Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра методик математического и информационно-технологического образования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«_25_» __июня___ 2021 г.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Программа учебной дисциплины
Предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Физика. Математика.

(очная форма обучения)

Составитель: Кузина Н.Г., к.п.н.
доцент кафедры методик математического и информационно-технологического образования

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21 июня 2021г. №_7_

Ульяновск, 2021

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Элементарная математика» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Физика.Математика.», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках школьного курса математики или соответствующих дисциплин среднего профессионального образования, а также ряда дисциплин учебного плана, изученных обучающимися в 1-3 семестрах: Педагогика, Психология, Алгебра, Геометрия, Введение в математический анализ.

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: Олимпиадная математика, Производственная (педагогическая) Преподавательская по 2 профилю, Учебная (технологическая).

Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины «Элементарная математика» систематизировать, обобщить систему знаний по школьному курсу математики, а также пополнить эти знания новыми фактами. Изучение данного курса должно способствовать подготовке квалифицированного учителя математики, владеющего основными методами решения различных типов математических задач, знающего теоретические основы курса школьной математики.

Задачей освоения дисциплины является формирование у студента целостного представления об основных методах решения задач элементарной математики, сформировать готовность будущего учителя математики к эффективному преподаванию пропедевтического, базового и профильных курсов по предмету.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Элементарная математика (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-4 Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов. ПК-4.1. формирует	ОР-1. Знает характеристики понятий «образовательная среда», «качество учебно-воспитательного процесса»; требования к результатам освоения основной образовательной программы предметных областей «Физика»	ОР-2. Умеет применять формы, методы и средства обучения для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения предметных областей «Физика» и «Математика»	

образовательную среду школы в целях достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами обучения физике и математике; ПК-4.2. обосновывает необходимость включения различных компонентов социокультурной среды региона в образовательный процесс;	и «Математика», (личностные, метапредметные и предметные результаты обучения), знать функции и виды средств предметных областей «Физика», «Математика»; ОР-3. Знает особенности современных средств обучения математике и инфоматике для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения; основные показатели обеспечения качества учебно-воспитательного процесса на уроках физики и математики	ОР-4 Умеет определять необходимость включения различных компонентов социокультурной среды региона в образовательный процесс на уроках физики и математики для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения;	
ПК-10. Способен проектировать траектории своего профессионального роста и личностного развития. ПК-10.1. проектирует цели своего профессионального и личностного развития; ПК-10.2. осуществляет отбор средств реализации программ профессионального и личностного роста;	ОР-5. Знает основные современные методы проектирования траектории своего профессионального роста и личностного развития;	ОР-6. Умеет применять современные методы при проектировании траектории своего профессионального роста и личностного развития;	

1. **Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Номер семестра	Учебные занятия							Форма итоговой аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Самостоятельная работа, час	Контрольные работы (кол-во)	Часы на экзамен	
	Трудоемк.							
	Зач. ед.	Часы						
5	2	72	12	20	40	1		Зачет
6	2	72	12	20	40	1		Зачет
7	3	108	18	30	33	2	27	Экзамен
Итого	7	252	42	70	113	4	27	

2. **Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекц. занятия	Лаб. занятия	Практ. занятия	Самост. работа
5 семестр				

Тождественные преобразования алгебраических выражений Элементарные функции: определения, свойства, графики. Тождественные преобразования рациональных, иррациональных выражений.	2	-	2	10
Общая теория уравнений (неравенств) и их систем Теоремы равносильности, общие методы решения уравнений, неравенств, систем. Рациональные уравнения, неравенства и их системы.	4	-	4	10
. Модуль. Определение, геометрическая интерпретация, свойства модуля. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля, их системы. Построение графиков функций, аналитические выражения которых содержат модуль.	4	-	4	10
Иррациональные уравнения и неравенства. Теоремы равносильности. Основные способы решения иррациональных уравнений, неравенств и их систем.	2	-	6	10
Итого по 5 семестру	12	-	20	40
6 семестр				
Показательные и логарифмические уравнения, неравенства. Определение, свойства логарифмов. Определения, свойства, графики показательной и логарифмической функций. Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений. Показательные, логарифмические уравнения, неравенства и их системы.	2	-	4	6
Тригонометрия. Преобразование тригонометрических выражений, доказательство тождеств и неравенств. Геометрические интерпретации формул сложения. Тригонометрические тождества и неравенства для углов треугольника.	2	-	4	6
Тригонометрические функции: определения, свойства, графики. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы.	2	-	4	6
Обратные тригонометрические функции: определения, свойства, графики.	2	-	2	6
Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции; доказательство тождеств.	2	-	2	6

Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции. Системы уравнений и неравенств с аркфункциями.	2	-	4	10
Итого по 6 семестру	12		20	40
7 семестр				
Планиметрия. Аксиомы абсолютной геометрии и следствия из них. Основные понятия планиметрии. Треугольники: метрические отношения в треугольнике. Площадь треугольника. Теоремы Стюарта, Чевы, Менелая.	2	-	2	4
Четырехугольники: метрические отношения в четырехугольниках. Площади плоских фигур. Теорема Птолемея.	2	-	2	2
Окружность. Центральные, вписанные углы. Углы между хордами, секущей и касательной к окружности. Вписанные и описанные многоугольники. Вневписанные окружности.	2	-	4	2
Геометрические построения на плоскости.	2	-	2	5
Стереометрия. Аксиомы стереометрии. Основные понятия стереометрии. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.	2	-	4	4
Многогранные углы. Теорема косинусов и теорема синусов для трехгранных углов. Признаки равенства трехгранных углов. Необходимое и достаточное условие существования трехгранного угла.	2	-	4	4
Многогранники, их свойства. Сечение выпуклых многогранников. Поверхности и объемы многогранников.	2	-	4	4
Тела вращения, их свойства. Поверхности и объемы тел вращения.	2	-	4	4
Комбинации геометрических тел.	2	-	4	4
Итого по 7семестру	18	-	30	33

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Семестр 5

1. Элементарные функции и тождественные преобразования выражений.

Элементарные функции: определения, свойства, графики. Различные способы определения элементарных функций. Построение графиков сложных функций.

Тождественные преобразования рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических выражений.

2. Уравнения и неравенства.

Алгебраические, рациональные, иррациональные уравнения и неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Показательные, логарифмические уравнения и неравенства.

Классические неравенства и неравенства, связанные с ними.

Семестр 6

Преобразование тригонометрических выражений, доказательство тождеств. Интерпретация формул сложения. Тригонометрические тождества и неравенства для углов треугольника. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы.

Обратные тригонометрические функции: определения, свойства, графики.

Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями, доказательство тождеств. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями.

Семестр 7

Аксиомы абсолютной геометрии и следствие из них. Основные планиметрические понятия. Треугольники. Метрические отношения в треугольнике. Площадь треугольника. Теоремы Стюарта, Чевы, Менелая.

Четырехугольники. Метрические отношения в четырехугольниках. Площади плоских фигур.

Окружность. Центральные, вписанные углы. Углы между хордами, секущимися и касательными.

Вписанные и описанные многоугольники. Теорема Птолемея.

Вневписанные окружности.

Геометрические построения на плоскости.

Аксиомы стереометрии. Основные понятия стереометрии.

Взаимное расположение прямых и плоскостей. Параллельность прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.

Перпендикулярность прямых в пространстве. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикулярность плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах. Скрещивающиеся прямые.

Многогранные углы. Теоремы косинусов и синусов для трехгранных углов. Признаки равенства трехгранных углов. Необходимое и достаточные условия существования трехгранных углов.

Многогранники, их свойства. Сечения выпуклых многогранников. Поверхности и объемы многогранников. Принцип Кавальери. Формула Симпсона.

Тела вращения. Поверхности и объемы тел вращения.

