многообразия в пространстве R^n , заданные неявно или параметрически, их касательные многообразия. Достаточное условие обратимости функции одной переменной, оператора в евклидовом пространстве; дифференцирование обратной функции (обратного оператора). Диффеоморфизмы областей, их свойства, геометрический смысл абсолютной величины и знака якобиана отображения.

Производные и дифференциалы высших порядков, теорема о равенстве смешанных производных. Дифференциал второго порядка как квадратичная форма и гессиан как соответствующая ей матрица.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши для функций одной переменной. Формула Тейлора для функции одной переменной, для функций нескольких переменных. Условия монотонности функции одной переменной в терминах производной. Условия выпуклости функции одной переменной в терминах первой производной, в терминах второй производной. Необходимое условие экстремума для функции одной переменной, для функций нескольких переменных. Достаточные условия экстремума для функции одной переменной, для функций нескольких переменных. Необходимое условие перегиба для функции одной переменной. Достаточные условия перегиба для функции одной переменной.

Достаточные условия отсутствия экстремума в стационарной точке для функции нескольких переменных.

Дифференциальные операции векторной теории поля. Оператор Лапласа. Замена переменных при выполнении дифференциальных операций.

6. Интегральное исчисление функций одной и нескольких действительных переменных.

Интеграл Римана как предел интегральных сумм, как разделяющее число сумм Дарбу. Свойства интеграла Римана, интегрируемость непрерывных функций, интегрируемость монотонных функций. Интеграл по ориентированному промежутку, его свойства. Интеграл с переменным верхним пределом как первообразная подынтегральной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в интеграле Римана. Интеграл, зависящий от параметра: непрерывность, дифференцирование по параметру.

Несобственные интегралы (Римана). Признаки сравнения для несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость.

Интеграл Лебега от функции одной переменной. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Суммируемые функции. Пространства суммируемых функций, функций, суммируемых с квадратом.

Кратные интегралы (Римана) по брусу, по произвольному множеству как предел интегральных сумм, как разделяющее число сумм Дарбу. Свойства кратных интегралов. Сведение кратных интегралов к повторным (теорема Фубини). Замена переменных в кратных интегралах. Кратный интеграл и мера области в пространстве R^n .

Криволинейные интегралы по длине дуги и по координатам, достаточные условия их существования, их свойства, сведение к интегралу Римана. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла по координатам от выбора плоской кривой, соединяющей данные точки. Признак полного дифференциала функции двух переменных, интегрирование полного дифференциала (обобщенная формула Ньютона-Лейбница).

Поверхностные интегралы по площади поверхности и по координатам, достаточные условия их существования, их свойства, сведение к двойному интегралу. Формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса. Условия независимости поверхностного интеграла по координатам от выбора поверхности, натянутой на данный контур. Условия независимости криволинейного интеграла по координатам от выбора пространственной кривой, соединяющей данные точки. Признак полного дифференциала функции трех переменных, интегрирование полного дифференциала.

Криволинейные и поверхностные интегралы и меры многообразий в пространстве R^n .

7. Дифференциальное исчисление функций комплексной переменной.

Дифференцируемые функции комплексной переменной; -дифференцируемость и C -дифференцируемость. Условия Коши-Римана дифференцируемости функции комплексной переменной. Голоморфные функции комплексной переменной (первое определение аналитической функции). Конформные отображения областей комплексной плоскости. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной. Принцип соответствия границ (без доказательства). Аналитические функции комплексной переменной и гармонические функции двух действительных переменных. Бесконечная дифференцируемость функции, аналитической в области (формулировка теоремы, идея доказательства).

8. Интегральное исчисление функций комплексной переменной.

Интеграл функции комплексной переменной по кривой в комплексной плоскости: сведение к криволинейному интегралу от комплекснозначной дифференциальной формы по (действительным) координатам, сведение к интегралу Римана от комплекснозначной функции действительной переменной. Интегральная теорема Коши (для односвязного и для многосвязного контура) и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши и ее следствия. Вычисление интегралов функций комплексной переменной с помощью вычетов.

9. Числовые и функциональные ряды.

Ряды действительных и комплексных чисел: абсолютная и условная сходимость, основные признаки сходимости. Пространства суммируемых последовательностей действительных/ комплексных чисел.

Функциональные ряды: поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признаки равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Дифференцирование и интегрирование равномерно сходящихся рядов.

Степенные ряды в действительной и комплексной области: теорема Абеля, интервал (круг) и радиус сходимости, равномерная сходимость на компактах в области сходимости. Разложение функций действительной (комплексной) переменной в степенной ряд с центром в данной точке: единственность разложения, условия сходимости ряда Тейлора к своей функции. Интегральные формулы для коэффициентов Тейлора функции комплексной переменной, неравенства Коши. Второе определение аналитической функции комплексной переменной. Целые трансцендентные функции. Идея продолжения аналитической функции с действительной прямой в комплексную область с помощью разложения в ряд. Экспонента в комплексной области.

