Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической
работе
_____ С.Н. Титов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

Программа учебной дисциплины модуля
«Специальные разделы предметной области»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Гришина С.А., к.ф-м.н.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дополнительные вопросы алгебры и геометрия» относится к дисциплинам по выбору части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) модуля Специальные вопросы предметной области учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Алгебра и теория чисел», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Аналитическая геометрия в пространстве», «Основания геометрии и методы изображений» «Теоретический и прикладной математический анализ», «Прикладные вопросы линейной алгебры в экономике».

Результаты изучения дисциплины являются основой для прохождения государственной итоговой аттестации и написания выпускных квалификационных работ.

Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины «Дополнительные вопросы алгебры и геометрии» является обобщении и углублении знаний по общему курсу алгебры, геометрии, формировании представления об их приложениях, о возможностях продолжения образования в области алгебры, о современных проблемах алгебры и геометрии, а также в формировании абстрактно-логического мышления и умения оперировать такими общематематическими понятиями. Существенной частью курса является обучение студентов самостоятельному изучению вопросов, оказывается помощь в работе с литературой, формируются навыки выступления с докладами. В процессе изучения дисциплины будущие учителя знакомятся с различными методами проведения строгих логических доказательств, готовятся к грамотному и логичному изложению материала на уроках математики, а также обучаются решению некоторых задач повышенной сложности школьного курса, олимпиадных задач.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Дополнительные вопросы алгебры и геометрии» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	Умеет	владеет
ПК-11 Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования ПК-11.1. Знает основные научные понятия и	ОР-1		

особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач.	Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области.		
ПК-14. Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями ИПК-14.1. Знает роль и возможности применения аппарата предметной области в смежных научных областях, их методологическое и мировоззренческое значение; имеет представление о междисциплинарных связях, научных	ОР-3. возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях	ОР-4. решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине	

методах смежных областей ИПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач.			

1. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
9	2	72	12	20	-	40	зачёт
10	2	72	12	20	-	40	зачёт
Итого:	4	144	24	40	-	80	

2. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование разделов и тем (с разбивкой на модули)	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
	9 семестр				
1.	Дополнительные главы теории матриц и линейных операторов	12		20	40
	Итого	**12**		**20**	**40**

	10 семестр				
1.	Дополнительные вопросы теории делимости, теории многочленов, теории квадратичных форм	8		10	20
2.	Геометрическое моделирование	4		10	20
	Итого	**12**		**20**	**40**
	Всего	**24**		**4**	**200**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса

№ п/п	Наименование темы/раздела	Содержание
1.	Дополнительные главы теории матриц и линейных операторов	Различные способы введения операций сложения и умножения на скаляры. Линейная зависимость. Ранги. Линейные подпространства. Различные способы задания пространств и подпространств. Размерность и базис. Изоморфизм векторных пространств одинаковой конечной размерности. Различные способы задания подпространств. Операции над подпространствами. Прямые суммы подпространств. Дополнительные подпространства. Размерности и коразмерности. Клеточные матрицы и особенности операций над ними. Распавшиеся и полураспавшиеся матрицы. Методы «экономного» умножения матриц. Теорема об определителе распавшейся матрицы. Элементарные делители распавшейся матрицы. След и определитель линейного оператора, их инвариантность относительно базиса. Понятие минора k-того порядка данной матрицы. Ортогональные дополнения. Ваимосвязь уравнений прямых и плоскостей ортогональных друг другу. Построение прямых ортогональных плоскости и плоскостей, ортогональным заданным прямым. Ортогональные проекции и ортогональные составляющие векторов. Вычисление проекции векторов на прямую на плоскости и в пространстве. Вычисление проекции вектора на плоскость, проходящую через начало координат. Проектирование в произвольных n-мерных простанствах. Нормальные линейные операторы и их виды (ортогональные, унитарные, эрмитовы, косоэрмитовы операторы, операторы проектирования). Линейные операторы в геометрии
2.	Дополнительные вопросы теории делимости, теории многочленов, теории квадратичных форм	Числа Фибоначчи. Совершенные числа. Простые числа Мерсенна и Ферма. Формула Мёбиуса.Представление рациональных чисел цепными дробями. Подходящие дроби. Их свойства. Некоторые приложения комплексных чисел. Комплексные числа и кривые второго порядка. Теорема Дирихле. Приводимость и неприводимость многочленов над различными полями. Критерии неприводимости над полем рациональных чисел. Критерий Кона, критерий Полиа, признак Дюма, диаграмма Ньютона, способ Кронекера. Конечные поля. Приводимость многочленов над конечными полями. Построение неприводимых многочленов. Взаимосвязь между приводимостью многочленов над конечными полями и над полем рациональных чисел. Редукционный критерий.

		Критерий Батлера и алгоритм Берлекэмпа. Многочлены от нескольких переменных. Редукционный критерий. Евклидовы пространства. Билинейные формы и их связь с линейными операторами. Виды билинейных форм. Квадратичные и эрмитовы формы. Приведение симметрических билинейных форм к каноническому виду. Сигнатуры. Положительно определённые формы. Критерий Сильвестра. Применения квадратичных форм в геометрии. Полилинейные формы. Унитарные векторные пространства. Унитарные и ортогональные операторы.
3.	Геометрическое моделирование	Описание геометрических объектов. Математическая модель геометрии объектов. Математическая модель кривых линий: аналитические линии; кривые второго порядка; сплайны; кривые Безье; рациональные кривые; β-сплайны; NURBS кривые; линии, базирующиеся на линиях; составные кривые; двухмерные кривые. Способы построения линий. Математическая модель поверхностей: аналитические поверхности; поверхности второго порядка; поверхности движения; линейчатые поверхности; поверхности Кунса; сплайновые поверхности; поверхности Безье; рациональные поверхности; NURBS поверхности; поверхности треугольной формы; поверхности, базирующиеся на поверхностях. Способы построения поверхностей. Аппроксимация кривых и поверхностей. Аппроксимация Бернштейна-Безье. Простейшие тела. Моделирование тел. Математическая модель тела: тела, полученные движением плоского контура; построение тела по плоским сечениям; тело в форме листа. Построение симметричного тела. Построение эквидистантной оболочки тела. Построение тонкостенного тела. Скругление ребер тела. Построение фасок ребер тела. Последовательность моделирования тел. Интерактивные формы занятий: работа в микрогруппах

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.
Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения самостоятельных и контрольных работ по дисциплине.
Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:
- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

ОС-1. Контрольная работа (9 семестр)

1. Найти матрицу квадратичной формы $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2$. Определить её вид, индекс инерции и сигнатуру. Привести квадратичную форму к каноническому виду.
2. Пусть вектор $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Выяснить, можно ли скалярное произведение задать по формуле: $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$. Найти матрицу данной билинейной формы и привести её к каноническому виду. Указать соответствующий базис.
3. Построить ортонормированные базисы пространств, натянутых на векторы:
a_1 (1, 2, 2, -1); a_2 (1, 1, -5, 3); a_3 (3, 2, 8, -7). Найти ортогональное дополнение данного пространства до базиса пространства R_4
4. Найти минимальный многочлен для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ОС-1. Контрольная работа (10 семестр)

1. Получить в однородных координатах уравнение прямой, проходящей через точки r_0 и r_2.
2. Построить сплайн Эрмита, проходящий через заданную последовательность точек p_i и имеющий в этих точках заданные производные q_i.
3. Построить поверхность, полученную вращением кривой $c(t)$, $t_{min} \le t \le t_{max}$, на угол α вокруг оси, заданной единичным вектором i и точкой p.
4. Получить уравнение сегмента окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, лежащего в первом квадранте.
5. Вычислить радис-вектор NURBS кривой.
6. Описать поверхность Эрмита.

ОС-2.Вопросы для самостоятельного изучения обучающимися (темы мини-выступлений и рефератов)

1. Симметрические многочлены и их приложения.
2. Билинейные и квадратичные формы.
3. Функции от матриц.
4. Матричные уравнения.
5. Прикладные вопросы теории симметрических многочленов.
6. Результант и дискриминант.
7. Алгебра линейных операторов и полная матричная алгебра.
8. Элементарные преобразования многочленных матриц.
9. Характеристический многочлен матрицы.
10. Структура линейного оператора в n-мерном пространстве.
11. Некоторые многочлены матрицы.
12. Нормальные формы матриц.
13. Методы вычисления определителей n-го порядка.

14. Линейные операторы в унитарном пространстве.
15. Эквивалентные преобразования многочленных матриц.
16. Разложимые и неразложимые неотрицательные матрицы.
17. Теория матриц и линейные дифференциальные уравнения.
18. Пучки матриц.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Глухова Н.В., Гришина С.А., Еремеева А.Н., Куренева Т.Н., Рацеев С.М., Череватенко О.И. Алгебра. Часть 1.Основы высшей алгебры. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 33 с.
2. Карпова С.А. Алгебра и теория чисел. Часть 1. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ, 1998. – 24 с.
3. Ильязова Д.З. Алгебра и теория чисел. Часть 2. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ.
4. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Алгебра. Часть 3. Основы алгебраических структур. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 25 с.
5. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Алгебра. Часть 4. Алгебра многочленов Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 42 с.
6. Богомолова И.В., Ильязова Д.З. Алгебра и теория чисел. Часть 4. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ, 1999. – 24 с.
7. Глухов В.П., Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть I. – Ульяновск: УлГПУ, 1996. – 58 с.
8. Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть 2. – Ульяновск: УлГПУ, 1999. – 36 с.

3. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,**	Образовательные

п/п	используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Контрольная работа ОС-2. Выступление с рефератами	ОР-1. Знает основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области. ОР-3. Знает возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях ОР-4. Умеет решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-3 Зачет в форме устного собеседования по вопросам	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Избранные вопросы алгебры и геометрии».

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-3. Зачет (9 семестр)

1. Клеточные матрицы и особенности операций над ними.
2. Распавшиеся и полураспавшиеся матрицы.
3. Методы «экономного» умножения матриц.
4. Теорема об определителе распавшейся матрицы.
5. Элементарные делители распавшейся матрицы.
6. След матрицы.
7. Инвариантность следа и определителя относительно выбора базиса.
8. Инвариантность характеристического многочлена и спектра относительно выбора базиса.
9. Миноры k-того порядка данной матрицы.
10. Эквивалентные и подобные матрицы.
11. Наибольшие общие делители миноров. Элементарные делители распавшейся матрицы.

12. Вывод формулы, выражающей определитель квадратной матрицы, представляющей собой произведение двух прямоугольных матриц, через миноры матриц – множителей (формулы Бине – Коши).
13. Ранг произведения двух прямоугольных матриц.
14. Жорданова клетка
15. Инвариантные подпространства линейного оператора.
16. Алгебраические и геометрические кратности собственных значений.
17. Собственные и корневые подпространства. Высота собственного значения.
18. Теорема о разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств.
19. Жорданова нормальная форма матрицы.
20. Теорема о приведении матрицы оператора к Жордановой нормальной форме.
21. Единственность жордановой нормальной формы.
22. Присоединённые векторы. Определение базиса, в котором матрица оператора имеет жорданову нормальную форму.
23. Понятие ассоциированной матрицы, некоторые свойства, примеры.
24. Вывод формулы, выражающей миноры обратной матрицы через миноры данной матрицы.
25. Понятие скелетного разложения произвольной прямоугольной матрицы.
26. Присоединённые (корневые) векторы. Высота присоединённого вектора.
27. Собственные и корневые подпространства.
28. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.
29. Нормальная жорданова форма линейного оператора. Алгоритм приведения матрицы оператора к Жордановой нормальной форме.
30. Функции от матриц и операторов.
31. Скалярные произведения в действительном случае. Нормы векторов, ортогональные и ортонормированные базисы. Ортогональное дополнение
32. Комплексные пространства со скалярным произведением (унитарные пространства).
33. Сопряжённые операторы и их свойства
34. Нормальные операторы и их простейшие свойства
35. Симметрические, кососимметрические и эрмитовы операторы и матрицы. Свойства.
36. Положительно определённые операторы.
37. Ортогональные и унитарные операторы.
38. Проекторы и ортопроекторы.

ОС-3. Зачет (10 семестр)

1. Числа Фибоначчи. Совершенные числа.
2. Простые числа Мерсенна и Ферма. Формула Мёбиуса.
3. Представление рациональных чисел цепными дробями. Подходящие дроби. Их свойства. Некоторые приложения комплексных чисел. Комплексные числа и кривые второго порядка.
4. Теорема Дирихле.
5. Приводимость и неприводимость многочленов над различными полями.
6. Критерии неприводимости над полем рациональных чисел.
7. Конечные поля. Приводимость многочленов над конечными полями. Взаимосвязь между приводимостью многочленов над конечными полями и над полем рациональных чисел.
8. Квадратичные и билинейные формы. Матрицы Грама
9. Виды квадратичных форм
10. Сигнатуры

11. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
12. Математическая модель аналитических линий.
13. Математическая модель кривых второго порядка.
14. Математическая модель сплайнов.
15. Построение кривых Безье
16. β-сплайны
17. NURBS кривые
18. Линии, базирующиеся на линиях
19. Математическая модель составных кривых
20. Двухмерные кривые.
21. Способы построения линий.
22. Математическая модель аналитических поверхностей.
23. Построение поверхности второго порядка.
24. Построение поверхности движения.
25. Линейчатые поверхности.
26. Построение поверхности Кунса
27. Сплайновые поверхности
28. Построение поверхности Безье
29. NURBS поверхности
30. Поверхности треугольной формы
31. Способы построения поверхностей.
32. Аппроксимация кривых и поверхностей.
33. Простейшие тела. Моделирование тел.
34. Математическая модель тела, полученного движением плоского контура
35. Построение тела по плоским сечениям
36. Построение симметричного тела.
37. Последовательность моделирования тел.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачёт
9,10 семестры	Разбалловка по видам работ	6 х 1=6 баллов	10 х 1=10 Баллов	152 балла	32 балла
	Суммарный макс. Балл	6 баллов Max	16 баллов max	168 балла max	200 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося

	Баллы (2 ЗЕ)
«зачтено»	более 100
«не зачтено»	100 и менее

4. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий 9 семестр.

Занятие 1. Линейные подпространства

1. Различные способы введения операций сложения и умножения на скаляры.
2. Линейная зависимость. Ранги
3. Различные способы задания пространств и подпространств.
4. Размерность и базис.
5. Дополнение базиса подпространства до базиса пространства. Геометрические приложения

Решить задачи:

1) Найти систему уравнений, задающих подпространство, являющееся линейной оболочкой векторов a_1 (2,3,0,0), a_2 (1,-1,0,-1), a_3 (2,0,0,-2).

2) Доказать, что множество векторов вида $\{(\alpha,\ 2\alpha+\beta,\ 3\alpha+3\beta\},\ \alpha,\beta\in R\}$ является подпространством пространства V_3. Найти базис подпространства и дополнить этот базис до базиса всего пространства.

Занятие 2. Операции над подпространствами.

1. Суммы подпространств
2. Пересечения подпространств
3. Прямые суммы подпространств.
4. Размерности и коразмерности.

Решить задачи:

Найти размерность и какой либо базис суммы и пересечения подпространств A и B, являющихся линейными оболочками векторов a_1, a_2 . . . a_n и векторов b_1, b_2 . . . b_m соответственно.

а) a_1 (1,1,0,0), a_2 (1,-1,1,-1), a_3 (1,0,0,-1); b_1 (3,-3, -1,1) b_2 (5,-3,1,1) b_3 (3,-1,1,1).

б) a_1 (3,2,3,1), a_2 (2,2,2,1), a_3 (-4,-3,-4,-1); b_1 (1,-1, 1,-1) b_2 (2,-3,1,1) b_3 (0,2,0,2).

Занятие 3. Жорданова форма матрицы

1. Жорданова клетка и жорданова нормальная форма матрицы.

2.Понятие ассоциированной матрицы, некоторые свойства, примеры.
3.Вывод формулы, выражающей миноры обратной матрицы через миноры данной матрицы.
Задания для самостоятельного решения
Привести матрицу линейного оператора к Жордановой нормальной форме

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}$

Занятие 4. Приведение матриц к жордановой нормальной форме
1.Корневые и присоединенные векторы.
2. Нахождение жордановых нормальных форм
Задания для самостоятельного решения
1. Доказать, что сумма и пересечение инвариантных подпространств относительно оператора А снова будут инвариантными относительно А подпространствами.
2. Привести матрицу линейного оператора к Жордановой нормальной форме. Указать соответствующий базис.
а) $A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$,
б) $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, 2x_3)$,

Занятие 5. Ортогональные дополнения
1.Ортогональность векторов
2.Ортогональное дополнение
3.Ваимосвязь уравнений прямых и плоскостей ортогональных друг другу. Построение прямых ортогональных плоскости и плоскостей, ортогональным заданным прямым.
Решение задач:
1. Построить ортонормированные базисы пространств, натянутых на данные системы векторов:
а) a_1 (1, 2, 2, -1); a_2 (1, 1, -5, 3); a_3 (3, 2, 8, -7);
б) a_1 (1, 1, -1, -2); a_2 (5, 8, -2, -3); a_3 (3, 9, 3, 8);
в) a_1 (2, 1, 3, -1); a_2 (7, 4, 3, -3); a_3 (1, 1, -6, 0); a_4 (5, 7, 7, 8);
2. Найти ортогональное дополнение подпространства, натянутого на данный базис, до базиса пространства R_4
а) a_1 (1, -2, 2, -3); a_2 (2, -3, 2, 4);
б) a_1 (1, 1, 1, -2); a_2 (1, 2, 3, -3).

Занятие 6. Ортогональные проекции и ортогональные составляющие векторов
1. Вычисление проекции векторов на прямую на плоскости и в пространстве
2. Вычисление проекции вектора на плоскость, проходящую через начало координат
3. Проектирование в произвольных n-мерных пространствах
Решить задачи
Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на подпространство, являющееся линейной оболочкой векторов a_1, a_2, a_3
а) x (4, -1, -3, 4); a_1 (1, 1, 1, 1); a_2 (1, 2, 2, -1); a_3 (1, 0, 0, 3);
б) x (5, 2, -2, 2); a_1 (2, 1, 1, -1); a_2 (1, 1, 3, 0); a_3 (1, 2, 8, 1).

Занятие 8. Нормальные операторы
1.Доказательство того, что если А – нормальный оператор, то и $(A - \lambda E)$ – нормальный.
2. Доказательство того, что собственный вектор нормального оператора А является также и собственным вектором А*. Доказать, что собственные значения общего собственного вектора для А и А* (А – нормальный оператор) комплексно сопряжены.
3. Доказательство того, что ортогональное дополнение инвариантного подпространства нормального оператора А является инвариантным подпространством А*. Доказать, что ортогональное дополнение собственного подпространства оператора А является инвариантным относительно А.
Задания для самостоятельного решения.

1 Доказать, что для того, чтобы оператор в унитарном пространстве был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы он имел базисную систему ортонормированных собственных векторов.
2. Проверить, что указанные матрицы являются нормальными и указать для них ортонормированные базисы из собственных векторов:

а) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Занятие 8. Линейные операторы в геометрии
1. Оператор поворота на плоскости и его матрица
2. Оператор поворота в пространстве
3.Оператор проектирования.
Задания для самостоятельного решения
1.Доказать, что оператор поворота, заданный в плоскости, унитарен.
2. Доказать, что оператор является унитарным тогда и только тогда, когда он сохраняет скалярное произведение, т.е. (Ux, Uy) = (x, y) для любых векторов x и y.
3. Доказать, что множество унитарных операторов образует группу относительно операции умножение.
4. Доказать, что нормальный оператор является унитарным тогда и только тогда, когда все его собственные значения по модулю равны 1.
5. Доказать, что оператор проектирования на подпространство U параллельно подпространству V (U + V – прямая сумма) является идемпотентным ($P^2 = P$). Доказать, что любой идемпотентный оператор P есть оператор проектирования на образ P параллельно ядру P.

Занятие 9. Эрмитовы и косоэрмитовы операторы
1. Доказательство, что множество симметрических (эрмитовых) операторов образуют группу по сложению.
2. Описание матриц симметрических и кососимметрических операторов в ортонормированном базисе.
3. Доказательство того, что любой линейный оператор над полем действительных чисел представим в виде суммы симметрического и кососимметрического оператора.
Задания для самостоятельного решения
1. Пусть эрмитова матрица представлена в виде H = S + iK, где S и K – действительные матрицы. Доказать, что S – симметрическая, а K – кососимметрическая.
2. Доказать, что множество кососимметрических операторов образует алгебру Ли.

Занятие 10. Контрольная работа № 1.
.

Планы практических занятий 10 семестр

Занятие 1. Специальные виды чисел
1. Числа Фибоначчи.
2. Совершенные числа.
3. Простые числа Мерсенна и Ферма.
4. Формула Мёбиуса.

Выступление с докладами
Занятие 2. Некоторые приложения комплексных чисел
1. Применение комплексных чисел для доказательства тождеств
2. Комплексные числа и кривые второго порядка.
3. Описание поворотов

Решить задачи на нахождение результата поворотов тех или иных векторов на заданный углы с помощью комплексных чисел.

Занятие 3. Приводимость и неприводимость многочленов над различными полями

1. Критерии неприводимости над полем рациональных чисел.
2. Конечные поля.
3.Приводимость многочленов над конечными полями. Взаимосвязь между приводимостью многочленов над конечными полями и над полем рациональных чисел.

Решить задачи:

1. С помощью способа Кронекера проверить, приводим ли многочлен $x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

2.Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^6 + y^3 = 65 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 8 \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ xy = 8 \end{cases}$

3. Решите уравнение:

$x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9$

Занятие 4. Билинейные и квадратичные формы

1.Евклидовы пространства.
2.Билинейные формы и их связь с линейными операторами.
3.Матрицы билинейных и квадратичных форм

Решить задачи

1.Пусть вектор $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Выяснить, можно ли скалярное произведение задать следующим способом:

а) $(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$
б) $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$
в) $(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$
г) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$
д) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$
е) $(x, y) = |x_1y_1| + |x_2y_2|$.

Какие из представленных выражений не являются билинейными формами? Составить матрицы Грама для всех билинейных форм.

2. По заданным матрицам выпишите соответствующие билинейные формы, определите, какие из них задают скалярные произведения

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ е) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Занятие 5. Виды билинейных форм

1. Эрмитовы и косоэрмитовы формы.
2. Приведение симметрических билинейных форм к каноническому виду.
3.Положительно определённые формы. Критерий Сильвестра.
4. Применения квадратичных форм в геометрии.

Определить вид квадратичной формы, составить матрицу и указать индексы инерции

а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$
б) $x_1x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_1$

в) $x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$
г) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$
д) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2$
е) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$
ж) $2x_2^2 + 4x_2x_3$
з) $x_1^2 + x_1x_2 + 4x_3^2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Занятие 6.Основные понятия геометрического моделирования

Цель: Разобрать основные приемы моделирования аналитических линий и поверхностей

1. Моделирование аналитических линий.
2.Моделирование аналитических поверхностей.

Рекомендации к самостоятельной работе

Занятие 7. Моделирование составных кривых линий и поверхностей.

Цель: Разобрать основные приемы моделирования составных кривых линий.

1. Моделирование составных кривых
2. Моделирование сплайновых линий
3.Моделирование составных поверхностей

Рекомендации к самостоятельной работе

1. Проработать материал по теме практического занятия.
2. Повторить лекционный материал по теме занятия.

Занятие 8. Моделирование тел.

1. Приемы моделирования Платоновых тел.
2. Тела движения.
3.Моделирование тел при помощи поперечных сечений.

Рекомендации к самостоятельной работе

1. Проработать материал по теме практического занятия.
2. Повторить лекционный материал по теме занятия.

Занятие 9. Защита рефератов

Занятие 10. Контрольная работа

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Линейная алгебра. Линейные операторы. Квадратичные формы. Комплексные числа: Учебное пособие / Рубашкина Е.В. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 38 с. (https://znanium.com/catalog/product/544419
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: МЦНМО. – 2009. (Электронный ресурс. – «Университетская библиотека онлайн», Режим доступа:
3. Том 1.Основы алгебры – 273 с: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=63140
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: МЦНМО. – 2009. (Электронный ресурс. – «Университетская библиотека онлайн», Режим доступа:
5. Том 2. Линейная алгебра – 368 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=63144
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру.– М.: МЦНМО. – 2009. (Электронный ресурс. – «Университетская библиотека онлайн», Режим доступа:
7. Том 3. Основные структуры алгебры – 272 с.
8. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=62951)
9. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование: Учебное пособие / Н.Н. Голованов. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 400 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=520536

Дополнительная литература

1. Смолин, Ю.Н. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие / Ю.Н. Смолин. — 5-е изд., стер.—Москва : ФЛИНТА, 2017. — 464 с. - ISBN 978-5-9765-0050-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1034573.
2. Ильин, В. А. Линейная алгебра [Текст] : [Учеб. для физ. спец. и спец. "Прикладная математика"] / В. А. Ильин ; Э.Г. Поздняк. - М. : Физматлит, 2010. - 278 с. (Электронный ресурс «Университетская библиотека онлайн», режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=68974)
3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре [Текст] : [Учеб. пособие для физ.-мат. спец. вузов] / И. В. Проскуряков. - 8-е изд. - М. : СПб. : Физматлит : Невский диалект : Лаборатория базовых знаний, 1966. - 381 с. (http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=464077

Интернет-ресурсы

1. Электронная библиотека http://lib.mexmat.ru/books/75829 (свободный доступ)
2. Электронная библиотека http://www.razym.ru (свободный доступ)
3. http://a.slave.festival.1september.ru/articles/211927/ (Дата обращения: 15.04.2015).
4. http://goldlara.narod.ru/numbers/numbers.htm (Дата обращения: 17.03.2015).
5.http://nsportal.ru/sites/default/files/2012/12/10/tvorcheskiy_proekt_po_matematike_na_temu.docx (Дата обращения: 01.04.2015).