Комбинации геометрических тел. Необходимые и достаточные условия «вписуемости» сферы в многогранники, тела вращения. Необходимые и достаточные условия того, что около многогранников и тел вращения можно описать сферу

4.Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и

методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Пример самостоятельной работы (5 семестр)

Решить уравнения

1) 3 балла

А) $\sqrt{x^2+8} = 2x+1$

Б) $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$

С) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0$

Д) $(x^2-4)\sqrt{x+5} = 0$

2) 5 баллов

А) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-2}$

Б) $\frac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{3x+1}$

С) $\sqrt{16-\sqrt{x+1}} = 4$

Д) $(x+1)\sqrt{x^2} - 5x + 5 = x + 1$

Примерная тематика рефератов (задания для контрольной работы 6 семестр)

1. Принцип Дирихле и его применение при решении задач.
2. Элементы теории графов в задачах.
3. Метод математической индукции и его применение.
4. Геометрические задачи на максимум и минимум.
5. Прогрессии.
6. Комбинаторные задачи в геометрии.
7. Геометрические неравенства.
8. Математические фокусы в задачах.
9. Задачи математических олимпиад.
10. Построение графиков сложных функций.
11. Пифагоровы тройки и треугольные числа.
12. Функциональные уравнения.

Контрольная работа (примерная контрольная работа 7 семестр)

Вариант – 1.

1. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна в, и служит для одной, из них, стороной правильного вписанного треугольника, а для другой стороной вписанного квадрата. Найти расстояние между центрами окружностей.

2. ABCD – трапеция. Причем BD = a, AD = c. Найти длину стороны CD, если BC=AC=DC.
3. Одно из оснований трапеции равно 7 см. Вписанная в трапецию окружность делит одну из боковых сторон на отрезки 4 и 9 см. Найти площадь трапеции.
4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены отрезки AC и AD, каждый из которых являясь хордой одной окружности, касается другой окружности. Доказать, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.
5*.
В остроугольном треугольнике ABC высоты AA1 и CC1 пересекаются в точке H.
А) Докажите, что угол BHA1 равен углу ACB.
Б) Известно, что BH = 17, угол ABC равен 45º. Найдите AC.

Вариант – 2.
1. Вершины четырехугольника ABCD делят длину описанной около него окружности в отношении AB:BC:CD:CA = 2:17:4:3. Найдите площадь четырехугольника, если AC = 8см, BD =9 см.
2. В прямоугольный треугольник с углом 60º вписана окружность, радиус которой равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь этого треугольника.
3. На отрезке и двух его половинках построены полуокружности (в одной полуплоскости). Длина отрезка равна a, найти площадь круга касающегося всех трех полуокружностей.
4. Трапеция вписана в окружность. Ее основания равны 6 дм и 8 дм, а высота 1 дм. Найдите радиус этой окружности, если известно, что основания трапеции находятся по одну сторону от центра.
5*.
В остроугольном треугольнике ABC высоты BB1 и CC1 пересекаются в точке H.
А) Докажите, что угол BHC1 равен углу BAC.
Б) Известно, что BC = 25, угол BAC равен 60º. Найдите AH.

Примерная тематика рефератов (задания для контрольной работы 7семестр)

.

1.Параллельность, перпендикулярность прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей.
2.Скрещивающиеся прямые.
3.Трехгранные углы.
4.Многогранники.
5.Тела вращения.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Кузина Н.Г. Элементарная математика. Учебно – методическое пособие для студентов педагогических вузов.- Ульяновск: УлГПУ, 2017.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков

и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2 Контрольная работа ОС-3 Контрольная работа ОС-4 Контрольная работа	ОР-1. Знает характеристики понятий «образовательная среда», «качество учебно-воспитательного процесса»; требования к результатам освоения основной образовательной программы предметных областей «Математика» (личностные, метапредметные и предметные результаты обучения), знать функции и виды средств предметных областей «Математика»; ОР-2. Умеет применять формы, методы и средства обучения для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения предметных областей «Математика»; ОР-3. Знает особенности современных средств обучения математике для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения; основные показатели обеспечения качества учебно-воспитательного процесса на уроках физики и математики
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-5 Зачет в форме устного собеседования по вопросам ОС-6 Экзамен в форме устного собеседования	

		ОР-4 Умеет определять необходимость включения различных компонентов социокультурной среды региона в образовательный процесс на уроках физики и математики для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения; ОР-5. Знает основные современные методы проектирования траектории своего профессионального роста и личностного развития; ОР-6. Умеет применять современные методы при проектировании траектории своего профессионального роста и личностного развития;

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Элементарная математика».