Двусторонние ряды, ряды по целым степеням переменной (ряды Лорана). Область сходимости ряда Лорана. Особые точки аналитической функции однозначного характера, их классификация, лорановское разложение функции комплексной переменной в окрестности особой точки. Вычеты в конечных особых точках и в бесконечно удаленной точке. Полная сумма вычетов.

Ряды по ортогональным системам; единственность разложения, стремление к нулю коэффициентов Фурье по ортонормированной системе. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Тригонометрические ряды как частный случай рядов по ортогональным системам в гильбертовом пространстве. Сходимость ряда Фурье в среднем квадратическом. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

10. Дифференциальные уравнения

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Глобальный характер теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы линейных дифференциальных уравнений. Структура множества решений однородной, неоднородной нормальной системы линейных дифференциальных уравнений: определитель Вронского, фундаментальная матрица, выражение решения при произвольном значении аргумента через начальное значение, разрешающий оператор; случай автономной системы. Устойчивость (по Ляпунову, асимптотическая) тривиального решения нормальной системы линейных однородных дифференциальных уравнений. Устойчивость положений равновесия нелинейных систем: теорема Ляпунова. Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения высших порядков. Простейшие краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основная литература

1. Быкова, О.Н. Теория функций действительного переменного : Учебное пособие. - Москва ; Москва : ООО "КУРС" : ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2016. - 196 с. - URL: <http://znanium.com/go.php?id=543159>
2. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной : учебник / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – 6-е изд., стер. – Москва : Физматлит, 2010. – 334 с. – (Курс высшей математики и математической физики). – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75710>
3. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник : [16+] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 7-е изд. – Москва : Физматлит, 2012. – 573 с. – (Классический университетский учебник). – Режим доступа: по подписке. URL:<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563>
4. Пирковский А.Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. – М.: МЦНМО, 2010. – 176 с. URL: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63175.](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63175)

Дополнительная литература

1. Карасев, И. П. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / И. П. Карасев. – Москва : Физматлит, 2008. – 215 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=681392>.
2. Асташова, И. В. Функциональный анализ : учебно-методический комплекс / И.В. Асташова; В.А. Никишкин. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - 110 с. - ISBN 978-5-374-00486-1. URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90883>.
3. Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / В. А. Треногин. – 3-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2002. – 488 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613>
4. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд; Г.Е. Шилов. - Изд. 2-е. - Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. - 473 с. - (Обобщенные функции. Вып. 1). URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459735>.
5. Халмуш П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970. URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459737>

Лист согласования программы вступительных экзаменов в аспирантуру

Программа вступительных экзаменов в аспирантуру

Составители: И.В. Столярова, В.А. Штраус, А.В. Цыганов – Ульяновск: УлГПУ, 2023.

Программа составлена в соответствии с Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов), утвержденных приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 20.10.2021 г. № 951, а также с требованиями, предъявляемыми к профессиональной подготовленности выпускника по направлению 01.04.01 Математика (уровень магистратуры).

Составители программы:

зав. кафедрой высшей математики,

доцент, кандидат пед. наук

(должность, ученое звание, степень)

профессор кафедры высшей математики,

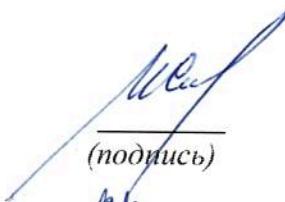
доцент, доктор физ.-мат. наук

(должность, ученое звание, степень)

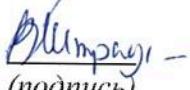
профессор кафедры высшей математики,

доцент, кандидат физ.-мат. наук

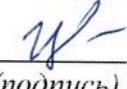
(должность, ученое звание, степень)


(подпись)

И.В. Столярова
(И.О. Фамилия)


(подпись)

В.А. Штраус
(И.О. Фамилия)


(подпись)

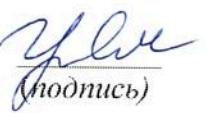
А.В. Цыганов
(И.О. Фамилия)

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 10 от «23» мая 2023 г.

Рабочая программа утверждена на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования

Протокол № 5 от «26» мая 2023 г.

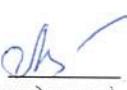
Председатель ученого совета факультета
«26» мая 2023 г.


(подпись)

Е.М. Громова
(И.О. Фамилия)

СОГЛАСОВАНО:

Начальник ОПНПК


(подпись)

А.Н. Кувшинова
(И.О. Фамилия)