Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической
работе С.Н. Титов

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0233C9D60038B01A9E48C1A3FBB4A9D9F6
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 07.07.2023 до 28.04.2038

# АЛГЕБРА

Программа учебной дисциплины предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования
– программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «26» мая 2023 г. № 5

Ульяновск, 2023

## Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Алгебра» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля по профилю «Математика» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках школьного курса математики. Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: Числовые системы, Теория чисел, Математические методы теории принятия решений, Теория вероятностей и основы математической статистики, Научно-исследовательская работа, Подготовки к сдаче и сдача государственного экзамена, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

1. **Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине**

**Целью** освоения дисциплины является подготовка учителя к будущей профессиональной деятельности: формирование способности к преподаванию учебного предмета алгебра, как в обычных общеобразовательных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

**Задачей** освоения дисциплины является закрепление умений проводить математические преобразования выражений, отработка понятийного аппарата математики, техники проведения математических расчетов, формирование и закрепление умения проводить строгие абстрактно-логические доказательства, решать задачи повышенной сложности школьного курса математики.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

| Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине | Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины) | | |
|---|---|---|---|
| | Знает | умеет | Владеет |
| УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен | ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации | ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач | ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности |

| | | | |
|---|---|---|---|
| к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности. | | | |
| ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.<br>ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).<br>ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО. | ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания;<br>ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики. | ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию. | ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий,<br>ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике. |
| ПК-3. Способен | ОР-9. Знает | ОР-11 Умеет | ОР-13. Владеет |

| | | | |
|---|---|---|---|
| формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов.<br>ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской , проектной, групповой и др.). | характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике;<br>ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности. | оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов;<br>ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности. | навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики. |

**2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

| Номер семестра | Всего | | Учебные занятия | | | | | | Форма промежуточной аттестации |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Трудоемк. | | Лекции, час. | Практические занятия, час. | в т. ч. практическая подготовка, час. | Лабораторные занятия, час. | в т. ч. практическая подготовка, час. | Самостоят. работа, час. | |
| | Зач. ед. | Часы | | | | | | | |
| 1 | 3 | 108 | 18 | 30 | - | - | - | 33 | экзамен |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | (27) |
| 2 | 4 | 144 | 24 | 40 | - | - | - | 53 | экзамен (27) |
| 4 | 3 | 108 | 18 | 30 | - | - | - | 33 | экзамен (27) |
| Итого: | 10 | 360 | 60 | 100 | - | - | - | 119 | 81 |

**3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

***3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий***

| Наименование раздела и тем | Количество часов по формам организации обучения | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Лекционные занятия | Практические занятия | Лабораторные занятия | Самостоятель-ная работа |
| **1 семестр** | | | | |
| Элементы теории множеств | 8 | 14 | | 10 |
| Системы линейных уравнений и матрицы | 10 | 16 | | 13 |
| Экзамен | | | | 27 |
| **Итого по 1 семестру** | **18** | **30** | **-** | **60** |
| **2 семестр** | | | | |
| Основные алгебраические структуры | 10 | 24 | | 23 |
| Конечномерные векторные пространства | 8 | 10 | | 15 |
| Теория делимости | 6 | 6 | | 15 |
| Экзамен | | | | 27 |
| **Итого по 2 семестру** | **24** | **40** | **-** | **80** |
| **4 семестр** | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Теория многочленов | 14 | 24 | | 33 |
| Линейные отображения и линейные операторы | 4 | 6 | | |
| Экзамен | | | | 27 |
| **Итого по 4 семестру** | **18** | **30** | **-** | **60** |
| **Всего по дисциплине:** | **60** | **100** | **-** | **200** |

### *3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины*

**Краткое содержание курса (1 семестр)**

**Элементы теории множеств**

Операции над множествами, их свойства. Метод математической индукции. Бинарные отношения на множестве, их свойства. Операции над бинарными отношениями. Отношение эквивалентности. Построение разбиения множества по эквивалентности. Определение, примеры и виды отображений (соответствий, функций). Композиция отображений, её свойства. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения.

**Системы линейных уравнений и матрицы**

Матрицы и операции над ними (свойства операций, примеры). Кольцо матриц. Знак подстановки. Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядка. Основные свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Обратная матрица, способы её вычисления. Системы линейных уравнений. Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы линейных уравнений. Запись и решение системы $n$ линейных уравнений с $n$ переменными в матричной форме. Правило Крамера.

**2 семестр**

**Основные алгебраические структуры**

Бинарная алгебраическая операция и её свойства. Нейтральные и симметричные элементы, их свойства. Определение, примеры и простейшие свойства групп. Группы подстановок и классов вычетов. Подгруппы. Смежные классы и теорема Лагранжа. Изоморфизмы и гомоморфизмы групп. Определение, примеры и простейшие свойства колец. Подкольца и идеалы кольца. Поле как частный случай кольца: примеры и простейшие свойства. Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Свойства операции комплексного сопряжения. Геометрическое представление комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.

**Конечномерные векторные пространства**

Примеры и простейшие свойства векторных пространств. Арифметические векторные пространства. Линейная зависимость системы векторов. Базис и ранг конечной системы векторов. Разложение вектора по базису. Базис и размерность конечномерного векторного пространства. Ранг матрицы. Способы его вычисления. Критерий совместности системы линейных уравнений. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Однородная система линейных уравнений. Связь решений неоднородной и ассоциированной с ней однородной системы. Подпространства, критерий подпространства, примеры. Подпространство фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений. Евклидово векторное пространство. Норма вектора. Угол между векторами. Ортонормированный базис.

**Теория делимости**

Отношение делимости нацело на множестве целых чисел и его простейшие свойства. Теорема о делении с остатком. НОД и НОК целых чисел. Алгоритм Евклида. Взаимно простые числа. Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики и следствия из неё. Отношение сравнимости по натуральному модулю на множестве целых чисел и его свойства. Множество классов вычетов $\mathbf{Z}_{\boldsymbol{m}}$.

**4 семестр**

**Теория многочленов**

Кольцо многочленов от одной неизвестной. Степень многочлена и ее свойства. Многочлены над полем: деление с остатком, НОД многочленов, разложение многочлена на неприводимые множители. Теорема Безу. Схема Горнера. Многочлены над областью целостности: количество корней, функциональное и алгебраическое равенство многочленов. Формальная производная многочлена и кратные корни. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена над полем комплексных чисел на неприводимые множители. Теорема Виета. Решение уравнений 3-й и 4-й степени. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел. Алгебраические расширения полей. Избавление от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби. Примеры геометрических задач, сводящихся к уравнениям, неразрешимым в квадратных радикалах. Алгебраические и трансцендентные числа. Построение кольца многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены. Применение симметрических многочленов к решению систем уравнений.

**Линейные отображения и линейные операторы**

Линейные отображения и линейные операторы векторных пространств, примеры, простейшие свойства. Ядро и образ линейного отображения. Матрица линейного оператора относительно данного базиса, ее изменение при переходе к другому базису. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение.

## 3. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным докладам (подготовка рефератов);
- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий.

**ОС-1. Контрольная работа № 1 (домашняя)**

Вариант 1.

1. Найдите $A \cap B$, $B \backslash A$, $\overline{A}$, $B \backslash \overline{A}$, если $A = (2, 4)$, $B = [4, 5]$. Изобразите на графике декартово произведение $A \times B$.

2. Методом математической индукции докажите, что:

$S_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = ½ \cdot n(3n - 1)$;

3. Бинарное отношение задано на множестве пар действительных чисел. Выясните, является ли оно отношением эквивалентности или отношением порядка.

$(a, b)\ \rho\ (c, d) \Leftrightarrow\ a < c \wedge b \le d$.

4. Охарактеризуйте соответствия (отображения), действующие на множестве действительных чисел: а) $xfy \Leftrightarrow 1 = x^2 + y^2$; б) $xgy \Leftrightarrow y = \cos x$.

5. а) Существуют ли для данных функций обратные функции (если да, найдите их):

$f(x) = x + 5$, $g(x) = \cos x$.

б) Найдите композиции $g \circ f$, $f \circ g$.

Вариант 2.

1. Найдите $A \cup B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $B \setminus \overline{A}$, если $A = (1, 4)$, $B = [3, 5]$. Изобразите на графике декартово произведение $B \times A$.
2. Выясните, справедливо ли равенство $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$.

3. Выясните, является ли бинарное отношение $\rho$, заданное на множестве целых чисел следующим образом:

*а)* $m\ \rho\ n \Leftrightarrow (9m - n)$ делится нацело на 4,

рефлексивным, симметричным, транзитивным, антирефлексивным, антисимметричным, отношением эквивалентности, отношением порядка.

4. Пусть $A = \{0, 1, 2, 3\}$ в множество $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Отображение $S: A \to B$ задано следующим образом: $S = \{(0, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Является ли оно сюръективным, инъективным, биективным?

5. Существуют ли для данных функций обратные функции (если да, найдите их).

**а)** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x - 2$; **б)** $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $g(x) = e^x$.

б) Найдите композиции $g \circ f$, $f \circ g$.

## ОС-2. Контрольная работа № 2

**Системы линейных уравнений и матрицы**

**Вариант 1.**

1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Решите уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решите по правилу Крамера $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ x + y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$.

**Вариант 2.**

1. Пусть $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = BC$. Найдите определитель каждой матрицы.

2. Найдите матрицу, обратную к матрице: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решите по правилу Крамера $\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$.

## ОС-3. Контрольная работа № 3

**Основные алгебраические структуры**

1. Выясните, является ли множество целых чисел кратных 7, группой относительно сложения, группой относительно умножения, кольцом, полем?

2. Выясните, является ли множество чисел вида $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ группой относительно сложения, группой относительно умножения, кольцом, полем?

3. Вычислите $i^{345}$.

4. Найдите все комплексные корни уравнения $x^2 + x + 2 = 0$.

5. Вычислите корни $\sqrt[5]{\dfrac{1-i}{-2+2i\sqrt{3}}}$ и результат записать в тригонометрической форме.

6. Геометрически описать множество комплексных чисел $z$, для которых $|z-1| = 6$.

**ОС-4. Контрольная работа № 4 (домашняя)**

**Конечномерные векторные пространства**

Вариант 1.

1. Вычистите ранг системы векторов: $\mathbf{a_1} = (2, 1, 2, -1)$, $\mathbf{a_2} = (1, 2, -1, 3)$, $\mathbf{a_3} = (3, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a_4} = (1, 0, 0, 2)$.

2. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений.

$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$

$3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$

$4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0$

Вариант 2.

3. Найдите координаты вектора $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 3)$ в базисе $\mathbf{b_1} = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b_2} = (1, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b_3} = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b_4} = (1, 0, 0, 0)$.

4. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1,\\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2,\\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 &= -4.
\end{aligned}$$

**ОС-5. Контрольная работа № 5**

**Теория делимости**

1. Найдите НОД и НОК чисел $a = 318$ и $b = 477$. Найти целые $x, y$, такие, что:

$$\text{НОД}(a, b) = ax + by.$$

2. С каким наименьшим неотрицательным числом сравнимо число $a$ по модулю 7.

а) $a = 342$; б) $a = -23$?

3. Перечислите все классы вычетов по модулю 6. К какому классу принадлежит число 153? Укажите не менее трёх положительных и трёх отрицательных элементов для класса, порождённого элементом 4.

4. Методом математической индукции докажите, что: $8^n - 1$ нацело делится на 7.

**Теория многочленов**

**ОС-6. Контрольная работа № 6**

Вариант 1.

1. Найдите частное и остаток от деления многочлена $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ на многочлен $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

2. Используя схему Горнера, разложите многочлен $f(x) = 2x^6 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ по степеням $(x - 4)$.

3. Найдите все комплексные корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

4. С помощью производной отделить неприводимые кратные множители многочлена: $f(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9$.

Вариант 2.

5. Найти НОД и НОК многочленов $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ и $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

6. Используя схему Горнера найдите $f(a)$, где $f = 4x^3 + x^2$, $a = -1 - i$.

7. Найдите все рациональные корни многочлена и разложить его на множители, неприводимые над полем рациональных чисел $f(x) = 20x^5 - 72x^4 + 57x^3 - 75x^2 + 37x - 3$.

8. Найдите все комплексные корни уравнения: $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$.

**ОС-7. Контрольная работа № 7 (домашняя)**

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\dfrac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25} + 4\sqrt[3]{5} + 1}$.

2. Выразите многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2$ через основные (элементарные) симметрические многочлены.

3. Найдите сумму кубов корней многочлена $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

4. Выясните, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу в базисе {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}.

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$.

5. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе линейного пространства над **R** матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

**ОС-8. Тест**

**Примерный вопрос**

1. Если символом i обозначена мнимая единица (число, квадрат которого равен –1). Тогда $i^8 =$…

***Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:***

1. Череватенко О.И., Рацеев С.М., Глухова Н.В., Кувшинова А.Н. Основы высшей алгебры. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2020. – 60 с.

2. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Линейная алгебра. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2019. – 40 с.
3. Глухова Н.В., Череватенко О.И., Гришина С.А., Куренева Т.Н. Основы теории алгебраических структур. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2019. – 23 с.
4. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Алгебра. Часть 4. Алгебра многочленов Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 42 с.
5. Карпова С.А. Алгебра и теория чисел. Часть 1. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ, 1998. – 24 с.
6. Ильязова Д.З. Алгебра и теория чисел. Часть 2. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ.
7. Богомолова И.В., Ильязова Д.З. Алгебра и теория чисел. Часть 4. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ, 1999. – 24 с.
8. Глухов В.П., Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть I. – Ульяновск: УлГПУ, 1996. – 58 с.
9. Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть 2. – Ульяновск: УлГПУ, 1999. – 36 с.

## 5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

### Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

**Цель проведения аттестации** – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

**Промежуточная аттестация** осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

<table>
<tr><td>№ п/п</td><td>СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,<br>используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции</td><td>Образовательные результаты дисциплины</td></tr>
<tr><td></td><td>Оценочные средства для текущей аттестации<br>ОС-1 Контрольная работа № 1<br>ОС-2 Контрольная работа № 2<br>ОС-3 Контрольная работа № 3<br>ОС-4 Контрольная работа № 4<br>ОС-5 Контрольная работа № 5<br>ОС-6 Контрольная работа № 6<br>ОС-7 Контрольная работа № 7<br>ОС-8. Тест</td><td rowspan="2">ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации<br>ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач<br>ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности<br>ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания;<br>ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.<br>ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.<br>ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий,<br>ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.<br>ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и</td></tr>
<tr><td></td><td>Оценочные средства для промежуточной аттестации<br>(Экзамен)<br>ОС-9-11 Экзамен в форме устного собеседования</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | | метапредметных результатов в контексте обучения математике;<br>ОР-10. Владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.<br>ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов;<br>ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.<br>ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики. |

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

***Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине***

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

*Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине*

**Примерный перечень вопросов к экзамену**

**1 семестр**

**Элементы теории множеств**

1. Операции над множествами (объединение, пересечение), их свойства.
2. Операции над множествами (разность, дополнение), их свойства.
3. Декартово произведение множеств. Количество элементов в декартовом произведении двух конечных множеств
4. Метод математической индукции. Доказательство теоремы о количестве подмножеств n-элементного множества
5. Определение, примеры и виды отображений (соответствий)
6. Обратные соответствия. Свойства
7. Композиция отображений, её свойства.
8. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения.
9. Перестановки и подстановки. Теорема о количестве подстановок из n элементов.
10. Умножение подстановок. Обратные подстановки
11. Четность подстановки.
12. Бинарные отношения на множестве, их свойства. Операции над бинарными отношениями.
13. Отношение эквивалентности. Построение разбиения множества по эквивалентности.
14. Отношение порядка.

**Системы линейных уравнений и матрицы**

15. Матрицы и операции над ними (свойства операций, примеры).
16. Знак подстановки. Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядка.
17. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу.
18. Основные свойства определителей.
19. Обратная матрица, способы её вычисления.
20. Критерий обратимости матрицы
21. Матричные уравнения.
22. Системы линейных уравнений. Совместные и несовместные, определенные и

неопределенные системы линейных уравнений.

23. Запись и решение системы $n$ линейных уравнений с $n$ переменными в матричной форме. Правило Крамера.
24. Линейная зависимость системы векторов.
25. Базис и ранг конечной системы векторов.
26. Разложение вектора по базису.
27. Базис и размерность конечномерного векторного пространства.
28. Ранг матрицы. Способы его вычисления.

**2 семестр**

**Основные алгебраические структуры**

1. Бинарная алгебраическая операция и её свойства. Нейтральные и симметричные элементы, их свойства.
2. Определение, примеры и простейшие свойства групп.
3. Группы подстановок
4. Группа классов вычетов.
5. Подгруппы. Критерий подгруппы
6. Смежные классы группы по подгруппе
7. Теорема Лагранжа.
8. Изоморфизмы и гомоморфизмы групп.
9. Определение, примеры и простейшие свойства колец.
10. Подкольцо, критерий подкольца
11. Идеалы кольца.
12. Поле как частный случай кольца: примеры и простейшие свойства.
13. Подполе. Критерий подполя.
14. Поле комплексных чисел.
15. Алгебраическая форма комплексного числа.
16. Свойства операции комплексного сопряжения.
17. Геометрическое представление комплексного числа.
18. Тригонометрическая форма комплексного числа.
19. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
20. Формула Муавра.
21. Извлечение корней из комплексных чисел.

**Конечномерные векторные пространства**

22. Примеры и простейшие свойства векторных пространств. Арифметические векторные пространства.

23. Линейная зависимость системы векторов.
24. Базис и ранг конечной системы векторов.
25. Разложение вектора по базису.
26. Базис и размерность конечномерного векторного пространства.
27. Ранг матрицы. Способы его вычисления.
28. Критерий совместности системы линейных уравнений.
29. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.
30. Однородная система линейных уравнений. Связь решений неоднородной и ассоциированной с ней однородной системы.
31. Подпространства, критерий подпространства, примеры.
32. Подпространство фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.
33. Евклидово векторное пространство. Норма вектора. Угол между векторами. Ортонормированный базис.

**Теория делимости**

34. Отношение делимости нацело на множестве целых чисел и его простейшие свойства. Теорема о делении с остатком.
35. НОД и НОК целых чисел. Алгоритм Евклида. Взаимно простые числа. Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел.
36. Основная теорема арифметики и следствия из неё.
37. Отношение сравнимости по натуральному модулю на множестве целых чисел и его свойства. Множество классов вычетов $\mathbf{Z}_m$.

**4 семестр**

**Теория многочленов**

1. Кольцо многочленов от одной неизвестной. Степень многочлена и ее свойства.
2. Многочлены над полем: деление с остатком, НОД многочленов, разложение многочлена на неприводимые множители.
3. Теорема Безу.
4. Схема Горнера.
5. Многочлены над областью целостности: количество корней, функциональное и алгебраическое равенство многочленов.
6. Формальная производная многочлена и кратные корни.

7. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена над полем комплексных чисел на неприводимые множители.
8. Теорема Виета.
9. Решение уравнений 3-й
10. Решение уравнений и 4-й степени.
11. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел.
12. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами.
13. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел.
14. Алгебраические расширения полей.
15. Избавление от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби.
16. Примеры геометрических задач, сводящихся к уравнениям, неразрешимым в квадратных радикалах.
17. Алгебраические и трансцендентные числа.
18. Построение кольца многочленов от нескольких переменных.
19. Симметрические многочлены.
20. Применение симметрических многочленов к решению систем уравнений.

**Линейные отображения и линейные операторы**

21. Линейные отображения и линейные операторы векторных пространств, примеры, простейшие свойства.
22. Матричное представление линейных операторов
23. Действия над линейным операторами.
24. Ядро и образ линейного отображения.
25. Матрица линейного оператора относительно данного базиса, ее изменение при переходе к другому базису.
26. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

**Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине**

*Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся*

| | | Посещение лекций | Посещение практических занятий | Работа на практических занятиях | Экзамен |
|---|---|---|---|---|---|
| **1, 4, семестры** | Разбалловка по видам работ | 9 х 1=9 баллов | 15 х 1=15 Баллов | 212 баллов | 64 балла |
| | Суммарный макс. балл | 9 баллов max | 24 балла Max | 236 баллов Max | 300 баллов max |

| | | Посещение лекций | Посещение практических занятий | Работа на практических занятиях | Экзамен |
|---|---|---|---|---|---|
| **2 семестр** | Разбалловка по видам работ | 12 х 1=12 баллов | 20 х 1= 20 Баллов | 272 балла | 96 баллов |
| | Суммарный макс. Балл | 12 баллов Max | 20 баллов max | 304 балла Max | 400 баллов max |

*Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 1, 4 семестров*

| **Оценка** | **Баллы (3 ЗЕ)** |
|---|---|
| «отлично» | 271-300 |
| «хорошо» | 211-270 |
| «удовлетворительно» | 151-210 |
| «неудовлетворительно» | 150 и менее |

*Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 2 семестра*

| **Оценка** | **Баллы (4 ЗЕ)** |
|---|---|
| «отлично» | 361-400 |
| «хорошо» | 281-360 |
| «удовлетворительно» | 201-280 |
| «неудовлетворительно» | 200менее |

## 6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

**Подготовка к практическим занятиям.**

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

## Планы практических занятий (семестр 1)

### *ЗАНЯТИЕ №* 1. Множества и операции над ними

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, $A'$, $B'$ если:
1) A = {-1, 0, 3, 4}, B = {0, 4, 6}
2) A = [0, 2], B = (1, 5)
3) A = [0, 2], B = [2, 5],
4) A = [0, 2], B = {0, 4, 6}
5) A = [0, 2], B = {4, 6},
6) A = (-∞, 7], B = (5, 8),

**2.** Доказать или опровергнуть следующие равенства:

1) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$;
2) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{C})$;
3) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
5) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

## *ЗАНЯТИЕ №*2. Декартово произведение множеств

**1.** Изобразить на декартовой плоскости декартово произведения A×B и B×A
1) A = [1, 3], B = [1, 2],
2) A = [1, 2], B = (1, 2),
3) A = [1, 3), B = {1, 2},
4) A = {1, 2, 3}, B = {0, 1},
5) A = [1, 3], B = [1, ∞],
6) A = (1,∞), B = [2, ∞),
7) A = {1, 2, 3}, B = (0, ∞),
8) A = [0, 3], B = R.

**2.** Доказать свойства операций над множествами:
1) (A ∪ B)×C = (A×C) ∪ (B×C)
2) (A ∩ B)×C = (A×C) ∩ (B×C)
3) (A \ B)×C = (A×C) \ (B×C).
3. Доказать, что для всех натуральных чисел

а) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

в) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

г) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

д) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

е) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (n-1)\cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

## *ЗАНЯТИЕ №*3 Соответствия, виды соответствий

1. Охарактеризовать соответствия, действующие из множества {1, 2, 3, 4} во множество {1, 2, 3}, найти обратные.
а) {<1, 2>, <1,1>, <2,2>, <2,3>, <3,3>},
б) {<1, 2>, <2,3>, <1,3>},
в) {<1, 2>, <2,3>, <3,3>, <4,1>},
г) {<1, 2>, <2,3>, <3,1>}.
2. Охарактеризовать соответствия заданные на множестве всех действительных чисел:

а) $f(x)=\sqrt{x}$, б) $g(x)= \ln x$, в) $f(x)= \sin x$, г) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, д) $f(x) = x^2 + 5$,

е) $h(x) = 2^{x+1}$, з) $f(x) = x^3 + 1$, и) $g(x) = \sqrt{x+1}$, к) $h(x) = \dfrac{2}{x+1}$, л) $g(x) = \mathrm{ctg}\, x$.

Найти обратные соответствия для данных соответствий. Определить есть ли среди них функции.

## *ЗАНЯТИЕ №*4. Композиция соответствий, обратное соответствие, функции

1. Найти композиции $f \circ g$, $g \circ f$.

а) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)= \ln x$;

б) f(x)= sinx,  g(x) = $\frac{1}{x}$;

в) f = {<1, 2>, <2, 3>, <3,5>}, g = {<1, 1>, <2, 3>, <3,2>};

г) f = {<2, 2>, <2, 3>, <3,1>}, g = {<1, 4>, <2, 5>, <1,6>}.

2. f: A $\to$ B, g: B $\to$ C, h: C $\to$ D (A = C = D = R, B = $R_+$). Найти композиции: $g \circ f$, $h \circ (g \circ f)$, $h \circ g$, $(h \circ g) \circ f$, $g \circ f$, $(g \circ f) \circ h$, $g \circ (h \circ f)$:

1) f (x) = $x^2 + 5$, g(x) = $\sqrt{x}$, h(x) = $2^{x+1}$,

2) f (x) = $x^4 + 1$, g(x) = $\sqrt{x+1}$, h(x) = $\frac{2}{x+1}$,

3) f (x) = 3 + $x^3$, g(x) = lg (4 + x), h(x) = 11+x,

4) f (x) = arcsin(x +2,5), g(x) = sin x, h(x) = $3^{tgx}$.

## *ЗАНЯТИЕ №*5. Бинарные отношения

**1.** Бинарные отношения ρ заданы на множестве действительных чисел. Определите, являются ли они рефлексивными, симметричными, транзитивными, антирефлексивными, антисимметричными.

а) $x \rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$,    б) $x \rho y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$,

в) $x \rho y \Leftrightarrow xy > 1$,    г) $x \rho y \Leftrightarrow y = |x|$,

**2.** Бинарные отношения заданы на множестве целых чисел. Определите, являются ли они рефлексивными, симметричными, транзитивными, антирефлексивными, антисимметричными.

а) $m \rho n \Leftrightarrow 9m - n$ кратно 4,

б) $m \rho n \Leftrightarrow 7m - n$ кратно 6,

в) $x \rho y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$,

г) $x \rho y \Leftrightarrow (x + y)$ делится на 3,

д) $x \rho y \Leftrightarrow x - y$ делится на 3,

е) $x \rho y \Leftrightarrow 2x = 3y$,

ж) $m \rho n \Leftrightarrow 5m - n$ кратно 4,

з) $m \rho n \Leftrightarrow m$ кратно n,

**3.** Приведите пример бинарного отношения, которое

а) Транзитивно, симметрично, но не рефлексивно,

б) рефлексивно, симметрично, но не транзитивно,

в) рефлексивно, транзитивно, но не симметрично.

4. На множестве {1,2,3} задано бинарное отношение ρ. Выяснить является ли оно отношением эквивалентности, отношением порядка (если да, указать, строгого или нестрогого, линейного или нелинейного).

а) ρ = {<1, 2>, <2,3>, <1,3>},

б) ρ = {<1, 2>, <2,3>, <1,3>, <1,1>, <2, 2>, <3, 3>},

в) ρ = {<1, 2>, <1,1>, <2,2>}

## *ЗАНЯТИЕ №*6. Отношение эквивалентности и порядка

1. Постройте всевозможные разбиения множества {1, 2, 3, 4} на классы.

2. Найти разбиение множества целых чисел на классы эквивалентности, если отношение эквивалентности задано по правилу $x \equiv y \Leftrightarrow (x - y) \vdots m$.

а) m = 5, б) m = 8, в) m = 6 (д/з), г) m = 7 (д/з).

3. Бинарное отношение задано на множестве пар действительных чисел. Выясните, является ли оно отношением эквивалентности или отношением порядка.

а) $(a, b)\ \rho\ (c, d) \Leftrightarrow\ a - b = c - d$.

б) $(a, b)\ \rho\ (c, d) \Leftrightarrow\ a < c \wedge b \le d$.

в) $(x_1, y_1)\ \rho\ (x_2, y_2) \Leftrightarrow 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2$,
г) $(x_1, y_1)\ \rho\ (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1y_2 = x_2y_1$,
д) $(x_1, y_1)\ \rho\ (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

е) $\langle x, t\rangle \rho \langle y, z\rangle \Leftrightarrow x < y$ или при $x = y$, $t \le z$,
ж) $\langle x, t\rangle, \rho \langle y, z\rangle \Leftrightarrow x = y$ и $t = z$
з) $\langle x, t\rangle, \rho \langle y, z\rangle \Leftrightarrow x = y$ и $t \le z$,

## *ЗАНЯТИЕ* 7. Перестановки и подстановки

1. Какие из следующих соответствий являются подстановками. Записать подстановки в стандартном виде и найти среди них равные:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить произведение подстановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. Найдите чётности у всех подстановок из задания 1 и 2 и у их произведений.

4. Найдите обратные для всех подстановок из задания 1 и 2. Определите чётности обратных подстановок.

## *ЗАНЯТИЕ* 8. Матрицы и операции над ними

1.Даны матрицы:

E= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Вычислить EA, AB, BA, E + C, AC, CA, (AB)C, A(BC), (E + A)C.

**2.** Укажите сумму элементов последней строки матрицы C = 2A - B, где

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

**3.** Укажите сумму элементов первого столбца матрицы C = AB, где

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**4.** Укажите размерности матриц и найдите транспонированные к ним.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; г) $(2 \quad 4 \quad 7)$.

**5.** Найдите сумму и произведение матриц A + B, AB, BA

а) A=$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

б) A=$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

## *ЗАНЯТИЕ* 9. Определители и их свойства

1.Вычислите определитель матрицы разложением по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 4 & x & y & x & 3 \\ 0 & b & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & y & z & c & 0 \\ 5 & z & u & y & 4 \end{vmatrix}$ ж) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

**2.** Вычислить определитель приведением к треугольному виду

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

## *ЗАНЯТИЕ* 10. Обратные матрицы

**3.1.** Найти матрицу обратную к матрице, если она существует:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ж) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

**2.** Решить матричные уравнения AXB = C

а) A = $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

б) A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

в) A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

### *ЗАНЯТИЕ* 11. Решение систем по правилу Крамера

Решить системы по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} x+3y-2z=3 \\ 2x+y-3z=2 \\ 2x+4y-4z=1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ 2x+6y-4z=0 \\ x+2y-2z=-1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ 2x+y-3z=2 \\ 2x+6y-4z=1 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} -4x-2y+6z=3 \\ x+3y-2z=1 \\ x+2y-2z=0 \end{cases}$

### *ЗАНЯТИЕ* 12. Линейная зависимость и независимость конечной системы векторов

1) Вычислить линейную комбинацию $a_1 + a_2 - 3a_3$ для систем векторов:

а) $a_1(1,2,3)$, $a_2$ $(1,1,1)$, $a_3$ $(3,2,1)$;

б) $a_1(4, 2, 3,-1,5)$, $a_2(2, 1, -1, 3, -2)$, $a_3$ $(2,1,-6,10,-11)$;

в) (д/з) $a_1(3,-2,4,-1,-1,2)$, $a_2$ $(-5,3,2,0,-4,3)$, $a_3$ $(8,-5,3,4,1,-3)$;

г) (д/з) $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(1, 0, 0, 0)$, $a_3$ $(0, 1, -2, 1)$.

д) $f_1(x)=x^4+x^3$, $f_2(x) = x^4 - x^3$, $f_3(x) = 8x^4+4x^3$,

2. Вычислить линейные комбинации $a_1(1, 0, 1, 2)$, $a_2(1, 1, 0, 1)$, $a_3$ $(1,1,0,1)$, $a_4$ $(3,2,2,4)$:

а) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4$;

б) $a_2 - a_1 - 3a_3$;

в) $- 3a_1 + a_4$;

г) $a_1 + a_2 + a_3 - a_4$.

Является ли эта система линейно независимой?

3. Определить, какие из данных систем линейно независимы:

а) $a_1(1, 2, 3)$,

б) $a_1$ $(0, 0, 0)$,

в) $a_3$ $(3,2,1)$, $a_4$ $(6,4,2)$;

г) (д/з) $a_1(4, 2)$, $a_2(1, 1)$, $a_3$ $(-6, -6)$,

д) $a_1$ $(2,1,9,-11,16)$, $a_2$ $(10, 5,10,-6,17)$;

е) (д/з) $a_1(3,-2,4)$, $a_2$ $(-5,3,2)$, $a_3$ $(8,-5,3)$, $a_4$ $(7,-5,19)$,

$a_5$ $(11,12,-15)$;

ж) $a_1(1, 0, 1, 2)$, $a_2(1, 1, 0, 1)$, $a_3$ $(1,1,0,1)$, $a_4$ $(3,2,2,3)$, $a_5$ $(2, 1,2,2)$;

з) (д/з) $a_1(3, -4, 1, 2)$, $a_2(1, -1, -1, -1)$, $a_3$ $(0, 0, 0, 0)$, $a_4$ $(4,-3,1,2)$, $a_5$ $(1, -6, 1, 2)$;

### *ЗАНЯТИЕ* 13. Базис и ранг конечной системы векторов

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 18 (нечётные), 19, 20, 22, 23 (1).

1. Найти ранг и базис системы векторов, выразите все векторы системы через базисные:

а) $a_1(1,2,3)$, $a_2$ (1,1,1), $a_3$ (3,2,1), $a_4$ (4,4,1);

б) $a_1(4, 2, 3,-1,5)$, $a_2(2, 1, -1, 3, -2)$, $a_3$ (2,1,-6,10,-11), $a_4$ (2,1,9,-11,16), $a_5$ (10, 5,10,-6,17);

в) (д/з) $a_1(3,-2,4,-1,-1,2)$, $a_2$ (-5,3,2,0,-4,3), $a_3$ (8,-5,3,4,1,-3), $a_4$ (7,-5,19,1,-10,9),

$a_5$ (11,12,-15,8,17, -20);

г) $a_1(1, 0, 1, 2)$, $a_2(1, 1, 0, 1)$, $a_3$ (1,1,0,1), $a_4$ (3,2,2,3), $a_5$ (2, 1,2,2);

д) $a_1(3, -4, 1, 2)$, $a_2(1, -1, -1, -1)$, $a_3$ (3,-4,1,2), $a_4$ (4,-3,1,2), $a_5$ (1, -6, 1, 2);

е) (д/з) $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(1, 0, 0, 0)$, $a_3$ (0, 1, -2, 1), $a_4$ (0, 2, 0, - 2),

***ЗАНЯТИЕ* 14. Ранг матрицы.**

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 18 (нечётные), 19, 20, 22, 23 (1).

Работа по микрогруппам – вычисление рангов матриц разными путями – на скорость.

Вычислить ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & -9 & 21 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 11 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 15 & 11 & 9 & 13 & 19 \\ 17 & 10 & 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$,

***ЗАНЯТИЕ №* 15. Контрольная работа**

## 2 семестр

***ЗАНЯТИЕ №1.* Группы, подгруппы**

1. Пользуясь критерием подгруппы и тем, что множество всех действительных чисел – группа по сложению, а множество всех действительных чисел без нуля – группа по умножению, определите, какие из перечисленных множеств образуют группу относительно сложения, группу относительно умножения:

а) Целые числа; Целые числа, кратные 5; Нечётные целые числа; Рациональные числа; Положительные рациональные числа; рациональные числа без 0;

M = $\{a + b\sqrt{2}$, где a, b ∈Q}, A = {1, - 1, 0}, C = $\{3^n$, n ∈Z}.

б) (д/з) Натуральные числа; целые числа, кратные трём; Четные целые числа;

D = {5k – 1, k ∈ Z}, A = $\{k^2$, k ∈Z}, иррациональные числа, B = {1, -1},

M = { $a + b\sqrt{3}$, где a, b ∈Z}, C = $\{3^n$, n ∈Z}.

2. Определите, какие из найденных в задании 1 групп являются подгруппами других групп из того же задания.

*ЗАНЯТИЕ № 2. Классы смежности группы по подгруппе. Нормальные делители группы*

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти все подгруппы группы самосовмещений правильного треугольника. Построить левые и правые классы смежности по всем нетривиальным подгруппам.

2. Даны матрицы:

E=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

Найти все подгруппы и построить левые и правые классы смежности по всем этим подгруппам.

3. Найти множество классов смежности группы целых чисел по подгруппе чисел, делящихся на 5 (на 6 – д/з). Найдите все подгруппы группы классов смежности.

4.Какие из найденных подгрупп являются нормальными делителями?

*ЗАНЯТИЕ № 3. Кольца и поля*

№ 1. Какие из перечисленных множеств являются кольцами и полями?

а) Целые числа;
б) Целые числа, кратные 5;
в) Нечётные целые числа;
г) Рациональные числа;
д) Положительные рациональные числа; рациональные числа без 0;
е) M = $\{a + b\sqrt{2}$ , где a, b $\in Q\}$,
ж)A = $\{1, -1, 0\}$,
з) C = $\{3^n, n \in Z\}$.
№ 2. Домашнее задание
а) Натуральные числа;
б) целые числа, кратные трём;
в) Четные целые числа;
г) D = $\{5k – 1, k \in Z\}$,
д) A = $\{k^2, k \in Z\}$,
е) иррациональные числа,
ж) B = $\{1, -1\}$,
з) M = $\{a + b\sqrt{3}$ , где a, b $\in Z\}$.

*ЗАНЯТИЕ № 4. Кольцо многочленов и кольцо классов вычетов*

Выясните, являются ли группой по сложению и умножению, кольцом, полем:

а) Множество всех многочленов от одной переменной

б) множество многочленов n-й степени

в) множество многочленов степени не выше n

г) множество классов смежности группы целых чисел, по подгруппе чисел, делящихся на 5

д) множество классов смежности группы целых чисел, по подгруппе чисел, делящихся на 6 е) множество классов смежности группы целых чисел, по подгруппе чисел, делящихся на 4

ж) множество классов смежности группы целых чисел, по подгруппе чисел, делящихся на 3

***ЗАНЯТИЕ № 5. Кольца и идеалы***

Доказать, что множество матриц 2х2 – кольцо.

Выясните, являются ли подкольцами или идеалами в данных кольцах (a, b – произвольные действительные числа) следующие множества:

а) целые числа в кольце комплексных чисел;

б) комплексные числа вида a + ai, где a действительное число, в кольце комплексных чисел;

в) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

г) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

д) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

е) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка

***ЗАНЯТИЕ № 6.*** **Поле комплексных чисел, алгебраическая форма комплексного числа**

**1.** Вычислить выражения: $(1-i)^2, i^5, (1+\sqrt{3}i)^2, (2-3i)(2+3i), (1+\sqrt{3}i)^3,\ (\sqrt{3}+i)^3$.

**2.** Для чисел $-2+3i, -2-3i, 4-7i, 5, -4i, -2, -\lg 100, -i$ записать им противоположные, сопряженные и обратные числа.

**3.** Для чисел $z_1 = 3+2i$ и $z_2 = -4+i$ найти $z_1+z_2; z_1-z_2; z_1z_2; \frac{z_1}{z_2};$

**4.** Вычислите:

а) $(7-3i)^3$; б) $\frac{2-5i}{1-\sqrt{3}i}$; в) $\frac{z-\bar{z}}{2}$; г) $i^5$; д) $i^{228}$; е) $i^{137}$.

б) (д/з) $(2+i)^2$; б) $\frac{(1+2i)^3-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^3}$; в) $\frac{z+\bar{z}}{2}$; г) $i^8$; д) $i^{65}$; е) $i^{235}$.

***ЗАНЯТИЕ*** **7. Геометрический смысл и тригонометрическая форма комплексного числа**

1. Изобразите на комплексной плоскости числа

а) 2+4i; б) 4+2i; в) –3 – 5i; г) – i;
д) 2 – i; е) – 2 + i; ж) – 2; з) i.

**2.** Запишите числа комплексно-сопряжённые данным и на комплексной плоскости постройте векторы, изображающие данные числа и комплексно-сопряжённые с ними.
а) $z = 3 + i$; б) $z = 3 - i$; в) $i$; г) $i - 3$; д) 3; е) $-5i$.
**3.** На комплексной плоскости заштрихуйте все точки z, удовлетворяющие условиям
а) $|z| < 1$;
б) $|i - z| < 1$;
в) $|z| \geq 1$;
г) $|z + i| = 3$;
д) $\arg z = \frac{\pi}{4}$;
е) $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$;
ж) $|z - i| < |z + 2 - 3i|$;
з) $\arg z = \pi$;
к) $|z| < |z/2| + 1$;
л) $|z - 1 + i| \leq 2$.
м) $\operatorname{Im} z \geq 3$
н) $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$

***ЗАНЯТИЕ* 8. Тригонометрическая форма комплексного числа**

Представьте следующие числа в тригонометрической форме:
а) $1, -i$, б) $1 - i$, в) $-1-\sqrt{3}\,i$, г) $-2 + 7i$, д) $\sin\alpha - i\cos\alpha$,
е) $i, -1$, ж) $1 + i$, з) $\sqrt{3} - i$, и) $5i$, к) $3 - 5i$, л) $-\cos\alpha + i\cos\alpha$.

***ЗАНЯТИЕ* 9. Действия над числами в тригонометрической форме**.

1.Вычислите с помощью перехода к тригонометрической форме:

а) $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i)(-\frac{\sqrt{2}}{6}+i\frac{\sqrt{6}}{6})$; б) $(6 + 2i\sqrt{3})(-3 - 3i)$

в) $\frac{1+i}{3+i3\sqrt{3}}$; г) $\frac{-2+i2\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$; д) $(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^{10}$; е) $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^{6}$

2. Найдите корни n-ой степени из 1

а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 2$; г) $n = 6$.

***ЗАНЯТИЕ № 10.* Вычисление корней**

3. Вычислите и результат представьте в тригонометрической форме:

а) $\sqrt{\frac{3-3i}{i+\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt{\frac{-2-2i}{i-1}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{1-i}{-2+2i\sqrt{3}}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}}$.

4. Вычислите и результат представьте в алгебраической форме:

а) $\sqrt{-3+4i}$; б) $\sqrt{15+8i}$

***ЗАНЯТИЕ № 11. Применение комплексных чисел к решению уравнений***

1.Решите уравнения:
а) $x^2 + 2x + 3 = 0$;
б) $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$;
в) $x^2 - (3 + 2i)x + 5 + i = 0$;
г) $z\bar{z} + 2\bar{z} = 3 + 2i$;
д) $x^2 + 5x + 9 = 0$;

е) $x^4 + 34x^2 + 289 = 0$;
ж) $x^2 – (4 + 3i)x + 1 + 5i = 0$;

**2.** Решите уравнения, ответ запишите в тригонометрической форме
а) $x^5 – 2 = 0$
б) $x^3 + 2 + 2i = 0$
в) $x^3 + i = 0$
б) $x^4 + 1 + \sqrt{3}\, i = 0$.

**3.** Решите уравнения, ответ запишите в алгебраической форме
а) $x^3 = i$;
б) $x^4 = – 1 – \sqrt{3}\, i$;
в) $x^6 = – i$;
г) $x^3 = 2 – 2i$.

***ЗАНЯТИЕ № 12. Контрольная работа***

***ЗАНЯТИЕ* 13. Векторные пространства и подпространства.**

Фронтально и у доски разбираются задачи 1, 2 ( 1- 4), 3, 5, 13 (1 – 2), 14, 15 (3 – 6).

1. Выяснить, образует ли векторное пространство множество векторов вида

а) $\{(\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta\}, \alpha, \beta \in R\}$.

б) $\{(\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\}, \alpha, \beta \in R\}$.

в) $\{(\alpha, \alpha\beta, \alpha+2\beta\}, \alpha, \beta \in R\}$.

г) $\{(0, \alpha+\beta, \alpha+2\beta\}, \alpha, \beta \in R\}$.

2. Доказать, что векторными пространствами над полем действительных чисел являются:

а) арифметическое векторное пространство,

б) множество матриц размера 3х3 с действительными коэффициентами,

в) множество всех многочленов степени не выше n,

г) поле комплексных чисел,

д) поле действительных чисел.

***ЗАНЯТИЕ* 14. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса (неоднородные системы)**

Найти общее решение системы и какое-нибудь частное решение. Сделать проверку.

| | |
|---|---|
| а) $x_1 – 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1$<br>$2x_1 + 4x_2 – 3x_3 + 3x_4 = –1$<br>$3x_1 + x_2 + 2x_3 – x_4 = 0$<br>$12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0$ | б) $x_1 – 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 = –1$<br>$5x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 3$<br>$9x_1 + 2x_2 + 34x_3 + 23x_4 = 3$<br>$7x_1 + 4x_2 + 26x_3 + 20x_4 = 4$ |
| в) $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5= 1$<br>$2x_1 + x_2 +4x_3 + x_4 + x_5 = 3$<br>$x_2 – 2x_3 + x_4 + x_5 = 7$<br>$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5= 0$ | г) $4x_1 – 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 2x_5= 1$<br>$2x_1 –2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1$<br>$x_1 – x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2$<br>$x_1 – x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5= 0$ |

***ЗАНЯТИЕ № 15.* Решение систем линейных уравнений методом Гаусса (однородные системы)**

Найти фундаментальную систему решений для системы однородных линейных уравнений

| | |
|---|---|
| а) $3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0$<br>$4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0$<br>$9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$ | б) $x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$<br>$6x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0$<br>$5x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0$<br>$7x_1 + 8x_2 + x_4 = 0$ |
| в) $2x_1 - 12x_2 - 5x_3 - 8x_4 - x_5 = 0$<br>$9x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$<br>$10x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 15x_5 = 0$<br>$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0$ | г) $5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$<br>$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0$<br>$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$<br>$8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0$ |

***ЗАНЯТИЕ № 16.* Координаты векторов в различных базисах**

Найдите координаты вектора а) $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 3)$ в базисе $\mathbf{b_1} = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b_2} = (1, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b_3} = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b_4} = (1, 0, 0, 0)$.

б) a= (5, 7) в базисе b = (1, 1); c = (2, 5).

в) x (1, - 1, 2, 3) в базисе $a_1$ (1, 1, 1, -2); $a_2$ (1, 2, 3, -3), $a_3$(1, -2, 1, 0), $a_4$ (1, 1, 0, 1)

г) b = (1, 5, 1) в базисе $a_1 = (0, 0, 1)$; $a_2 =(0, 1, 1)$; $a_3 = (1, 1, 1)$.

***ЗАНЯТИЕ №17.* Евклидовы пространства**

1. Пусть вектор $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Выяснить, можно ли скалярное произведение задать следующим способом:
а) $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$
б) $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$
в) $(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$
г) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$
д) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$
е) $(x, y) = |x_1y_1| + |x_2y_2|$
ж) $(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$
Если можно, то вычислить скалярное произведение векторов x(1, 1) и y (-3, 2), нормы каждого из векторов и угол между ними.
2. Найти скалярное произведение векторов x и y, норму каждого из векторов и угол между ними, если скалярное произведение задано стандартным способом.
а) x (1, - 1, 2, 3), y (1, 2, 3, -1)
б) x (2, 3, 6, -1), y (4, 6, 12, -2)
в) x (1, 2, 3, 4), y (4, 3, 2, 1)
г) x (1, 1, - 1, 1), y (1, 2, -1, -2).
**3.** Построить ортонормированные базисы пространств, натянутых на данные системы векторов:
а) $a_1$ (1, 2, 2, -1); $a_2$ (1, 1, -5, 3); $a_3$ (3, 2, 8, -7);

б) $a_1$ (1, 1, -1, -2); $a_2$ (5, 8, -2, -3); $a_3$ (3, 9, 3, 8);

**Занятие № 18. Отношение делимости.**

1. Выяснить, является ли число простым или составным. Если число составное, то разложить его на простые множители

а) 6643 б) 1769 в) 997 г) 2520

д/з д) 6497 е)1817 ж) 6600 з) 3551

2. Найдите НОД и НОК чисел

   а) $a = 318$ и $b = 477$.

   б) a= 117 и b= 111999

Найти целые $x, y$, такие, что: НОД$(a, b) = ax + by$.

3. С каким наименьшим неотрицательным числом сравнимо число $a$ по модулю 7.

а) $a = 342$; б) $a = –23$?

4. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального n

а) $n^3 – n$ делится на 3.

б) $n^5 – n$ делится на 5

в) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7

г) $2^{2n+1} \cdot 3^{n+3} + 1$ делится на 11

д) $n^7 – n$ делится на 7

е) $3^{2n} + 2^{6n – 5}$ делится на 11

ж) $3^{2n} - 2^n$ делится на 7

5. Выписать все элементы, сравнимые с числом 3 по модулю 5

(д/з) с числом 2 по модулю 6.

6. Доказать свойства:

а) $a \equiv b \pmod m \wedge c \equiv d \pmod m \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod m$;

б) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow ac \equiv bc \pmod m$;

в) $a \equiv b \pmod m \wedge c \equiv d \pmod m \Rightarrow ac \equiv bd \pmod m$.

***ЗАНЯТИЕ №19.* Классы вычетов.**

1. Постройте все классы вычетов по модулю 7 и 6. Найдите сумму, разность, произведение классов [4] и [5] в соответствующем множестве.

2. Выписать три положительных и три отрицательных элемента, сравнимых

а) с числом 3 по модулю 5

б) с числом 2 по модулю 6.

3. Постройте таблицы сложения и умножения для всех классов вычетов по модулю

1. а) 5, б) 6, в) (д/3) 7, г) 2.

4 Перечислите все классы вычетов по модулю 6. К какому классу принадлежит число 153? Укажите не менее трёх положительных и трёх отрицательных элементов для класса, порождённого элементом 4.

Задания для самостоятельного решения:
Докажите, что множество целых чисел, кратных некоторому числу n, является идеалом кольца целых чисел. Постройте все классы вычетов по модулю 7 и 6. Укажите факторкольца. Найдите сумму, разность, произведение классов [4] и [5] в соответствующем множестве.

***ЗАНЯТИЕ 20. Контрольная работа***

**4 семестр**

**ЗАНЯТИЕ №1. Теория делимости в кольце многочленов**

1. Разделить многочлен f(x) на многочлен g(x) с остатком. Выписать соответствующую теорему о делении с остатком.

а) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $g(x) = -x^2 + 2x - 3$

б) $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 2x - 8$, $g(x) = 3x^2 + 3$

в) $f(x) = 2ix^3 + (1+i)x^2 - x$, $g(x) = (1+i)x - (2 - 2i)$

г) $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + 6x^3 - 8x + 11$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$.

2. Доказать свойства делимости многочленов в бесконечных полях:

а) Каждый многочлен делится сам на себя;

б) Если многочлен f(x) делится на многочлен g(x), а g(x) делится на f(x), то эти многочлены ассоциированы (отличаются друг от друга на постоянный множитель);

в) Если f(x) делится на g(x), а g(x) делится на h(x), то многочлен f(x) делится на h(x);

г) Если f(x) и g(x)делятся на h(x), то и их сумма, разность и произведение делятся на h(x);

д) Если один из множителей в произведении делится на f(x), то и всё произведение делится на f(x);

е) каждый многочлен делится на любую константу, отличную от 0.

**ЗАНЯТИЕ №2. Наибольший общий делитель многочленов (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) многочленов**

1. Найти НОД и НОК многочленов f(x) и g(x).

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$, $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

б) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

в) $f(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 2$

г) $f(x) = x^6 + 6x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, $g(x) = x^5 + 6x^4 + 4x^2 + 4x + 6$

2. Найти НОД многочленов f(x) и g(x) и подобрать такие многочлены $\phi(x)$ и $\psi(x)$, чтобы $НОД(f(x), g(x)) = f(x)\,\phi(x) + g(x)\,\psi(x)$:

а) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$;

б) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 12$, $g(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

в) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$, $g(x) = x^3 + x^2 - 10x - 6$

г) $f(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 2$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 6$

д) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

е) $f(x) = x^6 + x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 2$, $g(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 6$

ж) $f(x) = x^3 + 3x + 3$, $g(x) = x^2 - x - 2$

з) $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$

**Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:**

№ 2 (д, е, ж)

**ЗАНЯТИЕ №3. Схема Горнера**

1. Пользуясь схемой Горнера, разделить f(x) на (x – a)

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$, $a = 2$

б) $f(x) = 9x^3 + 8x^2 - 10x$, $a = -3$ (д/з)

в) $f(x) = 4x^3 + x^2$, $a = -1 - i$

2. Пользуясь схемой Горнера, найти значение f(x) в точке a

а) $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 8x + 40$, $a = -3$

б) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $a = 4$(д/з)

в) $f(x) = 3x^4 - x + 300i$, $a = -3 + i$

3. Используя схему Горнера, разделить f(x) на g(x)

а) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $g(x) = -x - 3$

б) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $g(x) = 3x + 3$

в) $f(x) = 2ix^3 + (1+i)x^2 - x$, $g(x) = (1+i)x - (2 - 2i)$ (д/з)

г) $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + 6x^3 - 8x + 11$, $g(x) = 2x + 3$ (д/з)

4. Разложить многочлен f(x) по степеням (x – 2) и найдите значение многочлена и всех его производных при x = 2.

а) $2x^5 - x^3 - 2x^2 - 6x + 10$

б) $4x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ (д/з)

5. Пользуясь схемой Горнера, раскрыть скобки (разложить по степеням x)

а) $(x + 3)^4 - 3(x + 3)^3 + 5(x + 3) - 2$

б) $2(x - 3)^6 + 7(x - 3)^5 + (x - 3)^3 - 5(x - 3)^2 + 4$.

**ЗАНЯТИЕ №4. Теорема Безу**

1. Показать, что если многочлен f(x) с целыми коэффициентами принимает при x равном 1, 2, 3, 4 значения равные некоторому простому числу p, то он не может принимать значение 2p ни при каком целом x.

2. Многочлен f(x) при делении на (x – 1) даёт остаток 1, при делении на (x – 2) даёт остаток 3, при делении на (x – 3) остаток 5 и при делении на (x – 4) остаток 6. Найти остаток от деления f(x) на произведение (x – 1)(x – 2)(x – 3)(x – 4).

3. Найти остаток от деления многочлена $f(x) = 1 + x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ на

а) $x^2 - 1$

б) $x^2 + 1$

в) $x^4 - 1$

4. Найти значение f(x) в точке a

а) $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 8x + 40$, $a = -3$

б) $f(x) = x^4 – 3x^3 + 6x^2 – 10x + 16$, а = (д/з)

в) $f(x) = 3x^4 – x + 300i$, $a = – 3 + i$

5. Докажите, что если k – кратное 3 натуральное число, то $x^k + 1$ делится на $x^2 – x + 1$.

**ЗАНЯТИЕ №5. Приводимые и неприводимые многочлены**

1. Разложить на неприводимые множители над полем комплексных чисел.

а) $x^2 + x + 1$

б) $x^4 + 1$

в) $x^4 + x^2 + 1$

г) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$

д) $x^6 – 27$

е) $x^4 + 8x^3 + 8x – 1$

ж) $2x + 2$.

з) $6x^2 + x + 3$

и) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$

к) $x^6 – 1$

л) $x^2 + 2x + 3$

м) $x^4 – 7$

Интерактивная форма – микрогруппы составляют многочлдены по заданным корням (все корни рациональные, а затем предлагают другим микрогруппам разложить данные многочлены на множители на скорость.

**ЗАНЯТИЕ №6. Отделение неприводимых кратных множителей**

1. Выделить кратные множители многочленов.

$x^6 – 3x^5 + 6x^3 – 3x^2 – 3x +2$,

а) $f(x) = x^5 – 15x^3 – 10x^2 + 60x + 72$,

б) $f(x) = x^5 – 7x^3 – 2x^2 + 12x + 8$, (д/з)

в) $f(x) = x^5 – x^4 + 2x^3 – 2x^2 + x – 1$,

г) $f(x) = x^6 + 6x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, (д/з)

д) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$,

е) $f(x) = x^6 + 4x^5 + 5x^4 – 5x^2 – 4x – 1$,

2. Найдите НОД многочлена и его производной:

а) $f(x) = (x – 1)^3(x + 1)^2(x – 3)$,

б) $g(x) = (x – 1)(x^2 – 1)(x^3 – 1)(x^4 – 1)$.

3. Найдите все значения а при которых многочлен $x^4 – 4x + a$ не имеет кратных корней.

**ЗАНЯТИЕ №7. Решение уравнений третьей степени**

1. Найти все комплексные корни уравнений:

а) $x^3 – 9x^2 + 21x – 5 = 0$

б) $x^3 – x – 6 = 0$

в) $x^3 – 3x^2 + 3 = 0$ (д/з)

г) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ (д/з)

**ЗАНЯТИЕ №8. Решение уравнений четвёртой степени**

Найти все комплексные корни уравнений:

а) $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$

б) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$

в) $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$

г) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ (дополнительно)

д) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$ (д/з)

е) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 7 = 0$ (д/з)

ж) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$ (д/з)

**ЗАНЯТИЕ №9. Теорема Виета, многочлены над полем действительных чисел**

1. Составить нормированный многочлен наименьшей степени над полем комплексных чисел, имеющий корни:

а) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = 2$

б) $x_1 = i$, $x_{2,3} = 1$.

в) $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4,5} = -1$ (д/з)

г) $x_{1,2} = i$, $x_{3,4} = -i$. (д/з)

д) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

е) $x_{1,2} = i$, $x_{3,4} = 1 + i$.

2. Найдите соотношения коэффициентов нормированного кубического многочлена, при котором один корень равен сумме двух других.

3. Не решая квадратного уравнения, составьте новое уравнение, корнями которого были бы величины, обратные квадратам корней данного уравнения:

а) $2x^2 - x + 1$;

б) $x^2 + x + 6$.

4. Найдите все многочлены вида $x^2 + px + q$, для которых коэффициенты p, q являются корнями.

5. Найдите все значения а при которых многочлены $x^2 - ax + 2$ и $x^2 + ax + 2$ имеют общий корень.

6. Выяснить какие из многочленов неприводимы над полем действительных чисел. приводимые разложить на неприводимые множители

| | |
|---|---|
| а) $x^3 + x^2 - 2$ | ж) $x^3 + 9x^2 + 9x + 8$ |
| б) $x^4 + 1$ | з) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ |
| в) $x^4 + x^2 + 1$ | и) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$ |
| г) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$ | к) $x^6 - 1$ |
| д) $x^6 - 27$ | л) $x^2 + 2x + 3$ |

е) $x^4 + 8x^3 + 8x - 1$ м) $x^4 - 7$

7. Найти нормированный многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий:

а) простой корень 2+i и двукратный корень 1.

б) простой корень – 3 и двукратный корень 1 – i.

**ЗАНЯТИЕ №10. Многочлены над полем рациональных чисел**

1. Найдите рациональные корни многочлена:

а) $x^3 - 11x^2 + 38x - 40$

б) $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 2$

в) $15x^5 - 8x^4 + 46x^3 + 21x^2 - 21x + 3$

г) $x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 23x^2 - 30x - 8$ (д/з)

д) $6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ (д/з)

е) $3x^5 + 17x^4 + 36x^3 + 38x^2 + 19x + 5$

2. Выяснить, являются ли данные многочлены приводимыми над полем рациональных чисел. Если да, то разложить многочлены на множители над этим полем

а) $3x^2 - 2x - 1$

б) $2x^2 - 3x + 4$

в) $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$

г) $2x^3 + 12x^2 + 17x - 2$

д) $2x^8 + 14x^3 - 35x^2 - 56x + 63$

**ЗАНЯТИЕ №11. Расширения полей**

1. Найдите минимальный многочлен для числа над полем рациональных чисел:

а) 1 г) i

б) $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ д) $1 - 2\sqrt[3]{4}$

в) $-1 + i\sqrt{3}$

2. Освободитесь от $\alpha$ в знаменателе дроби, где $\alpha$ – корень указанного уравнения:

а) $\dfrac{\alpha}{\alpha^3 + 1}$, $\alpha^3 - 2\alpha + 2 = 0$

б) $\dfrac{1}{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 2}$, $\alpha^4 + \alpha^3 - 4\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$

в) $\dfrac{\alpha^2}{\alpha^4 + 1}$, $\alpha^4 + 2\alpha + 2 = 0$

г) $\dfrac{\alpha^2 - 3\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$, $\alpha^3 + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$.

3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$ б) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt[4]{7}+\sqrt{7}-1}$

4. Доказать, что задачи о трисекции куба и об утроении угла неразрешимы с помощью циркуля и линейки.

**ЗАНЯТИЕ №12. Многочлены от нескольких переменных. Симметрические многочлены**

1. Расположите члены следующих многочленов в лексикографическом порядке.

а) $x_1 + x_2 + x_3$

б) $3x_1^2 + 3x_2^2 + x_2$

в) $x_1 x_2 + x_2x_{13}$

г) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3$

2. Какие из многочленов являются симметрическими? Укажите их старшие члены.

а) $(x_1 - x_2) (x_1 - x_3) (x_2 - x_3)$

б) $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$

в) $(x_1 - x_2 - x_3) (x_2 - x_1 - x_3) (x_3 - x_1 - x_2)$

г) $(x_2^3 + x_1^2x_3 - x_3^3) (x_1^2 - x_1^2x_2x_3) (x_1^3x_2^2 - x_1^4 + x_2^2)$

3. Среди перечисленных одночленов укажите те, которые могут быть старшими членами симметрических многочленов:

а) $x_1^5 x_2^3x_3^5$; б) $x_2^5 x_3^4x_4^3$ в) $x_1^5 x_2^5x_3^5$; г) $x_1^4 x_2^4x_3$; д) $x_2^5 x_3x_1^4$; д) $x_2^4 x_3x_1^5$;

4. Выразите следующие многочлены через основные (элементарные) симметрические многочлены:

а) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$

б) $(2x_1 - x_2 - x_3) (2x_2 - x_1 - x_3) (2x_3 - x_1 - x_2)$

в) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ (д/з)

г) $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$ (д/з)

5. Вычислить значения симметрического многочлена f(x) от всех комплексных корней многочлена $\phi(x)$

а) $f(x_1, x_2, x_3) = S (x_1^3 x_2)$, $\phi(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4$

б) Найдите сумму кубов комплексных корней многочлена

$\phi(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

***ЗАНЯТИЕ №13. Контрольная работа***

***ЗАНЯТИЕ №* 14 Линейные операторы и их матрицы**

Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу:

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$

в) $A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$

г) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2, 1)$

д) $A(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 2x_3, 8x_1 + x_2 - 4x_3, 12x_1 – 5x_3)$

**Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:**

Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу:

е) $A(x_1, x_2, x_3) = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 – 2x_2 - x_3, 0)$ (д/з)

ж) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$ (д/з)

и) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$ (д/з)

л) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 4x_3, x_1^2)$ (д/з)

м) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$ (д/з)

***ЗАНЯТИЕ №*15. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов**

Найдите собственные векторы, собственные значения и собственные подпространства операторов. Укажите алгебраические и геометрические кратности соответствующих собственных значений. Выясните, какие из операторов можно привести к диагональному виду, а какие нет. В случае, если это возможно, осуществить переход к диагональному виду, найти соответствующий базис и матрицу перехода к данному базису. Выполнить проверку.

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$

в) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$ (д/з)

г) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$ (д/з)

д) $A(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 2x_3, 8x_1 + x_2 - 4x_3, 12x_1 – 5x_3)$

е) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$.

## 7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

### Основная литература


1. Веселова, Л. В. Алгебра и теория чисел: учебное пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов; Казанский национальный исследовательский технологический университет. – Казань : Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2014. – 107 с.: ил. – Режим доступа. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428287 )

2. Алгебраические структуры и их приложения: учебное пособие / Л. В. Зяблицева, С. Ю. Корабельщикова, И. В. Кузнецова, С. А. Тихомиров; – Архангельск: Северный (Арктический) федеральный университет (САФУ), 2015. – 169 с. – Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436142

3. Смолин Ю. Н. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие / Ю. Н. Смолин. — М. : ФЛИНТА : Наука, 2017. — 464 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=1034573

**Дополнительная литература**

1. Иванова С. А. Линейная алгебра : учебное пособие / С. А. Иванова, В. А. Павский ; Кемеровский государственный университет. – 2-е изд. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2019. – 125 с. : ил., табл. – Режим доступа:: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573547

Линейная алгебра. Линейные операторы. Квадратичные формы. Комплексные числа: Учебное пособие / Рубашкина Е.В. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 38 с. (URL: https://znanium.com/catalog/product/544419). https://znanium.com/read?id=17915

***Интернет-ресурсы***

- ЭБС ZNANIUM.COM http://znanium.com
- ЭБС «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru
- Электронная библиотека http://lib.mexmat.ru/books/75829 (свободный доступ)
- Электронная библиотека http://www.razym.ru (свободный доступ)
- http://nsportal.ru/sites/default/files/2012/12/10/tvorcheskiy_proekt_po_matematike_na_temu.docx.

http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал

Лист согласования рабочей программы
учебной дисциплины (практики)

---

**Направление подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование**
**Профиль: Математика. Экономика**
**Рабочая программа Алгебра**
**Составитель: Н.В. Глухова – Ульяновск: УлГПУ, 2023.**

Программа составлена с учетом федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль подготовки «Математика. Экономика» утверждённого Министерством образования и науки Российской Федерации, и в соответствии с учебным планом.

Составители ____________________Н.В. Глухова (подпись)

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) одобрена на заседании кафедры высшей математики «23» мая 2023г., протокол № 10
Заведующий кафедрой
______________________________ И.В. Столярова 23.05.23
личная подпись расшифровка подписи дата

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) согласована с библиотекой
Сотрудник библиотеки
______________________________ Ю.Б. Марсакова 19.05.23
личная подпись расшифровка подписи дата

Программа рассмотрена и одобрена на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования «26» мая 2023г., протокол № 5
Председатель ученого совета факультета физико-математического и технологического образования
______________________________ Е.М. Громова 26.05.23
личная подпись расшифровка подписи дата