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-5 Зачет в форме устного собеседования по вопросам

Перечень вопросов к зачету5 семестра

1. Тригонометрические тождества. Интерпретация формул сложения.
2. Тригонометрические тождества и неравенства для углов треугольника.
3. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы.
4. Обратные тригонометрические функции: определения, свойства, графики.
5. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями,
6. Доказательство тождеств, содержащих аркфункции
7. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями

Примерный перечень вопросов к зачету 6 семестра.

1. Понятие системы счисления. Позиционная система счисления. Способы перевода чисел из одной системы счисления в другую. Конечные и бесконечные систематические дроби.
2. Равносильность уравнений, уравнение - следствие данного уравнения. Теоремы равносильности.
3. Основные методы решения уравнений. Теоремы, обосновывающие эти способы решения. Функциональные уравнения.
4. Модуль, свойства модуля. Построение графиков функций, аналитические выражения которых содержат модуль.
5. Свойства суммы, произведение четных (нечетных), возрастающих (убывающих) функций.
6. Функции: $y = ax^4 + bx^2 + c$; $y = x^{\frac{p}{q}}$; $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
7. Показательная, логарифмическая, тригонометрические функции.

ОС-6 Экзамен в форме устного собеседования
Примерные вопросы к экзамену

Примерный перечень вопросов к экзаменам 7 семестра.

1. Формулы тригонометрии. Интерпретация формул сложения. Тригонометрические функции суммы трех слагаемых.
2. Тригонометрические тождества и неравенства для углов треугольника.
3. Обратные тригонометрические функции.
4. Тождества, содержащие обратные тригонометрические функции.
5. Треугольники, метрические отношения в треугольниках, площадь треугольника.
6. Теоремы Стюарта, Чевы, Менелая.
7. Четырехугольники, метрические отношения в четырехугольниках. Площади четырехугольников.
8. Окружность. Центральные, вписанные углы. Углы между хордами, секущими и касательными.
9. Вписанные и описанные многоугольники. Теорема Птолемея.
10. Вневписанные окружности.
11. Параллельность, перпендикулярность прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей. Скрещивающиеся прямые.
12. Трехгранные углы.
13. Многогранники. Тела вращения.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Контроль-ная работа	Экзамен
7 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 баллов	15 х 12=180 баллов	32 балла	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла max	204 балла max	236 баллов max	300 баллов max

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Контроль-ная работа	Зачёт
5,6семестр	Разбалловка по видам работ	6 х 1=6 баллов	10 х 1=10 баллов	10 х 12=120 баллов	32 балла	32 балла
	Суммарный макс. балл	6 баллов max	16 баллов max	136 баллов max	168 баллов max	200 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 5и 6 семестров

	Баллы (2 ЗЕ)
«зачтено»	более 100
«не зачтено»	100 и менее

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 7 семестра

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150менее

6.Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Практическое занятие 1: Метод разложения на множители при решении тригонометрических уравнений

При решении тригонометрических уравнений можно пользоваться всеми известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Это вынесение общего множителя за скобки, группировка, применение формул сокращенного умножения.

Метод разложения на множители используют в том случае, если в правой части уравнения стоит 0. При этом справедливо следующее утверждение:

так как произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысл, то, разложив на множители соответствующее уравнение, можно представить его как совокупность нескольких уравнений.

Пример: $2\sin x\cdot\cos 2x-1+2\cos 2x-\sin x=0$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$(2\sin x\cdot\cos 2x+2\cos 2x)-(1+\sin x)=0;$$

$$2\cos 2x(\sin x+1)-(\sin x+1)=0;$$

$$(\sin x+1)(2\cos 2x-1)=0$$

$\sin x+1=0$ или $2\cos 2x-1=0$

$$\cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$$

$\sin x=-1$

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ или $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$

Ответ : $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$

Практическое занятие 2: Метод введения новой переменной при решении тригонометрических уравнений

При решении уравнения методом введения новой переменной следует помнить, что $E(\sin)=[-1;1], E(\cos)=[-1;1]$.

