Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н.Титов
«24» июня 2022 г.

ГЕОМЕТРИЯ

Программа учебной дисциплины Предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Математика,

(очная форма обучения)

Составители: Гришина С.А., кандидат физико-математических наук, доцент
Череватенко О.И., кандидат физико-математических наук

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «25» марта 2022 г. № 5

Ульяновск, 2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Геометрия» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Математика», заочной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Методы математической обработки данных «Алгебра», школьного курса математики.

Результаты изучения дисциплины являются теоретической и методологической основой для изучения дисциплин: «Практикум по решению предметных задач», «Элементы компьютерной и дифференциальной геометрии», «Основы теории функций вещественного и комплексного переменного» для прохождения практик «Научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы), курсовая работа 1», «Педагогическая практика по математике» и итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целями освоения дисциплины «Геометрия» являются

- раскрытие значение геометрии, углубление представления о месте геометрии в изучении окружающего мира;
- изучение основных разделов геометрии и воспитание общей геометрической культуры, необходимой будущему учителю для понимания как основного курса математики, так и школьных факультативных курсов;
- способствовать развитию пространственного мышления.

Задачей освоения дисциплины является развитие умения самостоятельной работы с математической литературой, курс «Геометрия» должен дать студентам знания, навыки и умения, необходимые для успешного изучения других разделов математики

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Геометрия» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации	ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач	ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности

ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач. ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.	ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.	ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.
ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов. ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности	ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.	ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.	ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.

(исследовательской, проектной, групповой и др.).			

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Всего		Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Трудоемк.		Лекции, час.	Практические занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Лабораторные занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Самостоят. работа, час.	
	Зач. ед.	Часы							
2	4	144	4	12	-	-	-	119	экзамен (9)
3	3	108	4	10	-	-	-	88	зачет (6)
4	4	144	4	12	-	-	-	119	экзамен (9)
Итого:	11	396	12	34	-	-	-	326	24

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
2 семестр				
Векторная алгебра и аналитическая геометрия	2	8		50
Геометрические преобразования	2	4		69
Экзамен				9
Итого по 2 семестру	**4**	**12**	**-**	**128**
3 семестр				
Геометрические построения на плоскости	2	8		44
Методы изображений	2	2		44

Зачет				6
Итого по 3 семестру	**4**	**10**	**-**	**94**
4 семестр				
Основания геометрии и элементы геометрии Лобачевского	4	12		119
Экзамен				9
Итого по 4 семестру	**4**	**12**	**-**	**128**
Всего по дисциплине:	**12**	**34**	**-**	**350**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

2 семестр

Аналитическая геометрия и векторная алгебра

Направленные отрезки и векторы. Сложение векторов и его свойства. Разность двух векторов. Умножение вектора на число и его свойства. Системы линейно зависимых и линейно независимых векторов и их свойства. Признаки коллинеарности и компланарности векторов. Векторное пространство. Базис векторного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Вычисление скалярного произведения по координатам векторов в ортонормированном базисе. Ориентация плоскости и пространства. Векторное произведение векторов и его свойства. Смешанное произведение векторов и его свойства. Координаты точек на плоскости и в пространстве. Решение простейших задач в координатах. Формулы преобразования аффинной и прямоугольной систем координат на плоскости. Формулы преобразования аффинной системы координат в пространстве. Уравнения линий и поверхностей. Применение векторно-координатного метода к решению задач элементарной геометрии. Уравнение прямой на плоскости, заданной разными способами. Условие параллельности вектора и прямой. Расположение прямой относительно системы координат. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Аналитическое задание полуплоскости. Метрические задачи теории прямой на плоскости.

Уравнения плоскости, заданной различными способами. Взаимное расположение плоскости и системы координат. Взаимное расположение двух плоскостей. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Аналитическое задание полупространства. Метрические задачи теории прямых и плоскостей. Приложение теории прямых и плоскостей к решению задач элементарной геометрии. Эллипс, свойства эллипса. Гипербола, свойства гиперболы. Директориальное свойство эллипса и гиперболы. Парабола, свойства параболы. Общее уравнение кривой второго порядка. Пересечение кривой второго порядка и прямой.

Асимптотические направления. Центры кривых второго порядка. Касательные к кривым второго порядка. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. Диаметры кривых второго порядка. Теорема о сопряженных диаметрах кривой второго порядка. Главные диаметры и главные направления кривой второго порядка. Характеристическое уравнение кривой второго порядка Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка. Поверхности второго порядка. Метод сечений. Цилиндрические и конические поверхности в пространстве. Поверхности вращения в пространстве. Эллипсоиды и гиперболоиды, и их свойства. Параболоиды и их свойства. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

Геометрические преобразования

Отображения и преобразования множеств. Произведение (композиция) преобразований, группа преобразований. Движения плоскости: параллельный перенос, вращение, осевая симметрия, скользящая симметрия, их свойства. Свойства движений общего вида. Основная теорема движений плоскости. Геометрически равные фигуры и их свойства. Аналитическое выражение движений плоскости. Группа движений плоскости и ее подгруппы. Группа симметрий геометрической фигуры. Классификация движений плоскости первого рода. Теорема Шаля. Классификация движений плоскости второго рода. Гомотетия и ее свойства. Подобия плоскости, свойства подобия. Классификация подобий плоскости. Группа подобий и ее подгруппы. Подобные фигуры. Аффинные преобразования плоскости. Свойства аффинных преобразований плоскости Основная теорема об аффинных преобразованиях плоскости. Аналитическое выражение аффинных преобразований плоскости. Перспективно-аффинные преобразования плоскости: свойства, виды. Группа аффинных преобразований плоскости и ее подгруппы. Инверсия плоскости относительно окружности. Свойства инверсии. Аналитическое выражение инверсии плоскости. Понятия о движениях пространства. Свойства движений пространства. Примеры движений пространства. Приложение теории геометрических преобразований плоскости к решению задач элементарной геометрии.

3 семестр

Построения на плоскости циркулем и линейкой. Основания геометрии

Аксиомы построения циркулем и линейкой. Основные построения. Схема решения задач на построение Конструктивные множества/геометрические места точек Метод конструктивных множеств (метод ГМТ, метод пересечений) при решении задач на построение. Применение свойств движений к решению задач на построение. Применение свойств гомотетии и подобия к решению задач на построение. Алгебраический метод решения задач на построение. Применение свойств инверсии к решению задач на

построение. Критерий разрешимости задач на построение циркулем и линейкой. Задачи на построения, неразрешимые циркулем и линейкой.

Методы изображения

Параллельное проектирование и его свойства. Понятие о центральном проектировании. Изображение плоских фигур при параллельном проектировании. Изображение многогранников при параллельном проектировании. Теорема Польке-Шварца. Изображение круглых тел при параллельном проектировании. Аксонометрия и ее свойства. Полные и неполные изображения. Решение позиционных задач на полных изображениях. Понятие о методе Монжа.

4 семестр

Основания геометрии и элементы геометрии Лобачевского

Понятие об аксиоматическом методе. Требования, предъявляемые к системе аксиом. Непротиворечивость системы аксиом на примере аксиоматики Вейля. Полнота и независимость системы аксиом на примере аксиоматики Вейля. Система аксиом Гильберта и следствия из аксиом. Построение евклидовой геометрии на основе аксиом Вейля Непротиворечивость аксиоматики Гильберта. Пятый постулат Евклида и аксиома параллельности Плейфера. Сумма углов треугольников и пятый постулат Евклида. Первая и вторая теоремы Лежандра. Предложения, эквивалентные аксиоме параллельности (существование треугольника, сумма углов которого равна двум прямым; существование четырехугольника, сумма углов которого равна четырем прямым; существование подобных, но неравных треугольников; коллинеарность трех точек, равноудаленных от прямой; возможность описать окружность вокруг любого треугольника; пересечение любого перпендикуляра к стороне острого угла со второй стороной). Аксиома параллельности Лобачевского. Сумма углов треугольника и четырехугольника на плоскости Лобачевского. Признаки равенства треугольников на плоскости Лобачевского. Параллельные прямые по Лобачевскому. Признак параллельности. Существование параллельных прямых по Лобачевскому. Угол параллельности и его свойства. Функция Лобачевского. Свойства четырехугольников на плоскости Лобачевского. Свойства параллельных прямых на плоскости Лобачевского. Расходящиеся прямые на плоскости Лобачевского: признак и свойства. Окружность, эквидистанта и орицикл на плоскости Лобачевского и их свойства. Интерпретация плоскости Лобачевского (модель Келли-Клейна на евклидовой плоскости, модель Пуанкаре на полуплоскости и др.). Непротиворечивость планиметрии Лобачевского. Независимость аксиомы параллельности Плейфера от остальных аксиом Гильберта. Понятия длины отрезка, площади

многоугольника и объема многогранника. Обзор аксиоматик планиметрии и стереометрии, представленных в школьных учебниках

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

Задания для типовых контрольных работ

ОС-1. Контрольная работа № 1

1. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, O - точка пересечения его диагоналей, M, N, P и Q - середины боковых сторон AA', BB', CC' и DD'. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}$ и $\overrightarrow{OC'}$ в базисе: $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{OD}$.

2. По приведеному ниже рассуждению по доказательству леммы $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ дать заключение о полноте и правильности этого рассужления. При необходимости поправить или дополнить рассуждение:

«Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то из определения равенства векторов получаем, что $AB \parallel CD$ и $AB=CD$, откуда следует, что $ABDC$ параллелограмм. В параллелограмме противоположные стороны равны и параллельны, поэтому $AC \parallel BD$ и $AC=BD$, а значит $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$».

3.Найти высоту *DH* тетраэдра *ABCD*, если: $\overrightarrow{AB}$ {3;1;1}, $\overrightarrow{AC}$ {0;-1;2}, $\overrightarrow{AD}$ {-4;3;1}.

4. Используя векторы на плоскости, найдите косинус угла между медианой *AM* и биссектрисой *BE* прямоугольного треугольника *ABC* с прямым углом *C*, если *AC*=4,*BC*=3.

5. Сформулируйте с помощью векторных соотношений утверждение о свойствах квадрата.

ОС-2. Контрольная работа № 2

1. Даны координаты четырех вершин параллелепипеда ABCDA′B′C′D′. Определить координаты остальных вершин:

A(2;3;-1), B(4;0;2), C(1;1;-6), A′(1 -3;-4).

2.Даны уравнения двух сторон ромба: x+2y-1=0, x+2y+3=0 и его диагонали: x+y=0. Найти уравнения двух других сторон.

3. Даны уравнения плоскостей α: 4x+2y+2z-3=0 и β: 4x+2y+2z-6=0. Найти уравнение их плоскости симметрии.

4.Найти уравнение ортогональной проекции прямой *l* на плоскость π:

$$l:\begin{cases} 2x+y-2z=0, \\ 4x-y-2z-14=0, \end{cases}$$

π: 3x + 2y - z - 1 = 0.

5. Дан параллелепипед *ABCDA′B′C′D′*, *M* – середина ребра *AA′*. Используя метод координат, найти угол между плоскостями *MDC′ и AB′C*, если *AB=2, AD=3, AA′=6*.

ОС-3. Контрольная работа № 3

1. Определить вид линии второго порядка $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$.

2. Напишите уравнение общего диаметра двух линий второго порядка:

$\gamma_1: x^2-2xy-y^2-2x-2y=0$ и $\gamma_2: x^2-2xy+y^2-2x-2y=0$.

3.Составьте каноническое уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен $\sqrt{5}$, а одна из вершин имеет координаты (-2,0).

ОС-4. Контрольная работа № 4

1. Дано аналитическое выражение преобразования плоскости $x'=2x-3y$,

$y' = 3x + 2y - 2$. Указать его вид и найти элементы, его определяющие.

2. Найти аналитические выражения перспективно-аффинного преобразования, для которого прямая l является осью, при условии, что точка P преобразуется в точку Q : $l: x - 2y + 1 = 0$, $P(-1;1)$, $Q(1;-1)$.

3. Построить образ и прообраз окружности при гомотетии, заданной парой соответственных прямых и инвариантной прямой.

4. Через центр правильного треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60°. Докажите, используя свойства поворота, что треугольник высекает на этих прямых два равных отрезка.

ОС-5. Контрольная работа № 5

1. Построить треугольник *ABC*, зная сторону *BC*, угол *B* и медиану *AM*.
2. Построить треугольник по высотам h_a, h_c и медиане m_b.
3. Даны две вершины *A* и *B* треугольника и прямая, содержащая биссектрису треугольника, проходящую через вершину *C*. Постройте треугольник ABC.
4. Постройте прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали.

ОС-6. Контрольная работа № 6

1. Дано изображение равнобедренного треугольника, высота которого равна основанию. Построить изображение двух других высот.
2. Построить сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками так, что одна лежит на плоскости нижнего основания, а две другие – на ее боковых ребрах.
3. Построить сечение пятиугольной пирамиды *SABCDE* плоскостью, проходящей через точку основания параллельно грани *SBC*.
4. Дано изображение цилиндра. Построить изображение правильной шестиугольной призмы, описанной около этого цилиндра

ОС-7. Контрольная работа № 7

1. Доказать, что первая аксиома аксиоматики Вейля аффинного пространства не зависит от второй аксиомы
2. Если прямая *a* не проходит через вершины треугольника *ABC*, то она не может пересекать всех трех сторон треугольника.
3. Доказать следующее утверждение: двупрямоугольник *ABCD* с основанием *AB* является четырёхугольником Саккери тогда и только тогда, когда углы *C* и *D* конгруэнтны.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 1. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 12 с..

2. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 2. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 11 с..
3. Прокопьев Г.С., Салдаева Г.В. Методические указания и контрольная работа № 1 по теме «Геометрия на плоскости». Для студентов – заочников 1 курса физико-математического факультета.- Ульяновск, 1996. (Библиотека УлГПУ).
4. Прокопьев Г.С., Череватенко О.И. Методические рекомендации и контрольная работа № 2 по теме «Геометрия в пространстве». Для студентов – заочников 2 курса физико-математического факультета .- Ульяновск, 2010. (Библиотека УлГПУ).
5. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 3. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 112 с..
6. Куренева Т.Н. Методические указания и контрольная работа № 3 по теме «Методы изображений. Проективная геометрия». Для студентов – заочников 3 курса физико-математического факультета .- Ульяновск, 2004. (Библиотека УлГПУ).

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Контрольная работа № 1 ОС-2 Контрольная работа № 2 ОС-3 Контрольная работа № 3 ОС-4 Контрольная работа № 4 ОС-5 Контрольная работа № 5 ОС-6 Контрольная работа № 6 ОС-7 Контрольная работа № 7	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности ОР-4. Знает роль и место

	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-8-10 Экзамен и зачет в форме устного собеседования	математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики. ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию. ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике. ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; ОР-10. Владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике. ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности. ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Геометрия».

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Перечень вопросов к экзамену
ОС-8. 2 семестр

Аналитическая геометрия и векторная алгебра

1. Направленные отрезки и векторы. Сложение векторов и его свойства. Разность двух векторов.
2. Умножение вектора на число и его свойства.
3. Системы линейно зависимых и линейно независимых векторов и их свойства. Признаки коллинеарности и компланарности векторов.
4. Векторное пространство. Базис векторного пространства. Координаты вектора в данном базисе.
5. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Вычисление скалярного произведения по координатам векторов в ортонормированном базисе
6. Ориентация плоскости и пространства. Векторное произведение векторов и его свойства.
7. Смешанное произведение векторов и его свойства.
8. Координаты точек на плоскости и в пространстве. Решение простейших задач в координатах. Формулы преобразования аффинной и прямоугольной систем координат на плоскости. Формулы преобразования аффинной системы координат в пространстве.
9. Уравнения линий и поверхностей.
10. Применение векторно-координатного метода к решению задач элементарной геометрии.
11. Уравнение прямой на плоскости, заданной разными способами. Условие параллельности вектора и прямой. Расположение прямой относительно системы координат
12. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
13. Аналитическое задание полуплоскости. Метрические задачи теории прямой на плоскости.
14. Уравнения плоскости, заданной различными способами. Взаимное расположение плоскости и системы координат. Взаимное расположение двух плоскостей.

15. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.
16. Аналитическое задание полупространства. Метрические задачи теории прямых и плоскостей.
17. Приложение теории прямых и плоскостей к решению задач элементарной геометрии.
18. Эллипс, свойства эллипса.
19. Гипербола, свойства гиперболы.
20. Директориальное свойство эллипса и гиперболы
21. Парабола, свойства параболы.
22. Общее уравнение кривой второго порядка. Пересечение кривой второго порядка и прямой. Асимптотические направления.
23. Центры кривых второго порядка.
24. Касательные к кривым второго порядка. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.
25. Диаметры кривых второго порядка. Теорема о сопряженных диаметрах кривой второго порядка. Главные диаметры и главные направления кривой второго порядка.
26. Характеристическое уравнение кривой второго порядка Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка.
27. Поверхности второго порядка. Метод сечений.
28. Цилиндрические и конические поверхности в пространстве.
29. Поверхности вращения в пространстве.
30. Эллипсоиды и гиперболоиды, и их свойства.
31. Параболоиды и их свойства.
32. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

Геометрические преобразования

1. Отображения и преобразования множеств. Произведение (композиция) преобразований, группа преобразований.
2. Движения плоскости: параллельный перенос, вращение, осевая симметрия, скользящая симметрия, их свойства.
3. Свойства движений общего вида.
4. Основная теорема движений плоскости.
5. Геометрически равные фигуры и их свойства.
6. Аналитическое выражение движений плоскости. Группа движений плоскости и ее подгруппы. Группа симметрий геометрической фигуры.

7. Классификация движений плоскости первого рода. Теорема Шаля.
8. Классификация движений плоскости второго рода.
9. Гомотетия и ее свойства.
10. Подобия плоскости, свойства подобия. Классификация подобий плоскости. Группа подобий и ее подгруппы. Подобные фигуры.
11. Аффинные преобразования плоскости. Свойства аффинных преобразований плоскости
12. Основная теорема об аффинных преобразованиях плоскости.
13. Аналитическое выражение аффинных преобразований плоскости.
14. Перспективно-аффинные преобразования плоскости: свойства, виды.
15. Группа аффинных преобразований плоскости и ее подгруппы.
16. Инверсия плоскости относительно окружности. Свойства инверсии. Аналитическое выражение инверсии плоскости.
17. Понятия о движениях пространства. Свойства движений пространства. Примеры движений пространства.
18. Приложение теории геометрических преобразований плоскости к решению задач элементарной геометрии.

ОС – 9. Зачет. 3 семестр

Построения на плоскости циркулем и линейкой. Основания геометрии

1. Аксиомы построения циркулем и линейкой. Основные построения. Схема решения задач на построение
2. Конструктивные множества/геометрические места точек
3. Метод конструктивных множеств (метод ГМТ, метод пересечений) при решении задач на построение.
4. Применение свойств движений к решению задач на построение.
5. Применение свойств гомотетии и подобия к решению задач на построение.
6. Алгебраический метод решения задач на построение.
7. Применение свойств инверсии к решению задач на построение.
8. Критерий разрешимости задач на построение циркулем и линейкой.
9. Задачи на построения, неразрешимые циркулем и линейкой.

Методы изображения

1. Параллельное проектирование и его свойства. Понятие о центральном проектировании.
2. Изображение плоских фигур при параллельном проектировании.

3. Изображение многогранников при параллельном проектировании. Теорема Польке-Шварца.
4. Изображение круглых тел при параллельном проектировании.
5. Аксонометрия и ее свойства.
6. Полные и неполные изображения.
7. Решение позиционных задач на полных изображениях.
8. Понятие о методе Монжа.

ОС – 10. 4 семестр

Основания геометрии и элементы геометрии Лобачевского

1. Понятие об аксиоматическом методе. Требования, предъявляемые к системе аксиом. Непротиворечивость системы аксиом на примере аксиоматики Вейля.
2. Полнота и независимость системы аксиом на примере аксиоматики Вейля.
3. Система аксиом Гильберта и следствия из аксиом.
4. Построение евклидовой геометрии на основе аксиом Вейля
5. Непротиворечивость аксиоматики Гильберта.
6. Пятый постулат Евклида и аксиома параллельности Плейфера.
7. Сумма углов треугольников и пятый постулат Евклида.
8. Первая и вторая теоремы Лежандра.
9. Предложения, эквивалентные аксиоме параллельности (существование треугольника, сумма углов которого равна двум прямым; существование четырехугольника, сумма углов которого равна четырем прямым; существование подобных, но неравных треугольников; коллинеарность трех точек, равноудаленных от прямой; возможность описать окружность вокруг любого треугольника; пересечение любого перпендикуляра к стороне острого угла со второй стороной).
10. Аксиома параллельности Лобачевского. Сумма углов треугольника и четырехугольника на плоскости Лобачевского. Признаки равенства треугольников на плоскости Лобачевского.
11. Параллельные прямые по Лобачевскому. Признак параллельности. Существование параллельных прямых по Лобачевскому. Угол параллельности и его свойства. Функция Лобачевского.
12. Свойства четырехугольников на плоскости Лобачевского.
13. Свойства параллельных прямых на плоскости Лобачевского. Расходящиеся прямые на плоскости Лобачевского: признак и свойства.
14. Окружность, эквидистанта и орицикл на плоскости Лобачевского и их свойства.

15. Интерпретация плоскости Лобачевского (модель Келли-Клейна на евклидовой плоскости, модель Пуанкаре на полуплоскости и др.). Непротиворечивость планиметрии Лобачевского. Независимость аксиомы параллельности Плейфера от остальных аксиом Гильберта.

16. Понятия длины отрезка, площади многоугольника и объема многогранника.

17. Обзор аксиоматик планиметрии и стереометрии, представленных в школьных учебниках.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачет
3 семестры	Разбалловка по видам работ	2 х 1=2 баллов	5 х 1=5 баллов	229 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	2 баллов max	7 балла max	236 баллов max	300 баллов max

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
2, 4 семестр	Разбалловка по видам работ	2 х 1=2 баллов	6 х 1= 6 Баллов	296 балла	96 баллов
	Суммарный макс. Балл	2 баллов max	8 баллов max	304 балла Max	400 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 3 семестра

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«зачтено»	151-300
«не зачтено»	0-150

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 2, 4 семестров

Оценка	**Баллы (4 ЗЕ)**
«отлично»	361-400
«хорошо»	281-360
«удовлетворительно»	201-280
«неудовлетворительно»	200 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий (2 семестр)

Занятие 1.

Тема: Понятие вектора. Коллинеарные векторы. Равные векторы. Линейные операции над векторами.

1. Понятие вектора, нулевого вектора; определения равных, коллинеарных, противоположных, компланарных векторов. Длина вектора.
2. Операция сложения векторов: определение суммы векторов; свойства операции сложения.
3. Вычитание векторов.
4. Умножение вектора на число: определение, свойства операции.

Решить задачи: [2] № 1, 5, 6, 19, 24.

Занятие 2.

Тема: Скалярное произведение векторов. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии. Векторное и смешанное произведение векторов.

1. Скалярное произведение векторов: определение, свойства (коммутативность, ассоциативность относительно умножения на число. дистрибутивность. необходимое и достаточное условия равенства нулю скалярного произведения, скалярный квадрат, вычисление через координаты векторов). Обоснование свойств.
2. Определение ориентированного трехмерного пространства.
3. Определение векторного произведения двух векторов.
4. Геометрический смысл модуля векторного произведения.
5. Формула для вычисления векторного произведения через координаты множителей.

6. Свойства векторного произведения: антикоммутативность относительно скалярного множителя, дистрибутивность относительно сложения, условие коллинеарности векторов (доказательства свойств).
7. Вычисление площади треугольника с помощью векторного произведения (вывод формулы площади).
8. Определение смешанного произведения трех векторов.
9. Геометрический смысл смешанного произведения (с обоснованием).
10. Формула для вычисления смешанного произведения (знать вывод).
11. Свойства смешанного произведения с обоснованием их:
    a. инвариантность относительно циклической перестановки;
    b. изменение знака при перестановке двух множителей;
    c. ассоциативность относительно скалярного множителя;
    d. дистрибутивность относительно сложения.
12. Формула необходимого и достаточного условий компланарностии трех векторов (с обоснованием).
13. Вычисление объема параллелепипеда, тетраэдра с помощью смешанного произведения (вывод формулы объема тетраэдра).

Решить задачи: [2] 105, 116, 124. № 1012 (а, б), 1036, 1019, 1022, 1023 (б), 1025 (б), 1031 (а), 1035.

Занятие 3.

Тема: Прямая линия. Различные способы задания прямой. Общее уравнение прямой. Геометрический смысл знака многочлена Ах + Ву + С. Параллельность и перпендикулярность двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Метод координат в решении задач школьного курса геометрии

1. Вывод уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.
2. Вывод уравнения прямой, заданной двумя точками.
3. Вывод уравнения прямой, заданной точкой и перпендикулярным вектором. Нормальный вектор прямой.
4. Общее уравнение прямой.
5. Уравнение прямой «в отрезках».
6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
7. Расположение прямой в системе координат в зависимости от равенства нулю коэффициентов в общем уравнении прямой.

Решить задачи: [2] № 369 – 372 (устно), 373 (а, в, г, д, ж), 375, 376, 390, 392 (а, б, в, д, ж), 395 (а, б), 402.

Занятие 4.

Тема: Различные способы задания прямой.

1. Вывод уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.
2. Параметрические, канонические уравнения прямой.
3. Вывод уравнения прямой, заданной двумя точками.
4. Уравнение прямой, заданной двумя плоскостями. Общее уравнение прямой.
5. Переход от общего уравнения прямой к параметрическим или каноническим уравнениям.
6. Исследование взаимного расположения двух прямых. Обоснование условий, определяющих прямые скрещивающиеся. пересекающиеся, параллельные, совпадающие..

Решить задачи: [2] № 1133 (а, б, в), 1135, 1140 (а, б, в), 1141, 1143 (а).

Занятие 5.

Тема: Преобразования плоскости. Движения. Движения первого и второго рода. Формулы движений. Применение к решению задач.

1. Существует ли: параллельный перенос, поворот, симметрия, - отображающие: а) прямую на себя; б) пару параллельных прямых на себя;

в) один отрезок на другой отрезок;
г) луч на сонаправленный с ним;
д) пару пересекающихся прямых на себя;
е) точку А на точку В.

2. Параллельный перенос задан парой соответствующих точек М(1;-3) и М´(7;0). Записать формулы параллельного переноса и найти образ прямой 2x +3y-2=0.

3. Параллельный перенос задан формулами x' = x + 2, y' = y – 8. На прямой ℓ: 2x – 3y – 7 = 0. Найти точку, которая при данном переносе попадает на прямую m: 7x – y + 5 = 0.

4. Даны два равных непараллельных отрезка АВ, А'В' и прямая ℓ. Построить образ прямой ℓ при повороте, переводящим точки А и В соответственно в точки А' и В'.

5. На прямых ℓ: x+2y-8=0 и m: 5x-3y+1=0. Найдите точки, симметричные относительно начала координат.

6. Даны две различные точки В, В' и прямая ℓ. Построить образ прямой ℓ при осевой симметрии. для которой точки В, В' являются соответствующими.

7. Найти координаты образа точки А (1, 1) при скользящей симметрии, при которой точка О (0, 0)и В (1, 2), переходящие соответственно в точки О' (2, 5) и В' (4, 4).

8. Составить формулы движения первого рода, при котором прямая x - y= 0 является образом прямой x - y - 4 = 0, а точка А (2, 0) – инвариантна.

9. Выяснить, какие из данных формул являются формулами движений. Определить вид движения.

а) x' = ¾ x – 4/5y + 1 б) x' = 2 x + y + 1 в) x' = - x + 2
y' = 4/5x + 3/5y - 1 y' = x + 2 y' = - y - 4

1. В трапеции АВСД точки О и М середины отрезков АС и СД соответственно. Построить образ Δ ВСМ при композиции преобразований $S_{AB}° T_{BA} ° Z_O$.

Занятие 6.

Тема: Преобразования плоскости. Подобие и гомотетия.

1. Существует ли гомотетия, отображающая: а) одну из двух пересекающихся (параллельных) прямых на другую; б) луч в ему сонаправленный (противоположно направленный); в) окружность на неравную ей окружность.
2. Каким преобразованием является произведение двух гомотетий с общим центром (с различными центрами)?
3. Какое из данных преобразований является подобием:
   $x'=3x-4y+1$ $x'=8x+y+3$
   $y'=4x+3y-2$ $y'=x+8y-3$
4. Найти координаты образа точки А (2;-4) при гомотетии с центром С (1;-8) и коэффициентом к = - 3.
5. Найти центр и коэффициент гомотетии отображающего точки А(-2;1), В(2;-1) соответственно в точки А'(6;5), В'(6,11).
6. АВСД – трапеция, М и К – середины отрезков СД и ВД соответственно, О- точка пересечения диагоналей. Построить образ четырехугольника КМСО при композиции преобразований $S_{AB}° R^{60}_{A}° T_{CB} ° H^{2}_{D}$.
7. Доказать, что если A_1,B_1,C_1 – середины сторон треугольника АВС, то треугольник АВС гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$.
8. В АВСД точки $A_1,B_1,C_1,Д_1$ – центры тяжести треугольников ВСД, СДА, ДАВ, АВС соответственно. Найти площадь четырехугольника $A_1B_1C_1Д_1$, если $S_{ABCД}$=P.
9. Доказать, что точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения продолжения боковых сторон лежат на прямой, проходящей через середины оснований трапеции.

Планы практических занятий (3 семестр)

Занятие 1 - 4. Построения циркулем и линейкой.

1. На плоскости нарисована окружность, но центр ее не отмечен. Постройте его.
2. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.
3. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.
4. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.
5. Проведите касательную к окружности, проходящую через данную точку вне окружности.
6. Проведите общую касательную к двум данным окружностям.
7. Дан отрезок длины a и натуральное число n. Построить отрезок длины .
8. Дан отрезок длины a и натуральные числа m и n. Построить отрезок длины m/n a.
9. Даны отрезки с длинами a, b, c. Построить отрезок, длина которого равна ab/c.
10. Даны отрезки с длинами a и b. Построить отрезок длины .
11. Дан угол. Внутри угла найти точку, находящуюся на заданных расстояниях от сторон угла.
12. Построить треугольник по стороне, опущенной на нее высоте и радиусу описанной окружности. Сколько получится треугольников?
13. В данном треугольнике провести прямую, параллельную основанию так, чтобы сумма отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием, была равна основанию.
14. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Провести прямую, пересекающую отрезок AC в точке X, а отрезок BC — в точке Y таким образом, что AX = XY = YB.

Занятие 5. Параллельное проектирование. Изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.

Цель: Основные факты параллельной геометрии; изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.

1. Постройте параллельную проекцию равностороннего треугольника. В нем изобразите:
   а) среднюю линию;
   б) радиус вписанной окружности;
   в) радиус описанной окружности.

2. Дано изображение ромба. Найдите изображение его высоты, если острый угол ромба равен 60°.

3. Дано изображение треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около данного треугольника.

4. Дано изображение равнобедренного треугольника, в котором боковая сторона в два раза больше его основания. Постройте изображения всех его замечательных точек.

5. Постройте параллельную проекцию фигуры, являющуюся объединением квадрата и равностороннего треугольника, имеющих общую сторону.

6. Постройте изображение окружности с заданным радиусом.

Домашнее задание.

1. Постройте параллельную проекцию квадрата. В нем изобразите:

а) радиус вписанной окружности;
б) Радиус описанной окружности;
в) перпендикуляр, проведенный из вершины А на прямую DM, где M – середина стороны AB.

2.Дано изображение треугольника ABC, одна сторона AB которого равна 10см., а другая сторона AC – 8см. Постройте изображение биссектрисы данного треугольника, проведенной из вершины А.

3. Постройте параллельную проекцию квадрата, вписанного в правильный треугольник.

Планы практических занятий (4 семестр)

Занятие 1. Треугольники. Сумма углов треугольника. Замечательные точки и линии треугольника. Теорема Пифагора. Признаки равенства треугольников.

На занятии систематизируются знания учащихся о треугольниках и его высотах, его медианах, учащиеся формулируют и доказывают теоремы о точке пересечения медиан, о подобии треугольников, выводят формулу нахождения медианы треугольника, если известны его стороны, формулируют и доказывают теоремы о точке пересечения высот, о подобии треугольников, образованных высотой, опущенной и вершины прямого угла данного треугольника; выводят формулу нахождения высоты треугольника, если известны его стороны; знакомятся с минимальным свойством треугольника.

Теорема. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
Замечание: В случае тупоугольного треугольника основания его высот находятся на продолжениях сторон, прилежащих к тупому углу:
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется ортоцентром.
Определение 2. Треугольник, образованный основаниями высот треугольника, называется ортоцентрическим.
Задания:
1. Доказать, что для произвольного треугольника ABC верно равенство: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$, где r - радиус вписанной в треугольник окружности.

2. Пусть O, Q, M и H – соответственно центры описанной, вписанной окружностей, точка пересечения медиан и точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что если две любые из этих точек совпадают, то этот треугольник – равносторонний.

3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B_1 и C_1, для которых $\angle AB_1C = = \angle AC_1B = 90°$. Доказать, что $AB_1 = AC_1$.
(Зарубежные математические олимпиады: Нью-Йорк, 76).

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется центроидом.
1. Длина медианы треугольника выражается формулой
$m_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}}$,
где a, b, c – длины сторон треугольника.

2. Для всякого треугольника выполняется соотношение:
$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

4. m_a, m_b и m_c – медианы треугольника. Докажите, что если $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{27R^2}{4}$, то треугольник равносторонний, где R – радиус описанной окружности.

Теорема. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется инцентром.

5. Пусть l_a, l_b, l_c – биссектрисы треугольника, p – его полупериметр. Докажите, что если
$l^2_a + l^2_b + l^2_c = p^2$, то треугольник равносторонний.

6. Дан ΔABC. Биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 его внутренних углов пересекаются в точке O. Известно, что треугольники AOB_1 и AOC_1 симметричны относительно прямой AO, треугольники A_1OB и BOC_1 – относительно BO, а треугольники A_1OC и B_1OC – относительно OC. Доказать, что ΔABC – равносторонний.

Домашнее задание.
1. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B и C , для которых AB C = = AC B = . Доказать, что AB = AC .
2. Треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника. (Всероссийская олимпиада, 1964г.(Москва)).
3. Пусть m_a, m_b, m_c – медианы треугольника, а h_a, h_b, h_c – его высоты. Докажите, что если $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} = 3$, то треугольник равносторонний.

Занятие 2. Параллелограмм. Трапеция.

1. На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника ABCD отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что AM = CP, BN = DQ, BM = DP, NC = QA. Докажите, что ABCD и MNPQ — параллелограммы.

2. Пусть M — середина стороны BC параллелограмма ABCD. В каком отношении отрезок AM делит диагональ BD?

3. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60o. Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие через середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.

4. Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

5. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 41, высота равна 40 и средняя линия равна 45. Найдите основания.

6. Середину более длинной боковой стороны прямоугольной трапеции соединили с вершинами трапеции. При этом трапеция разделилась на три равнобедренных треугольника. Найдите величину острого угла трапеции.

Домашнее задание.
1. Два различных параллелограмма ABCD и A1B1C1D1 с соответственно параллельными сторонами вписаны в четырехугольник PQRS (точки A и A1 лежат на стороне PQ, B и B1- на QR и т. д.). Докажите, что диагонали четырехугольника параллельны сторонам параллелограммов.

2. В трапеции ABCD с основаниями AB = a и CD = b проведён отрезок A1B1, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции проведён отрезок A2B2, тоже соединяющий середины диагоналей, и так далее. Может ли в последовательности длин отрезков AB, A1B1, A2B2,... какое-то число встретиться дважды? Является ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей)? Стремится ли она к какому-нибудь пределу?

3. Основания трапеции равны a и b (a > b). Отрезки, соединяющие середину большего основания с концами меньшего основания, пересекают диагонали трапеции в точках M и N. Найдите MN.

Занятие 3. Четырехугольники.

1. Угол между сторонами AB и CD четырехугольника ABCD равен j. Докажите, что AD2 = AB2 + BC2 + CD2 – 2(AB · BCcos B + BC · CDcos C + CD · ABcos j).

2. Середины M и N диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника ABCD не совпадают. Прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках M1 и N1. Докажите, что если MM1 = NN1, то AD||BC.

3. Четырёхугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Найдите EF, если BC = 1.

4. Докажите, что если для вписанного четырехугольника ABCD выполнено равенство CD = AD + BC, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.

5. Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

6. Четырёхугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвёртого треугольника. Найдите площадь данного четырёхугольника.

Домашнее задание.

1. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что AB > BC > KC, BK = 4 + , а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найдите DC.

2. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что BC > AB > KC, KC = 6 + , а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 22 и 11. Найдите DC.

3. В трапеции основания равны a и b, диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен A. Найдите площадь трапеции.

Занятие 4. Окружность. Углы связанные с окружностью. Вписанный и описанный четырехугольник.

Основные сведения

1. Угол ABC, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют вписанным в окружность. Пусть O — центр окружности. Тогда PABC = PAOC, если точки B и O лежат по одну сторону от AC, и PABC = 180° – PAOC, если точки B и O лежат по разные стороны от AC. Важнейшим и наиболее часто используемым следствием этого факта является то, что величины углов, опирающихся на равные хорды, либо равны, либо составляют в сумме 180°.

2. Величина угла между хордой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, равна половине угловой величины дуги AB.

3. Угловые величины дуг, заключенных между параллельными хордами, равны.

4. Как уже говорилось, величины углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме 180°. Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введем понятие «ориентированный угол между прямыми». Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD (обозначение: P(AB,CD)) будем называть величину угла. на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на n · 180°, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме 180° или, что по нашему соглашению то же самое, 0°).
Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:
а) P(AB,BC) = – P(BC,AB);
б) P(AB,CD) + P(CD,EF) = P(AB,EF);
в) точки A,B,C,D, не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда P(AB,BC) = P(AD,DC) (для доказательства этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки B и D лежат по одну сторону от AC; точки B и D лежат по разные стороны от AC).

ЗАДАЧИ

1.а) Из точки A, лежащей вне окружности, выходят лучи AB и AC, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла BAC равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

б) Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла BAC равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричного ему относительно вершины A.

2.Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC1 и PB1 на прямые AB и AC. Докажите, что PC1AP = PC1B1P.

1.Докажите, что если центр вписанной в четырехугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей, то этот четырехугольник- ромб.

2.Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. Докажите, что PAOB + PCOD = 180°.

3.Докажите, что если существует окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника ABCD, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника перпендикулярны.

4.Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Домашнее задание.

1Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

2.Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. В треугольнике AOB проведены высоты AA1 и BB1, а в треугольнике COD- высоты CC1 и DD1. Докажите, что точки A1,B1,C1 и D1 лежат на одной прямой.

3. Углы при основании AD трапеции ABCD равны 2a и 2b. Докажите, что трапеция описанная тогда и только тогда, когда BC/AD = tg atg b.

Занятие 5. Подобные фигуры.

1. В треугольнике ABC на средней линии DE, параллельной AB, как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Найдите MN, если BC = a, AC = b, AB = c.

2. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S1, S2, S3. Найдите площадь данного треугольника.

3. В равнобедренный треугольник ABC (AB = BC) вписана окружность радиуса 3. Прямая l касается этой окружности и параллельна прямой AC. Расстояние от точки B до прямой l равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC.

4. В трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. На продолжениях боковых сторон AB и DC за меньшее основание BC отложены отрезки BM и CN так, что получается новая трапеция BMNC, подобная трапеции ABCD. Найдите площадь трапеции ABCD, если площадь трапеции AMND равна P, а сумма углов CAD и BDA равна 60o.

5. Через точку A общей хорды BC пересекающихся окружностей проведена прямая, пересекающая окружности в таких точках D и E соответственно, что прямая BD касается одной окружности, а прямая BE — другой. Продолжение хорды CD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найдите отношение BD : BE, если AD = 8 и AE = 2. Сравните площади треугольников BDE и BDF.

6. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если BC = 4, а AK = 6.

Домашнее задание.

1. В выпуклом четырёхугольнике ABCD известно, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD. Докажите, что ABCD — трапеция или параллелограмм.
2. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH, а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что треугольники MNC и ABC подобны.
3. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что его можно разрезать на два равных треугольника.

Занятие 6. Площадь фигур.

1. Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найдите угол CBD, если площади треугольников DCM и ACB относятся как 1:4.

2. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

3. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника ABCD и пересекает сторону DC в единственной точке F и сторону BC в единственной точке E. Найдите площадь трапеции AFCB, если AB = 32, AD = 40 и BE = 1.

4. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

5. Два прямоугольника положены на плоскость так, что их границы имеют восемь точек пересечения. Эти точки соединены через одну. Доказать, что площадь полученного четырёхугольника не изменится при поступательном перемещении одного из прямоугольников.

6. На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника построены квадраты, расположенные вне треугольника. Вычислить площадь шестиугольника, вершины которого совпадают с теми вершинами квадратов, которые не принадлежат данному треугольнику. Длина гипотенузы c и сумма длин катетов s известны.

Домашнее задание.
1. Докажите, что площадь треугольника можно выразить по формуле S = (p - a)ra, где ra — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны, равной a, p — полупериметр треугольника.
2. В трапецию ABCD с основаниями BC и AD и боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром O. Найдите площадь трапеции, если угол DAB прямой, OC = 2, OD = 4.
3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в семь раз меньше площади четырёхугольника ABDE. Найдите хорду DE и радиус окружности, если AB = 4 и C = 45°.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Остыловский, А. Н. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. Н. Остыловский. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. - 92 с. - ISBN 978-5-7638-2196-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/443221 (дата обращения: 14.03.2022). – Режим доступа: по подписке.
2. Бортаковский, А. С. Аналитическая геометрия в примерах и задачах : учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — 2-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 496 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-011202-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1069929 (дата обращения: 14.03.2022). – Режим доступа: по подписке.
3. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии : учебное пособие : [16+] / Н.В. Ефимов. – 14-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2008. – 239 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69316 (дата обращения: 06.04.2021). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-9221-0971-0. – Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Ильин, В. А. Аналитическая геометрия : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд., стер. – Москва : Физматлит, 2009. – 224 с. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 3). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82797 (дата обращения: 14.03.2022). – ISBN 978-5-9221-0511-8. – Текст : электронный.
2. Осипенко, С. А. Аналитическая геометрия: прямая и плоскость : методическое пособие : [16+] / С. А. Осипенко, М. Г. Булатова. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. – 40 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=429201 (дата обращения: 14.03.2022). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-4475-3903-0. – DOI 10.23681/429201. – Текст : электронный.
3. Беклемишева, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учебное пособие / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; ред. Д. В. Беклемишев. – 2-е изд., перераб. – Москва : Физматлит, 2006. – 496 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82795 (дата обращения: 14.03.2022). – ISBN 5-9221-0010-6. – Текст : электронный.

Интернет-ресурсы

- ЭБС ZNANIUM.COM http://znanium.com
- ЭБС «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru
- Электронная библиотека http://lib.mexmat.ru/books/75829 (свободный доступ)
- Электронная библиотека http://www.razym.ru (свободный доступ)
- http://nsportal.ru/sites/default/files/2012/12/10/tvorcheskiy_proekt_po_matematike_na_temu.docx.
- http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал