Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«25» июня 2021г.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Программа учебной дисциплины модуля
«Содержательные аспекты современного математического образования»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки
44.04.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Методология математического образования

(очная форма обучения)

Составители: Глухова Н.В., доцент кафедры высшей математики;
Сибирева А.Р., доцент кафедры высшей математики;
Фолиадова Е.В., доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Линейные операторы и их приложения» относится к дисциплинам модуля «Содержательные аспекты современного математического образования» Блока 1. *Дисциплины (модули)* части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Методология математического образования», очной формы обучения. Дисциплина является дисциплиной по выбору, альтернативные дисциплины – «Прикладной функциональный анализ», «Элементы математической экономики».

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках математических дисциплин образовательных программ бакалавриата, а также дисциплины Б1.В.01.01. «Динамические системы», дисциплин по выбору Б1.В.01.ДВ.01.01/02/03 «Задачи оптимизации и их математические модели»/ «Вариационные методы и модели»/ «Теория принятия решений».

Результаты освоения дисциплины являются основой для научно-исследовательской работы магистрантов.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Актуальность курса определяется ключевой ролью теории операторов, прежде всего линейных, в функциональном анализе и современной математической физике, а также в экономических и иных приложениях функционального анализа.

Целями освоения дисциплины «*Линейные операторы и их приложения*» являются:

- актуализация и систематизация знаний магистрантов в области линейной алгебры, полученных на первой ступени высшего образования;
- формирование базовых знаний в области спектральной теории линейных операторов;
- формирование представлений о линейных моделях как наиболее используемых, об их возможностях при описании процессов различной природы, о приложениях спектральной теории линейных операторов в некоторых областях знания;
- формирование умения работать с математическими объектами высокого уровня абстракции, развитие соответствующего типа мышления.

В соответствии с этим при преподавании дисциплины ставятся следующие **задачи**:

- повторение сведений из линейной алгебры, относящихся к линейным операторам в конечномерных пространствах и их матричным представлениям, к преобразованиям матриц при замене базиса, свойствам спектров различных классов матриц и др.;
- изучение наиболее значимых классов нормальных операторов в конечномерных пространствах и методов приведения их матриц к жордановой нормальной форме;
- изучение основ спектральной теории линейных операторов в бесконечномерных банаховых и гильбертовых пространствах, наиболее значимых классов линейных операторов в гильбертовом пространстве, как ограниченных, так и неограниченных (самосопряженные/симметрические, унитарные/изометрические, нормальные операторы; компактные операторы), особенностей их спектров, вплоть до спектральной теоремы для самосопряженных/унитарных операторов;
- рассмотрение примеров дифференциальных, интегральных и других конкретных бесконечномерных операторов, исследование их спектральных свойств, получение спектральных разложений;

- актуализация и совершенствование понятийного аппарата, необходимого для исследований в области функционального анализа; продолжение знакомства магистрантов с базовыми структурами и основными принципами функционального анализа;
- формирование приемов мыслительной деятельности, связанных с обобщением (абстрагированием) и конкретизацией математических понятий.

В результате освоения программы магистрант должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	Умеет	владеет
УК-1. Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий. ИУК 1.3. Рассматривает различные варианты решения проблемной ситуации на основе системного подхода, оценивает их преимущества и риски. ИУК 1.4. Грамотно, логично, аргументированно формулирует собственные суждения и оценки. Предлагает стратегию действий.	ОР-1. Приемы и методы выработки стратегии действий по разрешению проблемной ситуации. ОР-2 о существовании различных вариантов решения проблемной ситуации на основе системного подхода, методах оценки преимуществ и рисков как результатов принятого решения.	ОР-3 Грамотно, логично, аргументированно формулировать собственные суждения и оценки, вырабатывать стратегию действий	
ПК-2. Способен проектировать и реализовывать учебные программы математических			

дисциплин (модулей) для образовательных организаций разных уровней образования. ИПК 2.1. Знает содержание основных нормативных документов, регламентирующих математическое образование на разных уровнях; структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-методического обеспечения современного процесса обучения математике. ИПК 2.2. Умеет проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.	ОР-4. структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-методического обеспечения современного процесса обучения математике.	ОР-5. проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.	

В результате освоения дисциплины «Линейные операторы и их приложения» обучающийся должен:

знать

- понятия линейного функционала и линейного оператора (в конечномерном векторном пространстве, в банаховом пространстве, в гильбертовом пространстве), ядра и образа оператора, всюду определенного оператора, непрерывного линейного оператора, ограниченного линейного оператора, нормы линейного оператора; плотно заданного линейного оператора, замкнутого линейного оператора; связь между свойствами непрерывности, ограниченности линейного оператора и возможностью его продолжения на все пространство;
- основные принципы теории линейных операторов в банаховых пространствах (теоремы об обратном операторе, о замкнутом графике, принцип Банаха-Штейнгауза);

– понятия резольвентного множества, резольвенты и спектра линейного оператора в банаховом пространстве, классификацию точек спектра в конечномерном и бесконечномерном случаях; понятия собственного и присоединенного вектора, инвариантного подпространства, корневого подпространства линейного оператора;

- теорему Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве; понятие сопряженного оператора к линейному оператору в гильбертовом пространстве; связь между матрицами оператора и сопряженного к нему в конечномерном случае;
- определения и основные свойства унитарных, эрмитовых, изометрических, самосопряженных, симметрических, положительных, нормальных операторов в гильбертовом (в частности, конечномерном евклидовом) пространстве;
- понятие компактного (вполне непрерывного) линейного оператора, спектральные свойства компактных операторов в банаховом пространстве;
- некоторые приложения спектральной теории линейных операторов в теории дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, математической и теоретической физике и др.;

уметь

- доказывать простейшие свойства операторов в конечномерных и бесконечномерных пространствах;
- исследовать конкретные операторы (в том числе дифференциальные, интегральные, операторы сдвига, умножения на независимую переменную) на ограниченность, на принадлежность к классам симметрических, изометрических и т.д. операторов, определять их спектральные свойства;
- приводить произвольный линейный оператор в конечномерном пространстве к жордановой нормальной форме, применять жорданову нормальную форму к вычислительным задачам, в частности, к задаче вычисления функций от матриц;
- записывать спектральные разложения (спектральную теорему) для конкретных самосопряженных/симметрических операторов в случае дискретного спектра;
- выбирать наиболее эффективный математический аппарат для решения задач различного уровня сложности, относящихся к линейным операторам;

владеть

- основами языка функционального анализа, в частности, теории операторов, базовым понятийным аппаратом линейной алгебры, абстрактной алгебры, спектральной теории операторов;
- навыками сопоставления свойств объектов (функционалов, операторов) в конечномерных и бесконечномерных пространствах, использования аналогий, пониманием их ограниченной применимости;
- навыками чтения математического текста, способами осмысления и критического анализа научной информации;

иметь представление о возможностях практического приложения теории линейных операторов, о роли и значении в математике специальных классов операторов.

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоятельная работа, час	
	Трудоемкость						
	Зач. ед.	Часы					
4	5	180	6	40	-	107	Экзамен
Итого:	5	180	6	40	-	107	27

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Изучение соответствующих разделов может быть продолжено на более глубоком уровне в рамках учебного плана аспирантуры по направлению 01.06.01 *Математика. Механика,* профилю 01.01.01 *Вещественный, комплексный и функциональный анализ*.

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
4 семестр				
Линейные операторы в различных базисах, спектр линейного оператора, жорданова нормальная форма линейного оператора	2	16	-	25
Основные классы линейных операторов в евклидовых и унитарных векторных пространствах	2	16	-	25
Теория линейных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах	2	8	-	57
Всего по дисциплине:	**6**	**40**	**-**	**107**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Тема 1. Линейные операторы в различных базисах, спектр линейного оператора, жорданова нормальная форма линейного оператора.

Линейные операторы и их матрицы. Базис векторного пространства. Матрица перехода от одного базиса к другому. Матрицы линейных операторов в различных базисах. Спектры линейных операторов. Линейные операторы с простым спектром. Инвариантные подпространства линейного оператора. Блочные матрицы. Понятие о клетке Жордана. Присоединённые векторы. Алгебраические и геометрические кратности собственных значений. Собственные и корневые подпространства.

Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств. Высота собственного значения. Нормальная жорданова форма линейного оператора. Теорема о приведении матрицы оператора к жордановой нормальной форме. Её единственность. Определение базиса, в котором матрица линейного оператора имеет жорданову нормальную форму.

Интерактивные формы: работа в микрогруппах (линейные операторы и их спектры), учебная дискуссия (матрицы операторов в различных базисах).

Тема 2. Основные классы линейных операторов в евклидовых и унитарных векторных пространствах.

Билинейные формы и скалярные произведения, Евклидовы и унитарные векторные пространства. Особенности скалярных произведений в унитарных пространствах. Матрица Грама. Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением. Сопряжённые и самосопряжённые линейные операторы. Нормальные операторы. Теорема о диагонализируемости самосопряжённого оператора. Симметрические и кососимметрические операторы и матрицы. Спектры симметрических и эрмитовых операторов. Существование собственного ортонормированного базиса. Ортогональные и унитарные операторы. Проекторы и ортопроекторы.

Интерактивные формы: работа в микрогруппах (сопряженные операторы), учебная дискуссия (унитарные операторы и проекторы, их свойства)

Тема 3. Теория линейных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах.

Непрерывные функционалы и операторы в банаховых пространствах. Ограниченные функционалы и операторы в банаховых пространствах, норма оператора. Равносильность непрерывности и ограниченности в случае линейного оператора. Основные принципы теории линейных операторов в банаховых пространствах (теорема об открытом отображении/ теорема об обратном операторе/ теорема о замкнутом графике; теорема Банаха-Штейнгауза). Понятие компактного (вполне непрерывного) оператора. Свойства компактных операторов. Компактность сопряженного оператора. Примеры. **Резольвентное множество, резольвента и спектр линейного оператора в банаховом пространстве.** Регулярные точки линейного оператора в банаховом пространстве; спектр линейного оператора; точечный (дискретный), непрерывный и остаточный спектр. Примеры. Резольвента линейного оператора. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

Интерактивные формы: работа в микрогруппах (вычисление спектров дифференциальных операторов). Мозговой штурм «Определения, свойства, признаки» (для различных классов операторов в бесконечномерных пространствах – конструирование по аналогии с конечномерным случаем). Работа в микрогруппах (исследование спектральных свойств отдельных операторов).

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Общий объем самостоятельной работы магистрантов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную (107 часов) самостоятельную работу в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется преимущественно в малых группах, с использованием технологий взаимообучения. Дидактические материалы для

организации работы разрабатываются самими магистрантами в ходе внеаудиторной самостоятельной работы (обмен заданиями между малыми группами).

Внеаудиторная самостоятельная работа нацелена на диагностику и совершенствование умений магистрантов осваивать теоретические и прикладные разделы математики. Эта деятельность включает также разработку консультационных материалов по отдельным темам, решение задач, в том числе исследовательского характера. Соответствующие источники указаны в разделе 6, выбор осуществляет преподаватель.

Перечень рассматриваемых ресурсов пополняют в ходе освоения дисциплины сами магистранты, т.е. комплект дидактических материалов окончательно формируется уже в ходе реализации программы (что соответствует системно-деятельностному подходу к организации образования).

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине «Линейные операторы и их приложения»

Структура контрольных работ по дисциплине

ОС-1. Самостоятельная работа.

Убедитесь в том, что оператор $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, 2x_3)$ является линейным, и составьте его матрицу. Укажите все различные корневые подпространства данного оператора. Приведите матрицу оператора к жордановой нормальной форме. Укажите соответствующий базис и матрицу перехода. Убедитесь в правильности построения ЖНФ путём непосредственной проверки с помощью матрицы перехода.

ОС-2. Самостоятельная работа

1. Приведите матрицу оператора к жордановой нормальной форме.
2. Укажите базис, в котором матрица приводима к жордановой форме и матрицу перехода.
3. Убедитесь в правильности построения ЖНФ путём непосредственной проверки с помощью матрицы перехода.

ОС-3. Контрольная работа.

1. Выяснить, является ли данный функционал линейным; непрерывным; ограниченным; ограниченным снизу; инъективным; сюръективным; открытым; замкнутым на указанном пространстве. Найти или оценить норму оператора, если он ограничен (
   $F(x) = \int_0^1 t^2 x(t)\,dt, \quad F\colon \mathrm{C}[0;1] \to \mathbf{R};$
2. Построить оператор, сопряженный к данному оператору. Сопоставить свойства оператора и его сопряженного (10 баллов).
   2.1. $\big(F(x)\big)(t) = x'(t),\ D(F) = AC[0;1],\ F\colon L_2(0;1) \to L_2(0;1);$
3. Найти спектр оператора, указать дискретный, непрерывный и остаточный спектр (15 баллов).
   3.1. $F(x) = x'',\ D(F) = \{x \in AC[0;1] |\ x'(0) = x(1) = 0\},\ F\colon L_2(0;1) \to L_2(0;1);$

ОС-4. Выступление с докладом по микрогруппам.

Примерный перечень тем докладов:

1. Спектральная теорема и ее приложения.
2. Решение матричных уравнений с помощью перехода к жордановой нормальной форме.
3. Кватернионы и их приложения в физике.
4. Основы теории представлений групп линейными операторами.
5. Характеры представлений конечных групп.
6. Полярное представление линейных операторов (в конечномерных и бесконечномерных пространствах).
7. Инвариантные множители и элементарные делители матриц линейных операторов.
8. Собственные и присоединенные элементы линейных операторов (в конечномерных и бесконечномерных пространствах).
9. Симметрические операторы и их свойства (сравнение конечномерного и бесконечномерного случаев).
10. Изометрические операторы и их свойства (сравнение конечномерного и бесконечномерного случаев).
11. Нормальные операторы и их свойства (сравнение конечномерного и бесконечномерного случаев).
12. Положительные операторы и их свойства (сравнение конечномерного и бесконечномерного случаев).
13. Теория расширений симметрических операторов без выхода из исходного гильбертова пространства.
14. Теория расширений симметрических операторов с выходом из исходного гильбертова пространства.
15. Элементы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.

ОС-5 Творческая разработка

Разрабатывается программы элективного курса или проектно-исследовательской работы для школьников по тематике применения линейных операторов в различных областях. Делается выступление, представляющее фрагмент мероприятия, программа сдается в письменной форме.

ОС-6. Составление тестов

Составляются контрольно-измерительные материалы по теме занятия в форме тестов и/или кейс-заданий.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

Глухова Н.В. Линейные операторы: учебно-методическое пособие для подготовки магистров и бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» физико-математического профиля – Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2017 – 35 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Цель проведения аттестации – диагностика сформированности запланированных образовательных результатов. Для проверки освоения программы дисциплины «Линейные операторы и их приложения» используются технологии формирующего оценивания (текущая аттестация) и суммативного оценивания (промежуточная аттестация в форме экзамена, завершающая изучение дисциплины). Оценочными средствами текущего оценивания являются: выступление с мини-докладом, участие в работе микрогруппы, в коллективном исследовании. Контроль формирования компетенций ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1, ОС-2, Самостоятельная работа ОС-3. Контрольная работа ОС-4 Выступление с докладом по результатам группового интерактивного задания 1 ОС-5. Творческая разработка Ос-6. Составление тестов	ОР-1. Знает приемы и методы выработки стратегии действий по разрешению проблемной ситуации. ОР-2 Знает о существовании различных вариантов решения проблемной ситуации на основе системного подхода, методах оценки преимуществ и рисков как результатов принятого решения. ОР-3 умеет грамотно, логично, аргументированно формулировать собственные суждения и оценки, вырабатывать стратегию действий. ОР-4. знает структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-методического обеспечения современного процесса обучения математике. ОР-5 умеет проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-7 Экзамен в форме устного собеседования	

Промежуточная аттестация (экзамен) проводится в форме участия в учебной конференции (публичная презентация самостоятельно разработанного дидактического материала по одному из вопросов математической экономики (выбор темы осуществляется магистрантами по согласованию с преподавателем).

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-7. Примерные вопросы к экзамену:

1. Векторные пространства и подпространства. Арифметическое n-мерное векторное пространство. Линейные комбинации и линейные оболочки.
2. Базис и размерность векторного пространства. Координаты векторов в базисе. Размерность векторного пространства. Связь между размерностью пространств и подпространств. Дополнение базиса подпространства до базиса пространства.
3. Суммы и пересечения векторных пространств. Прямая сумма подпространств.
4. Изоморфизмы векторных пространств.
5. Линейные и нелинейные операторы. Примеры. Матричная форма линейного оператора в конечномерном пространстве.
6. Собственные векторы и спектры линейных операторов.
7. Матрица перехода от одного базиса к другому. Матрицы линейных операторов в различных базисах.
8. Теорема о независимости характеристического многочлена от выбора базиса.
9. Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих попарно различным собственным значениям.
10. Линейные операторы с простым спектром.
11. Ядро и образ, ранг и дефект линейного оператора
12. Инвариантные подпространства линейного оператора.
13. Сужения линейных операторов на подпространства.
14. Алгебраические и геометрические кратности собственных значений. Теорема о связи между ними.
15. Критерий диагонализируемости матрицы линейного оператора.
16. Блочные (клеточные) матрицы и операции над ними.
17. Клетка Жордана.
18. Присоединённые (корневые) векторы. Высота присоединённого вектора.
19. Собственные и корневые подпространства.
20. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.
21. Нормальная жорданова форма линейного оператора. Алгоритм приведения матрицы оператора к Жордановой нормальной форме.
22. Функции от матриц и операторов.
23. Скалярные произведения в действительном случае. Нормы векторов, ортогональные и ортонормированные базисы. Ортогональное дополнение
24. Комплексные пространства со скалярным произведением (унитарные пространства).
25. Сопряжённые операторы и их свойства
26. Нормальные операторы и их простейшие свойства
27. Симметрические, кососимметрические и эрмитовы операторы и матрицы. Свойства.
28. Положительно определённые операторы.
29. Ортогональные и унитарные операторы.
30. Проекторы и ортопроекторы.
31. Нормированные пространства. Линейные многообразия и подпространства. Бесконечные линейно независимые системы векторов. Базис нормированного пространства. Размерность нормированного пространства.
32. Линейные операторы в нормированных пространствах. Непрерывные и равномерно непрерывные операторы. Достаточное условие (равномерной) непрерывности линейного оператора.
33. Ограниченные операторы в нормированных пространствах. Ограниченность числовой функции и ее ограниченность как оператора в пространстве действительных чисел. Понятие нормы оператора. Норма линейного оператора.
34. Сопряженные операторы, соотношение их свойств.
35. Ядро и образ линейного оператора в банаховом пространстве. Обратимые линейные операторы.

36. Теорема об открытом отображении. Теорема о непрерывности обратного оператора.
37. Теорема о замкнутом графике. Замкнутые операторы. Замыкание оператора.
38. Линейные операторы, определенные на всем банаховом пространстве: непрерывность и ограниченность. Продолжение ограниченного оператора на все банахово пространство.
39. Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равностепенной непрерывности семейства линейных операторов в банаховом пространстве).
40. Резольвентное множество и спектр линейного оператора в банаховом пространстве. Резольвента линейного оператора. Классификация точек спектра.
41. Компактные (вполне непрерывные) операторы в банаховых пространствах.
42. Примеры линейных интегральных операторов. Ограниченность интегральных операторов. Компактные интегральные операторы.
43. Примеры линейных дифференциальных операторов. Неограниченность дифференциальных операторов.
44. Гильбертовы пространства. Ортогональное дополнение, ортогональные базисы, разложение пространства в сумму ортогональных подпространств. Изоморфизм гильбертовых пространств одинаковой размерности.
45. Пространство, сопряженное к гильбертову пространству (теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала, изоморфизм гильбертова пространства и его сопряженного).
46. Оператор, сопряженный к линейному ограниченному оператору в гильбертовом пространстве. Оператор, сопряженный к неограниченному линейному оператору.
47. Симметрические и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах. Симметрические и самосопряженные расширения симметрических операторов.
48. Изометрические и унитарные операторы в гильбертовых пространствах. Изометрические и унитарные расширения изометрических операторов.

.

ФОРМИРОВАНИЕ БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ РАБОТЫ МАГИСТРАНТА

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
4 семестр	Разбалловка по видам работ	1 х 3=3 балла	20 х 1= 20 баллов	349 баллов	128 баллов
	Суммарный макс. балл	3 балла Max	23 баллов max	372 балла max	500 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Итоговое количество баллов	Итоговая отметка
0-250	неудовлетворительно
251-350	удовлетворительно
351-450	хорошо
451-500	отлично

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Дисциплина «*Линейные операторы и их приложения*» нацелена на формирование прочных знаний по ряду разделов математики, находящихся «на стыке» функционального анализа и других дисциплин, тесно связанных с приложениями, на осознание связей между далекими на первый взгляд задачами, в том числе некоторыми задачами элементарной и высшей математики. В рамках курса предполагается изучение разделов математики, тесно связанных, с одной стороны, с фундаментальными разделами функционального анализа, с другой стороны, с приложениями в теории оптимизации, теории игр, теории динамических систем, в том числе стохастических. Критерием для отбора материала служила, с одной стороны, необходимость знакомства магистрантов с широко применяемыми понятиями (обобщенной функции, случайного процесса и др.), без которых невозможно представить законченное математическое образование; с другой стороны, возможность продемонстрировать применения абстрактных теорий и «теоретизированный» характер современной «прикладной» математики. В рамках небольшого по объему курса собраны разделы, каждый из которых мог бы изучаться в отдельном семестровом или годичном курсе. Это делает невозможным одинаково глубокое изучение всех разделов; предполагается освоение базовых понятий и идей и более подробное знакомство с разделом, наиболее близким к тематике самостоятельных исследований каждого магистранта. Магистрант может выбрать необходимый для него уровень овладения учебным материалом дисциплины с углублением в один из разделов программы в зависимости от его научных интересов и тематики самостоятельной исследовательской работы.

При этом базовые понятия должны быть изложены вполне корректно, на соответствующем уровне строгости и на основе использования изученных разделов функционального анализа. С другой стороны, важно и рассмотрение конкретных примеров применения этих концепций к частным и достаточно наглядным объектам, часть из которых доступна пониманию школьников (дискретные случайные процессы, динамические системы с дискретным временем, конечномерные задачи оптимизации и их графические интерпретации и др.). Основное время, отведенное на аудиторные занятия, предлагается посвятить формированию у будущих магистров основ умений, связанных с математическими исследованиями (в частности, с «переводом» проблем с одного математического языка на другой), в естественной связи с актуализацией и расширением понятийного аппарата, необходимого для их проведения.

Общие вопросы теории, тесно связанные с методологией современной математики в целом, предлагается вынести в большой степени на самостоятельное изучение. Обсуждение этих вопросов на аудиторных (практических/ семинарских) занятиях не должно сводиться к докладам студентов на общие темы, предлагается тесно связывать абстрактные построения с решением конкретных задач. Среди этих задач должны быть, в частности, и доступные (по постановке проблемы) школьникам, достаточное внимание должно быть уделено их связям с общей логической линией курса.

На лекциях (разделы 2, 4) предполагается краткое изложение истории/логики развития теории обобщенных функций, теории случайных процессов в их взаимосвязи с функциональным анализом и с приложениями, в частности, физическими, выделение основных идей. При этом акцент должен быть сделан именно на методологических особенностях и важнейших методах получения результатов – как общих для всей современной математики, так и специфических. Самостоятельное изучение основного теоретического материала студентами предполагает работу с математической литературой – учебниками и учебными пособиями.

Успешное освоение курса требует активной деятельности на практических занятиях и во внеаудиторное время, систематического выполнения домашних заданий, самостоятельной работы с учебной математической литературой высокого уровня сложности. Необходимо обратить особое внимание на дальнейшее освоение и применение языка абстрактной алгебры и функционального анализа. Желательно проработать глоссарий дисциплины и убедиться в четком понимании смысла содержащихся в нем терминов.

На практических занятиях по каждому разделу программы предполагается активная работа студентов с теоретическим материалом, как известным им из предшествующих математических курсов магистратуры, так и новым. На практических занятиях также решаются задачи на исследование спектральных свойств операторов, в т.ч. порожденных динамическими системами, на действия над обобщенными функциями и их применение к решению дифференциальных уравнений, задачи выпуклого программирования, задачи на исследование марковских цепей и других случайных процессов. При этом акцент должен делаться на моделировании внематематических процессов, а также на исследовательских (учебных) задачах – проверке истинности утверждений, поиске примеров и контрпримеров, формулировке общих свойств объектов и т.п. Как преподавателю, так и студентам во время их сообщений рекомендуется применять проблемный стиль изложения материала, ставить вопросы перед аудиторией, в том числе для последующего обдумывания, предусматривать время для ответа на вопросы слушателей.

Еще одной сверхзадачей всего цикла занятий по дисциплине является демонстрация фрагментов методики, направленной на формирование культуры осмысленного учения и начальных исследовательских навыков в области математики.

Планы практических занятий

Занятие 1. Общие сведения о линейных операторах и их спектрах (повторение).

Линейные и нелинейные операторы. Примеры. Оператор поворота на плоскости. Операторы проектирования на плоскость и прямую. Матричная форма линейного оператора в конечномерном пространстве. Собственные векторы и спектры линейных операторов. Алгебраическая кратность собственного значения.

Задачи:

Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу, спектр и множество собственных векторов.

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 2x_3, 8x_1 + x_2 - 4x_3, 12x_1 – 5x_3)$;

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$;

в) $A(x_1, x_2, x_3) = (5x_2 - 4x_3, 3x_1 – 2x_2 - x_3, 0)$;

г) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 4x_3, x_1^2)$

Занятие 2. Геометрические приложения линейных операторов

Повторить понятия: векторное пространство и подпространство, линейная зависимость векторов, базис векторного пространства, координаты вектора в данном базисе,

размерность векторного пространства. Изучить понятие: матричные (операторные) многочлены.

Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу, спектр и множество собственных векторов

д) Оператор поворота на угол α вокруг начала координат, заданный на плоскости

е) Оператор проектирования на плоскость xOy, заданный в трехмерном пространстве;

ж) Оператор проектирования на прямую $y = 2x$, заданный на плоскости;

з) Оператор гомотетии с коэффициентом α в трехмерном пространстве;

и) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$ (д/з)

к) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2, 1)$ (д/з).

Самостоятельная работа:

Занятия 3-4. Собственные и инвариантные подпространства.

Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих попарно различным собственным значениям. Собственные подпространства, инвариантные подпространства. Геометрическая кратность собственного значения. Ядро и образ, ранг и дефект линейного оператора. Сужения (ограничения) линейных операторов на инвариантные подпространства.

1. Доказать, что собственное подпространство инвариантно.

2. Доказать, что ядро и образ линейного оператора являются подпространствами. Доказать, что эти подпространства инвариантны относительно данного оператора.

3. Доказать, что оператор обратим тогда и только тогда, когда его ядро состоит из 0 вектора.

4. Доказать, что сумма ранга и дефекта равна размерности пространства.

5. Найдите собственные подпространства, ядро, образ, ранг и дефект линейных операторов из предыдущего занятия. Укажите для них какие-либо нетривиальные инвариантные подпространства и постройте матрицы сужений на соответствующие подпространства.

6. Доказать, что операторы A и $A - \lambda E$ имеют одинаковые инвариантные подпространства.

7. Доказать, что если L – инвариантное подпространство относительно оператора A, то оно инвариантно и относительно оператора f(A), где f(x) – произвольный многочлен.

8. Доказать, что если A и B перестановочны, то Ядро B и образ B инвариантны относительно A.

Самостоятельная работа: Повторить связь между координатами вектора в различных базисах. Доказать, что оператор перехода от одного базиса к другому является линейным. Уметь находить матрицы перехода от одного базиса к другому. Повторить правила вычисления обратной матрицы.

Занятие 5. Матрицы операторов в различных базисах.

Матрицы линейных операторов в различных базисах. Формула перехода. Теорема о независимости характеристического многочлена от выбора базиса. Линейные операторы приводимые к диагональному виду.

Задачи:

1. Доказать следующие утверждения:

а) Любой невырожденный оператор базисные векторы снова переводит в базисные.

б) Матрица перехода от одного базиса к другому всегда невырождена

2. Вывести формулу связи между матрицами линейных операторов в различных базисах. Доказать, что характеристический многочлен линейного оператора (а, следовательно и спектр) не зависят от выбора базиса.

3. Найдите матрицу оператора, переводящего векторы a_1, a_2 в векторы b_1, b_2

а) a_1 (1, 1), a_2 (0, 1), b_1 (1, 2), b_2 (2, 1);

б) a_1 (1, 2), a_2 (1, 1), b_1 (α, β), b_2 (γ, δ).

Найдите сумму и произведение полученных операторов.

4. Оператор А в стандартном базисе задаётся формулой

$A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$.

Найдите его матрицу в базисе $a_1(1, 1, 1)$, $a_2(1, 1, 0)$, $a_1(1, 0, 0)$.

5. Линейный оператор А имеет матрицу $\begin{pmatrix} 18 & 67 \\ -7 & -26 \end{pmatrix}$ в базисе a_1 (1, 2), a_2 (3, 7). Оператор В имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ в базисе b_1 (1, 1), b_2 (0, 1). Найдите матрицу АВ в базисе а) a_1, a_2 б) b_1, b_2.

Занятие 6. Приведение матрицы операторов к диагональному виду

1. Выясните, какие из линейных операторов занятия 1 можно привести к диагональному виду над полем комплексных чисел, над полем действительных чисел. Укажите соответствующие базисы.

Повторить понятия: линейная оболочка, дополнение подпространства до базиса всего пространства, сумма и пересечение подпространств, прямая сумма подпространств. Свойства прямых сумм. Изучить определения коммутирующих операторов, аннулирующих и минимальных многочленов. Изучить клеточные (блочные) матрицы и операции над ними. Повторить теорему Безу.

Доказать, что сумма и пересечение инвариантных подпространств относительно оператора А снова будут инвариантными относительно А подпространствами.

Занятия 7-8. Приведение матриц линейных операторов к Жордановой нормальной форме.

Алгоритм приведения матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме. Алгоритм построения соответствующего базиса. Решение задач.

Задачи:

1. Привести матрицу линейного оператора к Жордановой нормальной форме. Указать соответствующий базис.

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$,

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, 2x_3)$,

в) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}$,

е) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, ж) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, з) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

и) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, к) $\begin{bmatrix} -3I & -4I & 1-6I & 2-8I \\ 2I & 3I & -2+4I & -3+6I \\ 0 & 0 & 1+3I & 4I \\ 0 & 0 & -2I & 1-3I \end{bmatrix}$.

2. Пусть линейный оператор над полем комплексных чисел имеет единственное собственное значение. Доказать, что размерность корневого подпространства, отвечающего собственному значению равна алгебраической кратности данного собственного значения.

Самостоятельная работа. Повторить понятия скалярное произведение (аксиоматическое определение), евклидово пространство, норма вектора, угол между векторами, ортогональность векторов, ортогональный и ортонормированный базис, стандартное скалярное произведение. Комплексно-сопряжённые числа.

Занятие 9. Евклидовы и унитарные векторные пространства. Сопряжённые операторы.

Особенности задания скалярных произведений в векторных пространствах, заданных над полем комплексных чисел (унитарных пространствах), свойства. Стандартные и нестандартные скалярные произведения.

Задачи:

1. Доказать, что в унитарном пространстве:

а) $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\,(x, y)$;

б) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

в) $(0, x) = (x, 0) = 0$.

2. Пусть в ортонормированном базисе вектор x имеет координаты $(x_1, x_2, \dots x_n)$, а y - $(y_1, y_2, \dots y_n)$ Доказать, что скалярное произведение унитарного пространства можно вычислить по формуле: $(x, y) = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \dots + x_n \overline{y}_n$. Доказать, что данная формула справедлива только в ортонормированном базисе.

3. Найти в ортонормированном базисе унитарного пространства скалярное произведение векторов x и y, нормы векторов x и y. Определить, есть ли среди них ортогональные векторы.

а) x(1, 2, 3), y (1+ 2i, 2 – i, i – 3);

б) x(1 - i, i, 0), y (1+ i, -1 – 3i, -2i + 3);

в) x(5 + i, i - 4, 3i – 1, i - 2), y (1, i, -3i, -i);

г) x(1 - i, 2), y (1 - i , – 1).

4. Пусть вектор $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Выяснить, можно ли скалярное произведение задать следующим способом:

а) $(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$

б) $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$

в) $(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$

г) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$

д) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

е) $(x, y) = |x_1y_1| + |x_2y_2|$.

Занятие 10. Билинейные формы

Билинейно-метрические пространства. Матрица Грама.

1.Какие из представленных в задании 4 предыдущего занятия выражения не являются билинейными формами? Составить матрицы Грамма для всех билинейных форм.

2. По заданным матрицам выпишите соответствующие билинейные формы, определите, какие из них задают скалярные произведения

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ е) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Занятие 11. Квадратичные формы.

1. Найти матрицу квадратичной формы и привести её к каноническому виду. Определить вид квадратичной формы и указать индексы инерции

а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$

б) $x_1x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_1$

в) $x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$ (д/з)

г) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$ (д/з)

д) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2$

е) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

ж) $2x_2^2 + 4x_2x_3$ (д/з)

з) $x_1^2 + x_1x_2 + 4x_3^2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$.

2. По заданным матрицам найдите квадратичные формы, приведите их к каноническому виду и определите их индексы инерции:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ е) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Занятие 12. Сопряжённый оператор (линейность, матрица, спектр, свойства).

1. Докажите свойства сопряжённых операторов:

а) Сопряжённый оператор существует для любого линейного оператора, определяется единственным образом и также является линейным.

б) $(A^*)^* = A$

в) $(A + B)^* = A^* + B^*$

г) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$

д) $(AB)^* = B^*A^*$

е) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ (для невырожденного оператора A)

2. Пусть известен спектр оператора A, что будет в этом случае представлять собой спектр A*?

3. Найти матрицы операторов, сопряжённых к линейным операторам из занятия 1.

Самостоятельная работа. Повторить понятия: группа, подгруппа, кольцо, поле. Критерий подгруппы, подкольца, подполя. Выяснить, является ли множество всех линейных операторов группой относительно сложения, группой относительно умножения, кольцом, полем.

Практическое занятие 13-14. Нормальные операторы. Симметрические и кососимметрические, эрмитовы и косоэрмитовы линейные операторы.

Нормальные операторы и их свойства. Диагонализируемость нормальных операторов в ортонормированном базисе. Примеры нормальных операторов: симметрические, кососимметрические, эрмитовы, косоэрмитовы операторы, их свойства. Положительно определённые операторы. Особенности их спектра и матричной формы. Доказательство того, что симметрические (эрмитовы) операторы образуют группу по сложению. Понятия о классической линейной алгебре и алгебре Ли.

Задачи.

1.Доказать, что если A – нормальный оператор, то и A - λE – нормальный.

2. Доказать, что собственный вектор нормального оператора A является также и собственным вектором A*. Доказать, что собственные значения общего собственного вектора для A и A* (A – нормальный оператор) комплексно сопряжены.

3. Доказать, что ортогональное дополнение инвариантного подпространства нормального оператора A является инвариантным подпространством A*. Доказать, что ортогональное дополнение собственного подпространства оператора A является инвариантным относительно A.

4. Доказать, что для того, чтобы оператор в унитарном пространстве был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы он имел базисную систему ортонормированных собственных векторов.

5. Проверить, что указанные матрицы являются нормальными и указать для них ортонормированные базисы из собственных векторов:

а) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Показать, что множество симметрических (эрмитовых) операторов образуют группу по сложению.

7. Описать матрицы симметрических и кососимметрических операторов в ортонормированном базисе.

8. Доказать, что любой линейный оператор над полем действительных чисел представим в виде суммы симметрического и кососимметрического оператора.

9. Пусть эрмитова матрица представлена в виде H = S + iK, где S и K – действительные матрицы. Доказать, что S – симметрическая, а K – кососимметрическая.

10. Доказать, что множество кососимметрических операторов образует алгебру Ли.

11. Доказать, что все собственные значения симметрического оператора - вещественные числа.

12. Доказать, что спектр положительно определённого оператора состоит из положительных чисел.

Самостоятельная работа. Повторить обратные и обратимые операторы. Изоморфизмы групп, колец, полей, векторных пространств. Выяснить образует ли множество обратимых операторов группу относительно умножения. Определить, что представляет собой ядро произвольного обратимого оператора. Дополнение базиса подпространства до базиса всего пространства. Ортогональное дополнение. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая.

Занятие 15. Унитарные операторы.

Ортогональные и унитарные операторы. Различные определения и их эквивалентность. Линейность. Спектр. Группа унитарных операторов. Связь с вращениями. Параллельное и ортогональное проектирование. Свойство идемпотентности проекторов. Доказательство того, что ортогональные проекторы являются симметрическими операторами. Примеры геометрических приложений.

Задачи.

Определим унитарный оператор, как линейный оператор, удовлетворяющий условию UU* = U*U = E

1. Доказать, что оператор поворота, заданный в плоскости, унитарен.

2. Доказать, что оператор является унитарным тогда и только тогда, когда он сохраняет скалярное произведение, т.е. (Ux, Uy) = (x, y) для любых векторов x и y.

3. Доказать, что множество унитарных операторов образует группу относительно операции умножение.

4. Доказать, что нормальный оператор является унитарным тогда и только тогда, когда все его собственные значения по модулю равны 1.

5. Доказать, что любой унитарный оператор переводит любую ортонормированную систему в ортонормированную.

6. Доказать, что если линейный оператор переводит какой-нибудь ортонормированный базис снова в ортонормированный базис, то этот оператор является унитарным.

7. Доказать, что унитарный оператор является изоморфизмом.

Занятие 16. Операторы проектирования.

1. Доказать, что оператор проектирования на подпространство U параллельно подпространству V (U + V – прямая сумма) является идемпотентным ($P^2 = P$). Доказать, что любой идемпотентный оператор P есть оператор проектирования на образ P параллельно ядру P.

2. Доказать, что оператор ортогонального проектирования является самосопряжённым.

3. Описать все унитарные операторы, действующие в одномерном пространстве. Доказать, что определитель матрицы унитарного оператора по модулю равен 1.

Занятие 17. Выступление с докладом (ОС-4).

Занятие 18. Деловая игра (ОС-18)

Занятие 19. Линейные функционалы

Выяснить, является ли данный функционал или оператор линейным; непрерывным; ограниченным; ограниченным снизу; инъективным; сюръективным; открытым; замкнутым на указанном пространстве. Найти или оценить норму оператора, если он ограничен

1. $F(x) = \int_0^1 t^2 x(t)\,dt, \quad F: C[0;1] \to \mathbf{R};$

2. $\big(F(x)\big)(t) = t^2 x'(t), \ D(F) = AC[0;1], \ F: L(0;1) \to L(0;1);$

3. $F(x) = (x_1 - x_2;\ x_2 - x_3;\ x_3 - x_4; \ldots), \ F: l_2 \to l_2.$

Занятие 20. Контрольная работа (ОС-3).

Убедитесь в том, что оператор $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, 2x_3)$ является линейным (6 баллов), и составьте его матрицу (4 балла). Укажите все различные корневые подпространства данного оператора (12 баллов). Приведите матрицу оператора к жордановой нормальной форме (6 баллов). Укажите базис, в котором матрица приводима к жордановой форме и матрицу перехода (6 баллов). Убедитесь в правильности построения ЖНФ путём непосредственной проверки с помощью матрицы перехода

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Рубашкина, Е. В. Линейная алгебра. Линейные операторы. Квадратичные формы. Комплексные числа: Учебное пособие / Рубашкина Е.В. - Москва : НИЦ ИНФРА-

М, 2016. - 38 с. (Высшее образование) ISBN 978-5-16-011858-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/544419

2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 7-е изд. – Москва : Физматлит, 2012. – 573 с. – (Классический университетский учебник). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563

3. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц : учебное пособие : [16+] / Ф. Р. Гантмахер. – 5-е изд. – Москва : Физматлит, 2010. – 560 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83224

Дополнительная литература

1. Балдин, К. В. Высшая математика : учебник : [16+] / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев ; под общ. ред. К. В. Балдина. – 3-е изд., стер. – Москва : ФЛИНТА, 2021. – 360 с. : табл., граф., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=79497

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру (в 3 томах). – М.: МЦНМО. – 2009. (Электронный ресурс. – «Университетская библиотека онлайн» том 2. Линейная алгебра – 368 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=63144

3. Ревина, С. В. Функциональный анализ в примерах и задачах: учеб. пособие / Ревина С.В., Сазонов Л.И. - Ростов-на-Дону:Издательство ЮФУ, 2009. - 120 с. ISBN 978-5-9275-0683-5. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/556115.

Интернет-ресурсы

1. Мир математических уравнений. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm
2. Softline. http://exponenta.ru/
3. Популярные лекции по математике. http://ilib.mccme.ru/plm
4. Школьникам, студентам, аспирантам. http://ph4s.ru/
5. Прикладная математика. http://primat.org
6. Учебно-методическая литература для студентов. http://studfiles.ru/
7. Сайт издательства «Венец» УЛГТУ. http://venec.ulstu.ru/lib/
8. МГТУ ГА. http://vm.mstuca.ru/posobia/posobia.htm

Единое окно доступа к образовательным ресурсам. http://window.edu.ru/