Пример: $\cos 2x+4\sin^4 x=8\cos^6 x$. Воспользуемся формулами: $\cos^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ и заменим $\cos 2x=t$. Тогда получим уравнение: $t+4\left(\frac{1-t}{2}\right)^2=8\left(\frac{1+t}{2}\right)^3$, $t^3+2t^2+4t=0$, $t(t^2+2t+4)=0$, $t=0$ или $t^2+2t+4=0$ - нет действительных корней (Д < 0).

Таким образом, данное уравнение свелось к решению простейшего уравнение: cos2x = 0

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z.$

Практическое занятие 3: Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной подстановки

$\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ - эти формулы верны для всех $x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z.$

Подстановка $t = tg\frac{x}{2}$ называется универсальной.

Пример. $3\sin t - 4\cos t = \frac{5}{2}$

Заменим $\sin t$ и $\cos t$ на их выражение через $tg\frac{t}{2}$ и обозначим $tg\frac{t}{2} = b$.

Получаем рациональное уравнение $\frac{6b}{1+b^2} - \frac{4(1-b^2)}{1+b^2} = \frac{5}{2}$, которое преобразуется в квадратное $3b^2 + 12b - 13 = 0$ $b_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}$.

Задача свелась к решению двух уравнений $tg\frac{t}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}$.

$$t = 2arctg\frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Значение вида $t = \pi + 2\pi n$ исходному уравнению не удовлетворяет, что проверяется проверкой - подстановкой данного значения t в исходное уравнение.

Ответ: $2arctg\frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Практическое занятие 4: Метод введения вспомогательного угла при решении тригонометрических уравнений

Рассмотрим уравнение вида

$a\sin x + b\cos x = c$, где a, b, c - коэффициенты, x - неизвестное.

$a \neq 0, b \neq 0$, $c \neq 0$.

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ и модуль каждого из них не превосходит единицы, а сумма их квадратов равна 1, то существует угол φ такой, то $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.

Тогда наше уравнение принимает вид: $\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

Тогда $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Если $a^2+b^2\geq c^2$, то уравнение имеет решение:

$$x=(-1)^4\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\varphi+\pi n, n\in Z, \text{ где}$$

$$\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=arctg\frac{b}{a}.$$

Заметим, что введенные обозначения $\cos\varphi\, u\, \sin\varphi$ взаимно заменяемы.

Пример. $\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=1$

Здесь $a=\sqrt{3}; b=-1$, поэтому делим обе части уравнения на $\sqrt{3+1}=2$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin 3x-\sin\frac{\pi}{6}\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$$\sin(3x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6}+3x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$$

$$x=(-1)^k\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z.$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z.$$

Ответ: $(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z.$

Пример: $\cos x+\sin x=\sqrt{2}$

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$:

$$\frac{\cos x}{\sqrt{2}}+\frac{\sin x}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sin x=1$$

т.к. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}\, u\, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$, то уравнение можно записать в виде:

$$\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=1,$$ получим $$\cos(x-\frac{\pi}{4})=1$$

$$x-\frac{\pi}{4}=2\pi n, n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$

Пример.

$$2\sin 17x+\sqrt{3}\cos 5x+\sin 3x=0$$

$$\sin 17x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin 3x=0$$

Замечание. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ и $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sin 17x + \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

$11x + \frac{\pi}{6} = \pi n, n \in Z$ или $6x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. Воспользуемся формулой: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{66} + \frac{\pi}{11}n, n \in Z$, $x = \frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{6}k, k \in Z$.

Получим уравнение: $2\sin\left(11x + \frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$,

$\sin\left(11x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ или $\cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Практическое занятие 5: Уравнения, решаемые с помощью условия равенства одноименных тригонометрических функций.

Рассмотрим условие равенства одноименных тригонометрических функций, т.е. условия, которым должны удовлетворять аргументы α и β, если $\sin\alpha = \sin\beta, \cos\alpha = \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$.

Теорема 1. Для того, чтобы синусы двух аргументов α и β были равны необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: $\alpha - \beta = 2\pi n$ или $\alpha + \beta = \pi + 2\pi k \cdot R$ и $\in Z$.

Доказательство

1) Необходимость.

Пусть $\sin\alpha = \sin\beta$.

Воспользуемся формулой разности синусов: $\sin\alpha - \sin\beta = 0$; $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0, \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$ или $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0, \alpha - \beta = 2\pi n, n \in Z$ $\alpha + \beta = \pi + 2\pi k, k \in Z$.

2) Достаточность.

Пусть $\alpha - \beta = 2\pi n, n \in Z$ или $\alpha+\beta = \pi+2\pi k k \in Z$.

Выразим из данных равенств α: $\alpha = \beta + 2\pi n, n \in Z$ $(\alpha = \pi - \beta + 2\pi k, k \in Z)$.

Тогда $\sin\alpha = \sin(\beta + 2\pi n) = \sin\beta$.

$(\sin\alpha = \sin(\pi - \beta + 2\pi k) = \sin(\pi - \beta) = \sin\beta)$.

Теорема 2. ($\cos\alpha=\cos\beta) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2\pi n, n\epsilon Z$.

Теорема 3. Пусть $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi_n$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi_{k,}$ $k \in Z$.

$(\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta) \Leftrightarrow (\alpha - \beta = \pi n, n\epsilon Z)$/

Доказательства теорем 2 и 3 аналогичные.

Доказанные теоремы используются при решении тригонометрических уравнений, которые либо представляют собой равенство тригонометрических функций, либо могут быть к такому равенству приведены.

Пример. $\sin 3x = \cos x$.

Воспользуемся формулой приведения теоремой 1:

$$\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \left[\begin{array}{l} 3x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\pi n, n\epsilon Z \\ 3x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, n\epsilon Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{4} + \pi k; n, k \in Z$.

Пример. $\operatorname{tg}3x \cdot \operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$. Так как $\operatorname{tg}3x \neq 0$, то разделим обе части уравнения на $\operatorname{tg}3x$.

$$\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}3x}; \operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}3x.$$

Используя формулу приведения, получим $\mathrm{tg}\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-3x)$. *

По теореме 3 имеем:

$$5x+\frac{\pi}{6}-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\pi n, n\epsilon Z.$$

$$8x=\frac{\pi}{3}+\pi n, n\epsilon Z.$$

$$x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{8}n, \epsilon\ Z.$$

При каждом значении x из этой совокупности обе части уравнения * имеют смысл.

Ответ: $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{8}n, n\epsilon Z.$

Практические занятие 6: Графический метод решения тригонометрических уравнений

Тригонометрические уравнения можно решать как аналитически, так и графически. При решении уравнения графически рассматривают две функции и строят их графики в одной системе координат. Абсциссы точек пересечения графиков функций являются решениями уравнения.

Графический метод может использоваться не только для одиночных уравнений, но и для их систем, а также неравенств. В случае с системами необходимо находить не только абсциссы, но и ординаты (если графики функций f(x) и g(x) пересекаются в точке A (x1, y1), то решением системы будет x=x1, y=y1). При решении неравенств ответом будет совокупность абсцисс, при которых график функции f(x) находится выше или ниже (в зависимости от условия) графика функции g(x).

Пример: 2cos πx=2x-1

Рассмотрим функции: y=2cos πx и y=2x-1

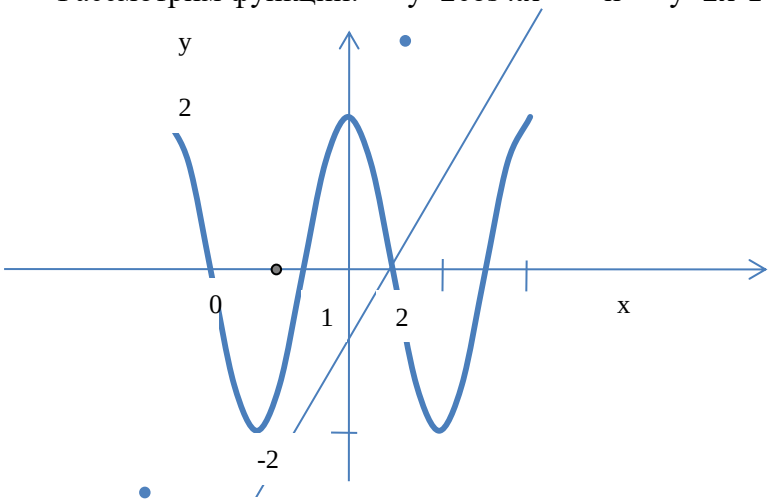

Рис. 33

Точка пересечения графиков имеет координаты (0,5; 0).

Следовательно, x=0,5

Ответ: 0,5

Практическое занятие 7: Функциональный метод решения тригонометрических уравнений

Не всякое уравнение вида f(x)=g(x) в результате преобразований может быть приведено к уравнению того или иного стандартного вида, для которого подходят обычные методы решения. В таких случаях имеет смысл использовать такие свойства функций f(x) и g(x) как монотонность, ограниченность, четность, периодичность и др. Так, если одна из функций возрастает, а другая убывает на определенном промежутке, то уравнение f(x) = g(x) не может иметь более одного корня, который, можно найти подбором. Если функция f(x) ограничена сверху, а функция g(x) – снизу так, что f(x)max=A g(x)min=A, то уравнение f(x)=g(x) равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x)=A \\ g(x)=A \end{cases}$.

Также при использовании функционального метода рационально использовать некоторые теоремы, приведенные ниже. Для их доказательства и использования необходимы следующие уравнения общего вида:

f(x)=x (1) $\underbrace{f(f(...(f(x))...))}_{\text{n раз}} = x$ (2)

Теорема 1. Корни уравнения (1) являются корнями уравнения (2).

Теорема 2. Если f(x) – возрастающая функция на интервале a<f(x)<b, то на данном интервале уравнения (1) и (2) равносильны. Если f(x) – убывающая функция на интервале a<f(x)<b, n - нечетное, то на данном интервале уравнения (1) и (2) равносильны.

Теорема 3. Если в уравнении f(x)=g(x) при любом допустимом x выполняются условия f(x)≥a, g(x)≤a, где a – некоторое действительное число, то дано уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$.

Следствие 1. Если в уравнении f(x)+g(x)=a+b при любом допустимом x f(x)≤a, g(x)≤b, то данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = b \end{cases}$.

Функциональный метод решения уравнений часто используется в комбинации с графическим, так как оба эти метода основаны на одних свойствах функций. Иногда комбинацию этих методов называют графоаналитическим методом.

Пример: 3+(x-π)2=1-2cosx

(x-π)2+2=-2cosx

(x-π)2+2≥2 -2≤-2cosx≤2

$\begin{cases} (x-\pi)^2 + 2 = 2 \\ -2\cos x = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \pi \\ x = \pi + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$; x=π, при k=0

Ответ: π.

Практическое занятие 8: Отбор корней при решении тригонометрических уравнений

При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений используют один из следующих способов.

● Арифметический способ:

а) непосредственная подстановка полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения;

б) перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

● Алгебраический способ:

а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;

б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

● Геометрический способ:

а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений;

б) изображение корней на числовой прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.

Пример. Решить уравнение 6sin2x+2sin22x=5 и указать корни, принадлежащие промежутку $[\pi;2\pi]$.

Приведем уравнение 6sin2x+2sin22x=5 к квадратному уравнению относительно cos2x.

$$6 \cdot \frac{1-cos2x}{2} + 2(1-\cos^2 2x) = 5; 0{,}2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 5 = 0.$$

Откуда cos2x=1, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\kappa,\kappa\in Z$

Здесь применим способ отбора в промежуток при помощи двойного неравенства

$$\pi\le\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\kappa\le 2\pi\ ,\pi-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}\kappa\le 2\pi-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\le\frac{\pi}{2}\kappa\le\frac{7\pi}{4},\frac{3}{2}\le\kappa\le\frac{7}{2}$$

Так как к принимает только целые значения, то возможно лишь к=2,к=3.

При к=2 получим $x=\frac{5\pi}{4}$, при к=3 получим $x=\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\kappa,\kappa\in Z;\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin^2(x+\frac{3\pi}{4})+\sqrt{3}}{\sqrt{5x-x^2}}=0$$

Преобразовывая числитель, приведем уравнение к более простому виду

$$\frac{2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)+\sqrt{3}}{\sqrt{5x-x^2}}=0\Leftrightarrow\frac{2\sin^2 x-2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)}{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5x-x^2}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sin^2 x-\sqrt{3}(1-\sin 2x)+\sqrt{3}}{\sqrt{5x-x^2}}=0\Leftrightarrow\frac{2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x}{\sqrt{5x-x^2}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)}{\sqrt{5x-x^2}}=0$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0\\5x-x^2>0\end{cases}\\\begin{cases}\sin x+\sqrt{3}\cos x=0\\5x-x^2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=k\pi,\kappa\in Z\\x(x-5)>0\end{cases}\\\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,n\in Z\\x(x-5)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=k\pi,\kappa\in Z\\x\in(0;5)\end{cases}\\\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,n\in Z\\x\in(0;5)\end{cases}\end{array}\right.$$

Отбор корней на промежутке (0;5) проведем двумя способами. Первый способ -для первой системы совокупности, второй способ – для второй системы совокупности.

$\begin{cases}x=\kappa\pi,\kappa\in Z\\x\in(0;5)\end{cases}$, 0<k$\pi$<5, $0<k<\frac{5}{\pi}$.

Так как к – целое число, то к=1. Тогда $x=\pi$ - решение исходного уравнения.

Рассмотрим вторую систему совокупности

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,n\in Z\\x\in(0;5)\end{cases}$$

Если n=0, то $x=-\frac{\pi}{3}\notin(0;5)$. При п=-1;-2;… решений не будет.

Если п=1, $x=\frac{2\pi}{3}\in(0;5), x=\frac{2\pi}{3}$ - решение системы и, следовательно, исходного уравнения.

Если п=2, то $x=\frac{5\pi}{3}\notin(0;5)$

При $n\geq 3, n\in N$ решений не будет.

Ответ: $\frac{2\pi}{3};\pi$

7.Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Добрынина, И. В. Элементарная математика : учебно-методическое пособие / И. В. Добрынина, Н. М. Исаева, Н. В. Сорокина. — Тула : ТГПУ, 2018. — 95 с. — ISBN 978-5-6041454-8-7. — Текст : электронный // URL: https://e.lanbook.com/book/113615
2. Буракова, Г. Ю. Элементарная математика : учебное пособие / Г. Ю. Буракова, Т. Н. Карпова, И. Н. Мурина. — Ярославль : , [б. г.]. — Часть 1 — 2012. — 131 с. — ISBN 978-5-87555-752-1. — Текст : электронный — URL: https://e.lanbook.com/book/154018
3. Чулков, П.В. Практические занятия по элементарной математике (2-й курс): учебное пособие / П.В. Чулков. – Москва: Прометей, 2012. – 102 с.: ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437445

Дополнительная литература

1. Дадаян, А. А. Геометрические построения на плоскости и в пространстве: задачи и решения: учебное пособие / А. А. Дадаян. — 2-е изд. – Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2020. - 464 с.: ил. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-807-6. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1082973
2. Елецких, И.А. Математика: учебное пособие / И.А. Елецких, Т.М. Сафронова, Н.В. Черноусова; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Кафедра математики и методики её преподавания. – Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2016. – Ч. 2. – 144 с.: граф., ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=498148
3. Мельников, Р.А. Элементарная математика: учебное пособие / Р.А. Мельников, Г.Г. Ельчанинова; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. – Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2017. – Ч. 3. Тригонометрия. – 101 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=498152
4. Ельчанинова, Г.Г. Элементарная математика: учебное пособие / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. – Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2016. – Ч. 4. Геометрия. Начальные сведения. Треугольник. – 93 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=498154

Интернет-ресурсы

http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал