Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра методик математического и
информационно-технологического образования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической
работе
_____ И.О. Петрищев
«_30_» _августа_ 2017 г.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Программа учебной дисциплины вариативной части

для направления подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
(шифр и наименование)
направленность (профиль) образовательной программы
Физика. Математика
(очная форма обучения)

Составитель: Кузина Н.Г.,
кандидат педагогических
наук, доцент кафедры методик
математического и
информационно-технологического
образования

Рассмотрено и утверждено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «_04_» _июля_ 2017 г. № 11

Ульяновск, 2017

1. Название дисциплины

Дисциплина «Элементарная математика» включена в вариативную часть Блока 1 Дисциплины (модули) основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.04.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Физика. Математика», очной формы обучения.

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Цель дисциплины - систематизировать, обобщить систему знаний по школьному курсу математики, а также пополнить эти знания новыми фактами. Изучение данного курса должно способствовать подготовке квалифицированного учителя математики, владеющего основными методами решения различных типов математических задач, знающего теоретические основы курса школьной математики.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

Этап формирования / Компетенции	теоретический	модельный	практический
	знает	умеет	владеет
способностью использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета (ПК-4);	ОР-1 - понятие педагогическое сопровождение, принципы и механизмы социализации, понятие профессиональное самоопределение обучающихся. (базовый уровень) ОР-4 основные формы, этапы, ведущие функции педагогического сопровождения (продвинутый уровень)	ОР-2 - определить особенности обучающихся, принципы педагогического сопровождения социализации и профессионального самоопределения обучающихся. (базовый уровень) ОР-5 - выявлять характерные особенности обучающихся (продвинутый уровень)	ОР-3 незначительным количеством направлений педагогического сопровождения социализации и профессионального самоопределения обучающихся (базовый уровень) ОР-6 двумя и более методами определения особенностей обучающихся, разнообразными формами педагогического сопровождения социализации и профессионального самоопределения обучающихся (продвинутый уровень)

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы:

Дисциплина «Элементарная математика» является обязательной дисциплиной вариативной части Блока 1 Дисциплины (модули) основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.04.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Физика. Математика», очной формы обучения. (Б.1.В.ОД.5 Элементарная математика).

Изучение дисциплины опирается на теоретические и знания, полученные в рамках общих математических курсов, дает возможность существенно расширить умения и навыки для успешной профессиональной работы в области преподавания математики. Курс «Элементарная математика» предлагается студентам бакалавриата в 4,5,6 семестрах, для повторения, обобщения, систематизации и углубления курса школьной математики. Курс предполагает обучение студентов решению наиболее типичных задач школьного курса математики. Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках модулей «Алгебра», «Геометрия». Результаты изучения дисциплины являются теоретической и методологической основой для изучения дисциплин по выбору, для прохождения практик и итоговой аттестации.

Знания и умения, полученные при изучении данного курса, применяются студентами при прохождении педагогической практики по математике в 8 и 9 семестрах.

4.Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Номер семестра	Учебные занятия							В том числе объем учебной работы с применением интерактивных форм	Форма итоговой аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Самостоятельная работа, час	Контрольные работы (кол-во)	Часы на экзамен		
	Трудоемк.								
	Зач. ед.	Часы							
4	2	72	12	20	40	1	-	7	Зачет
5	2	72	12	20	40	1	-	7	Зачет
6	3	108	18	30	33	2	27	10	Экзамен
Итого	7	252	42	70	113	4	27	24	

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

5.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения				
	Лекц. занятия	Лаб. занятия	Практ. занятия	Самост. работа	Объем уч. раб. с прим. интеракт. форм
4 семестр					
Тождественные преобразования алгебраических выражений Элементарные функции: определения, свойства, графики. Тождественные преобразования рациональных, иррациональных выражений.	2	-	6	10	1
Общая теория уравнений (неравенств) и их систем Теоремы равносильности, общие методы решения уравнений, неравенств, систем. Рациональные уравнения, неравенства и их системы.	4	-	4	10	2
. Модуль. Определение, геометрическая интерпретация, свойства модуля. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля, их системы. Построение графиков функций, аналитические выражения которых содержат модуль.	4	-	4	10	2
Иррациональные уравнения и неравенства. Теоремы равносильности. Основные способы решения иррациональных уравнений, неравенств и их систем.	2	-	6	10	2
Итого по 4семестру	12	-	20	40	7
5 семестр					
Показательные и логарифмические уравнения, неравенства. Определение, свойства логарифмов. Определения, свойства, графики показательной и логарифмической	2	-	2	4	1

функций. Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений. Показательные, логарифмические уравнения, неравенства и их системы.					
Текстовые задачи Классификация задач по способам решения. Задачи на составление уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств.	-	-	4	4	1
Доказательство неравенств Виды неравенств и основные способы доказательства неравенств.	2	-	2	4	1
Последовательности и прогрессии Арифметическая и геометрическая прогрессии: определения, характеристические свойства, формулы п-ого члена, суммы п-первых членов. Задачи на прогрессии Возвратные последовательности.	2	-	2	4	1
Тригонометрия. Преобразование тригонометрических выражений, доказательство тождеств и неравенств. Геометрические интерпретации формул сложения. Тригонометрические тождества и неравенства для углов треугольника.	2	-	4	8	2
Тригонометрические функции: определения, свойства, графики. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы.	2	-	4	8	2
Обратные тригонометрические функции: определения, свойства, графики.	2	-	2	8	2
Итого по 5 семестру	12		20	40	10 (20,8%)
6 семестр					
Планиметрия. Аксиомы абсолютной геометрии и следствия из них. Основные понятия планиметрии. Треугольники: метрические отношения в треугольнике. Площадь треугольника. Теоремы Стюарта, Чевы, Менелая.	4	-	4	5	2
Четырехугольники: метрические отношения в четырехугольниках. Площади плоских фигур. Теорема Птолемея.	2	-	4	5	2
Окружность. Центральные, вписанные углы. Углы между хордами, секущей и касательной к окружности. Вписанные и описанные многоугольники. Вневписанные окружности.	2	-	4	5	2
Стереометрия. Аксиомы стереометрии. Основные понятия стереометрии. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.	2	-	4	5	1

Многогранные углы. Теорема косинусов и теорема синусов для трехгранных углов. Признаки равенства трехгранных углов. Необходимое и достаточное условие существования трехгранного угла.	2	-	2	5	1
Многогранники, их свойства. Сечение выпуклых многогранников. Поверхности и объемы многогранников.	2	-	4	6	1
Тела вращения, их свойства. Поверхности и объемы тел вращения.	2	-	4	2	1
Комбинации геометрических тел.	2	-	4	1	1
Итого по 6 семестру	18	-	30	33	10 (20,8%)

5.2. Краткое описание содержания (разделов) дисциплины

Алгебра.

1. Элементарные функции и тождественные преобразования выражений.

Элементарные функции: определения, свойства, графики. Различные способы определения элементарных функций. Построение графиков сложных функций.

Тождественные преобразования рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических выражений.

Интерактивная форма: Работа в микрогруппах: поиск различных способов решения нестандартных задач (групповое обсуждение)

2. Уравнения и неравенства.

Алгебраические, рациональные, иррациональные уравнения и неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Показательные, логарифмические уравнения и неравенства.

Классические неравенства и неравенства, связанные с ними.

Интерактивная форма: Работа в микрогруппах с интерактивной доской.

Тригонометрия.

Преобразование тригонометрических выражений, доказательство тождеств. Интерпретация формул сложения. Тригонометрические тождества и неравенства для углов треугольника. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы.

Обратные тригонометрические функции: определения, свойства, графики.

Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями, доказательство тождеств. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями.

Интерактивная форма: Дискуссии.

Геометрия.

1. Планиметрия.

Аксиомы абсолютной геометрии и следствие из них. Основные планиметрические понятия. Треугольники. Метрические отношения в треугольнике. Площадь треугольника. Теоремы Стюарта, Чевы, Менелая.

Четырехугольники. Метрические отношения в четырехугольниках. Площади плоских фигур.

Окружность. Центральные, вписанные углы. Углы между хордами, секущимися и касательными.

Вписанные и описанные многоугольники. Теорема Птолемея.

Вневписанные окружности.

Геометрические построения на плоскости.

Интерактивная форма: Подготовка и обсуждение рефератов по данной теме.

2. Стереометрия.

Аксиомы стереометрии. Основные понятия стереометрии.

Взаимное расположение прямых и плоскостей. Параллельность прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.

Перпендикулярность прямых в пространстве. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикулярность плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах. Скрещивающиеся прямые.

Многогранные углы. Теоремы косинусов и синусов для трехгранных углов. Признаки равенства трехгранных углов. Необходимое и достаточные условия существования трехгранных углов.

Многогранники, их свойства. Сечения выпуклых многогранников. Поверхности и объемы многогранников. Принцип Кавальери. Формула Симпсона.

Тела вращения. Поверхности и объемы тел вращения.

Комбинации геометрических тел. Необходимые и достаточные условия «вписуемости» сферы в многогранники, тела вращения. Необходимые и достаточные условия того, что около многогранников и тел вращения можно описать сферу

Интерактивная форма: Групповое обсуждение методов решения основных типов задач на комбинацию геометрических тел; Case-study.

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение всех семестров. Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения самостоятельных (в том числе в составе микрогрупп) и контрольных работ по дисциплине. Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

-подготовки к устным выступлениям по вопросам программы, докладов, презентаций;

-самостоятельного решения домашних заданий и обсуждения результатов в микрогруппе в процессе подготовки к занятиям;

-проектирования фрагментов занятий и фрагментов программ внеурочной деятельности по вопросам, связанным с содержанием дисциплины.

ОС-1 Самостоятельная работа

Пример самостоятельной работы.

Решить уравнения

1) 3 балла

А) $\sqrt{x^2+8} = 2x+1$

Б) $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$

С) $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3 = 0$

Д) $(x^2-4)\sqrt{x+5} = 0$

2) 5 баллов

А) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-2}$

Б) $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{3x+1}$

С) $\sqrt{16 - \sqrt{x+1}} = 4$

Д) $(x+1)\sqrt{x} - 5x + 5 = x + 1$

ОС-2 Зачет в форме теста

Перечень примерных контрольных заданий к зачету

1. Алгебраическое выражение, в котором к переменным применена операция извлечения арифметического корня, называется … выражением.
2. Формула $(a+b)^n = a^n + c_n^1 a^{n-1}b + ... + c_n^k a^{n-k}b^k + ... + b^n$ называется формулой …
3. Если многочлен P (x) делится нацело на двучлен (x-a), то число a называется … многочлена.
4. Многочлен при $P(x) = x^n + a^n$ и всех натуральных n=2m+1 делится нацело на двучлен … Целыми корнями многочлена с целыми коэффициентами могут быть лишь делители … члена многочлена. (1) первого; 2) второго; 3) свободного; 4) старшего; 5) главного).
5. Для любых двух многочленов P(x) и T(x), где T(x)≠0, существует пара многочленов q(x) и r(x) (причем степень r(x) меньше степени T(x)) таких, что …
   (а) P(x) = q(x) · T(x) + r(x); б) P(x) = T(x)· r(x) + q(x); в) P(x) = T(x)+ q(x) + r(x); г) P(x) = q(x) · r(x) + T(x))
6. Суммы коэффициентов членов разложения $(a+в)^n$, находящихся на четных и на нечетных местах, … (а) взаимообратные; б) равные; в) неравные; г) противоположные.)
7. Соответствие между записью выражения и названием его вида:

   $\frac{\sqrt{3}(a^2 - в^2)}{(m-n)+xy} + abc$ а) трансцендентное; б) иррациональное;

   $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{т-1} x + a_т$ в) целое – рациональное;

   $\sqrt{x+y} + x\sqrt{y} + 2$ г) дробно-рациональное;

   $\sin^2 x + \cos x + 10\cos^2 2x$ д) однородное; е) приведенное
8. Дописать формулу $a^3 - в^3 = …$
9. Дописать формулу … = = $a^3 + в^3 + 3ав(a+в)$
10. Значение выражения $x - \frac{1}{x}$ равно 2, тогда значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$ равно …
    1) 6; 2) 2; 3) 0; 4) - 6.
11. Соответствие левой части формулы (при условии ее существования) правой части

    1) $\sqrt[2n]{a^{2k}} = …$ 2) $(\sqrt[2n]{a})^{2k} = …$ 3) $\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}} = …$ 4) $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = …$ а) $\sqrt[2n]{a^{k+2}}$ б) $\sqrt[n]{a^k}$ в) $(\sqrt[n]{|a|})^k$ г) $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}}$ д) $\frac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}}$ е) $\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}$
12. Значение выражения $(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$ равно…
13. Значение выражения $\frac{\sqrt[4]{4-2\sqrt{3}}\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{0,5}}$ равно …
14. Знаменатель дроби $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ после исключении иррациональности равен …

15. Выражение $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ равно…

16. Выражение $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ равно…

17. Выражение $\left(\frac{c^{-1}-c^{-2/3}}{c^{-2/3}-c^{-1/3}}\right)^{-1}$ равно… 1. $\sqrt[3]{c}$; 2. $\sqrt{c}$; 3. $\sqrt{c^3}$; 4. $c^{-1/2}$

18. Последовательность чисел, расположенных в порядке возрастания: 1) $2\sqrt{3}$ 2) 0 3) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 4) 1-$\sqrt{3}$ 5) 2

19. Уравнение $\sqrt{x}=в$ на множестве M= [0;∞) не имеет решения если …

20. Область определения функции $f(x)=\sqrt{8-\frac{x^2}{2}}$ …

21. Уравнения f(x)=g(x) и $f(x)^{2n}=g(x)^{2n}$ при f(x)≥0 и g(x)≥0 …

22. Наименьшее целое значение функции $f(x)=\sqrt{9-6x+x^2}$ равно …

23. Количество действительных корней уравнения $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=0$
(Варианты ответов: 1. Один действительный корень. 2. Нет корней.
3. Два действительных корня. 4. Четыре действительных корня.)

24. Корни уравнения $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$ принадлежат промежутку…
(Варианты ответов: 1. (-5;5) ; 2. (-5;0); 3. (0;5); 4. (–4;0).)

25. Корни уравнения $\sqrt{x^2-2x+10}+\sqrt[6]{x^2-2x+2}=4-9(x-1)^2$ принадлежат промежутку… (Варианты ответов: 1. (1; 3); 2. (0;1); 3. [-1;1]; 4. (-1; 0).)

26. Дописать формулу $\sqrt[2n]{a^{2k}}=$

27. Дописать формулу $\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}=$

28. Соответствие функции $y=\sqrt{(x-2)(x+4)}$ и области ее определения.
(Варианты ответов: 1) (-4;2); 2) (-∞;-4)∪(2; ∞); 3) (-∞;-4)∪[2; ∞); 4) [2; ∞);
5) (-∞;-4]∪[2; ∞); 6) (-∞;-4]∪ (2; ∞).)

29. Соответствие функции $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+4}}$ и области ее определения.
(Варианты ответов: 1) [2; ∞); 2) (-∞;-4]∪ (2; ∞); 3) (-∞;-4)∪[2; ∞); 4) (-4;2);
5) (-∞;-4]∪[2; ∞); 6) (-∞;-4)∪(2; ∞).)

30. Соответствие равенства множеству, на котором оно справедливо.

1) $\lvert x+5\rvert=-x-5$	а) [-5;∞)
2) $\lvert x-5\rvert=5-x$	б) [5;∞)
3) $\lvert x+5\rvert=5+x$	в) (-∞;-5]
4) $\lvert x-5\rvert=x-5$	г) (-∞;5] д)(-∞;-5]∪[5;∞) е) [-5;5]

31. Корни уравнения $\lvert x+4\rvert+\lvert 1-x\rvert+x^2=0$ …

32. Корни уравнения $\lvert x^2-1\rvert+\lvert 1-x\rvert=0$ …

33. Корни уравнения $\lvert x+5\rvert+x^2+2=-1$ …

34. Корни уравнения $\lvert x+5\rvert-2=-1$ …

35. Между выражениями $|a|$ и a стоит знак …

36. Между выражениями $|a|^2$ и a^2 стоит знак …

37. Между выражениями $|a+в|$ и $|a|+|в|$ стоит знак

38. Между выражениями $|ав|$ и $|a|\cdot|в|$ стоит знак …

39. Между выражениями $|a-в|$ и $|a|-|в|$ стоит знак …

40. Функция $f(x)=\frac{3-2x}{4x+1}$ принимает значения меньшие нуля при x из промежутка (промежутков) …

41. Сумма целых решений неравенства $(x^2+1)\sqrt{3-x}(x^2-4)(x^2+4x+4)<0$ равна …

42. Сумма целых решений неравенства $\frac{1}{x+3}-1>0$

43. Решением неравенства $(x-3)^3(x+3)^2(x^2+x+1)(x^2-1)>0$ является n промежутков, где n равно …

44. Решение неравенства $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| р 3$

(Варианты ответов: 1) $(-\infty;1)\cup(2,2;\infty)$ 2) (1; 2,2) 3) $(2,2;\infty)$ 4) $[2,2;\infty)$).

45. Соответствие неравенства его решению:

1. $\frac{x-1}{(x+2)^2}>0$	а) [-2;∞)
2. $\frac{x-1}{(x+2)^2}\geq 0$	б) (-2;1)∪[1;∞)
3. $\frac{x-1}{(x+2)^2}<0$	в) (-∞;-2]∪(-2;1)
4. $\frac{x-1}{(x+2)^2}\leq 0$	г) [1;∞) д) (1;∞) е) (-∞;-2)∪(-2;1]

46. Соответствие неравенства и его наименьшего целого решения:

1. (x-1)(x+4)≤ 0	а) -2
2. $(x-1)x^2(x^2+2)\geq 0$	б) -1
3. (x+2)(x-2)<0	в) 0
4. $(x+2)(x^2-2)\geq 0$	г) -4 д) е) 1

47. Вычислить: $\log_2 360$, если $\log_3 20=a, \log_3 15=b$

48. Доказать: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{!}{c}\right)\geq 9$, приa f 0, b f 0, c f 0.

49. Равносильны ли уравнения:

$x^2-1=\sqrt{x}$ и $x^2-1+\sqrt{1-x}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

50. Записать без знака модуля: | | x-3 | - x |

51. Решить уравнения:

а) $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=5\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right)$; б) $(x-5)^2|\cos x|=\cos x$

в) $\log_2(2^x-7)=3-x$

52. Решить неравенства:

а) $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{x^2 - 4x}$ f $x - 3$; в) $\left|\frac{2x+3}{3x-2}\right| \leq 2$

53. Построить графики функций: а) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; б) $y = \lg x^2$

54. Найти область определения функции: $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{3x+6}{x^2+2}}$

ОС-3 Защита рефератов

Примерная тематика рефератов

1. Принцип Дирихле и его применение при решении задач.
2. Элементы теории графов в задачах.
3. Метод математической индукции и его применение.
4. Геометрические задачи на максимум и минимум.
5. Прогрессии.
6. Комбинаторные задачи в геометрии.
7. Геометрические неравенства.
8. Математические фокусы в задачах.
9. Задачи математических олимпиад.
10. Построение графиков сложных функций.
11. Пифагоровы тройки и треугольные числа.
12. Функциональные уравнения.

ОС-4Контрольная работа

Вариант – 1.

1. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна в, и служит для одной, из них, стороной правильного вписанного треугольника, а для другой стороной вписанного квадрата. Найти расстояние между центрами окружностей.

2. ABCD – трапеция. Причем BD = a, AD = c. Найти длину стороны CD, если BC=AC=DC.

3. Одно из оснований трапеции равно 7 см. Вписанная в трапецию окружность делит одну из боковых сторон на отрезки 4 и 9 см. Найти площадь трапеции.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены отрезки AC и AD, каждый из которых являясь хордой одной окружности, касается другой окружности. Доказать, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

5*. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H.

А) Докажите, что угол BHA_1 равен углу ACB.

Б) Известно, что BH = 17, угол ABC равен 45º. Найдите AC.

Вариант – 2.

1. Вершины четырехугольника ABCD делят длину описанной около него окружности в отношении AB:BC:CD:CA = 2:17:4:3. Найдите площадь четырехугольника, если AC = 8см, BD =9 см.

2. В прямоугольный треугольник с углом 60º вписана окружность, радиус которой равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь этого треугольника.

3. На отрезке и двух его половинках построены полуокружности (в одной полуплоскости). Длина отрезка равна a, найти площадь круга касающегося всех трех полуокружностей.

4. Трапеция вписана в окружность. Ее основания равны 6 дм и 8 дм, а высота 1 дм. Найдите радиус этой окружности, если известно, что основания трапеции находятся по одну сторону от центра.
5*. В остроугольном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H.
А) Докажите, что угол BHC_1 равен углу BAC.
Б) Известно, что BC = 25, угол BAC равен 60^o. Найдите AH.

ОС-5 Зачет с устным опросом

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Тригонометрические тождества. Интерпретация формул сложения.
2. Тригонометрические тождества и неравенства для углов треугольника.
3. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы.
4. Обратные тригонометрические функции: определения, свойства, графики.
5. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями,
6. Доказательство тождеств, содержащих аркфункции
7. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями

Перечень учебно-методических изданий кафедры по вопросам организации самостоятельной работы обучающихся

1. Кузина Н.Г. Элементарная математика. Учебно – методическое пособие для студентов педагогических вузов.- Ульяновск: УлГПУ, 2017.

Содержание заданий, составляющих оценочные средства (математические состязания, конференции и иные образовательные события), приведены в разделе 7.

7.Фонд оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы:

Компетенции	Этапы формирования компетенций	знает	умеет	владеет навыками
способностью использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного	1-ый этап	ОР-4 стандартные приемы и традиционные методы решения задач; -начальный уровень	ОР-5 применять стандартные приемы и традиционные методы решения задач различного уровня сложности; -начальный уровень	ОР-6 общими и конкретными приемами решения задач элементарной математики; -начальный уровень

процесса средствами преподаваемого учебного предмета (ПК-4)				
способностью использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета (ПК-4)	2-ой этап	ОР-4 стандартные приемы и традиционные методы решения задач; - продвинутый уровень	ОР- 5 применять стандартные приемы и традиционные методы решения задач различного уровня сложности; - продвинутый уровень	ОР- 6 общими и конкретными приемами решения задач элементарной математики; - продвинутый уровень

7.2.Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания:

№ п/п	РАЗДЕЛЫ (ТЕМЫ) ДИСЦИПЛИ-НЫ	НАИМЕНО-ВАНИЕ СРЕДСТВА, используемо-го для текущего оценивания образователь-ного результата	КОД диагностируемого образовательного результата дисциплины					
			ОР-1	ОР-2	ОР-3	ОР-4	ОР-5	ОР-6
1	Тождественные преобразования рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических выражений.	ОС-1 Самостоятельная работа	+		+			
2	Алгебра. Уравнения. Неравенства.	ОС-2 Зачет в форме теста		+		+	+	
3	Метрические отношения в треугольнике. Площадь треугольника. Теоремы Стюарта, Чевы, Менелая.	ОС-3 Защита рефератов		+				
4	Уравнения и неравенства	ОС-4		+	+			

	с обратными тригонометрическими функциями.	Контрольная работа						
5	Планиметрия. Треугольники. Четырехугольники. Многоугольники. Вписанные и описанные многоугольники.	ОС-5 Зачет с устным опросом	+	+		+	+	+
6.	Промежуточная аттестация	ОС-6 Экзамен в форме устного собеседования в 6 семестре						

Текущая аттестация

ОС-1 Самостоятельная работа

Критерии оценивания

Критерий	Максимальное количество баллов
Работа с информацией	2
Содержание высказывания на основе научного мышления, анализа и синтеза	2
Композиционное построение выступления	2
Самостоятельная оценка ситуации на основе методологических знаний	3
Креативность решения поставленных задач	3
Всего:	12

ОС-2 Зачет в форме теста

Критерии оценивания

Критерий	Максимальное количество баллов
Содержание высказывания на основе научного мышления, анализа и синтеза	2
Обоснованность используемой информации	2
Качество используемых источников	2
Самостоятельная оценка ситуации на основе математических знаний	3
Соответствие содержания ответа заявленной теме	3
Всего:	12

ОС-3 защита рефератов

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Максимальное количество баллов
Содержание реферата	2
Самостоятельная оценка ситуации на основе методологических знаний	2
Оформление источников	4
Практикоориентированность реферата	4
Своевременная сдача реферата	4
Всего:	12

ОС-4 Контрольная работа

Критерии оценивания

Критерий	Максимальное количество балло
Содержание высказывания на основе научного мышления анализа и синтеза	2
Композиционное построение выступления	2
Логическая непротиворечивость формулировок, доказательность выступления	2
Самостоятельная оценка ситуации на основе методологических знаний	3
Обоснованность используемых источников	3
Всего:	12

ОС-5 Зачет с устным опросом

Критерии оценивания

Критерий	Максимальное количество баллов
Содержание высказывания на основе научного мышления, анализа и синтеза	2
Обоснованность используемой информации	2
Качество используемых источников	2
Самостоятельная оценка ситуации на основе методологических знаний	3
Соответствие содержания ответа заявленной теме	3
Всего:	12

ОС -6 Экзамен в форме устного собеседования

При проведении экзамена учитывается уровень знаний обучающегося при ответах на вопросы (теоретический этап формирования компетенций), умение обучающегося отвечать на дополнительные вопросы по применению теоретических знаний на практике и по выполнению обучающемся заданий текущего контроля (модельный этап формирования компетенций).

Критерии и шкала оценивания экзамена

Критерий	Этапы формирования компетенций	Количество баллов
Обучающийся перечисляет основные понятия темы, допускает погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя	Теоретический (знать)	0-30
Обучающийся знает основные понятия темы, дает их определения, усвоил взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии, показывает систематический характер знаний по дисциплине и способен к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.	Теоретический (знать)	31-50
Обучающийся умеет свободно выполнять задания, предусмотренные программой.	Модельный (уметь)	51-64

7.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы:

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ЭКЗАМЕНА

1. Формулы тригонометрии. Интерпретация формул сложения. Тригонометрические функции суммы трех слагаемых.
2. Тригонометрические тождества и неравенства для углов треугольника.
3. Обратные тригонометрические функции.
4. Тождества, содержащие обратные тригонометрические функции.
5. Треугольники, метрические отношения в треугольниках, площадь треугольника.
6. Теоремы Стюарта, Чевы, Менелая.
7. Четырехугольники, метрические отношения в четырехугольниках. Площади четырехугольников.
8. Окружность. Центральные, вписанные углы. Углы между хордами, секущими и касательными.
9. Вписанные и описанные многоугольники. Теорема Птолемея.
10. Вневписанные окружности.
11. Параллельность, перпендикулярность прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей. Скрещивающиеся прямые.
12. Трехгранные углы.
13. Многогранники. Тела вращения.

7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта профессиональной деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Отметка Что оценивается	ОТЛИЧНО	ХОРОШО	УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО	НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО
Содержание ответа. Умение применять теоретические знания к решению задач практики	Полно, с необходимыми ссылками на источники, изложены теоретические основы исследуемой проблемы, описана база исследований (опытной работы). Грамотно и обоснованно используются различные методы исследования. Результаты исследования убедительны, соответствуют поставленным задачам, имеют практическую значимость, профессиональную направленность или методическую ценность.	Полно, с необходимыми ссылками на источники, изложены теоретические основы исследуемой проблемы, достаточно полно описана база исследований (опытной работы). Обоснованно используются различные методы исследования, но круг их ограничен. Недостаточно четко и полно представлены результаты исследований, не отражена профессиональная направленность.	Обоснованно используются различные методы исследования, но круг их ограничен. Недостаточно четко и полно представлены результаты исследования. Теоретические основы исследуемой проблемы изложены недостаточно полно. Ограничен круг использованных методов исследования. Не прослеживается связь результатов исследования с поставленными задачами; результаты сомнительны, не имеют профессиональной направленности или методической ценности. Список источников мал для теоретического обоснования.	Теоретические основы исследуемой проблемы не раскрыты. Выбор методов исследования случаен. Результаты (если они имеются) и задачи исследования не связаны. Список источников мал для теоретического обоснования.
Оформление ответа	Ответ оформлен в полном соответствии с принятыми правилам. Выступление отражает содержание вопроса.	В ответе имеются незначительные отклонения от правил (есть ошибки в оформлении списка литературы, в тексте встречаются стилистические несогласования, имеются пропуски ссылок на источники и т.д.).	В ответе имеются значительные отклонения от правил (нет ссылок на используемые источники, в ответе есть грамматические и стилистические ошибки).	Ответ оформлен небрежно, без соблюдения принятых правил. Нет ссылок на используемые источники. Имеются грамматические и стилистические ошибки.
Итоговые выводы	В выступлении раскрыта логика вопроса, проявлены умения выбирать наиболее значимые теоретические и практические результаты. Привлекаются необходимые наглядные средства. Даются исчерпывающие и убедительные ответы на вопросы.	В выступлении раскрыта логика вопроса, проявлены умения выбирать наиболее значимые теоретические практические результаты. Наглядность используется мало или неэффективно. Ответы на вопросы недостаточно полные.	В выступлении не раскрыта логика вопроса, не отражены наиболее значимые теоретические и практические результаты. Наглядность не используется. Ответы на вопросы неполные и неубедительные.	Выступление обнаруживает непонимание сути вопроса, неумение вычленить основные результаты (если они есть). Ответы на вопросы отсутствуют.

Краткая характеристика процедуры реализации текущего и промежуточного контроля для оценки компетенций обучающихся представлена в таблице.

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика процедуры оценивания компетенций	Представление оценочного средства в фонде
1.	Контрольная работа	Контрольная работа выполняется в письменной форме в течение одного аудиторного занятия и затем проверяется преподавателем.	Текст контрольной
2	Защита реферата	Реферат соответствует теме, выдержана структура реферата, изучено 85-100 % источников, выводы четко сформулированы	Темы рефератов
3	Самостоятельная работа	Выполняется либо во время аудиторного занятия, либо во внеаудиторное время и сдается на ближайшем занятии после получения задания. Оценивается как правильность выполнения самого задания, так и грамотность изложения материала, степень подробности обоснований, владение математической символикой, доступность изложения.	Задания самостоятельных работ представлены в пункте 6
4	Зачет в форме устного собеседования по вопросам	Проводится в заданный срок, согласно графику учебного процесса. При выставлении оценки «зачтено»/«незачтено» учитывается уровень приобретенных компетенций студента. Компонент «знать» оценивается теоретическими вопросами по содержанию дисциплины, компоненты «уметь» и «владеть» - практикоориентированными заданиями.	Комплект примерных вопросов к зачету.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и лабораторных занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение 6 семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

№ п/п	Вид деятельности	Максимальное количество баллов
1.	Посещение лекций	9
2.	Посещение занятий	15
3.	Работа на занятии (в сумме 12 баллов за занятие) – 15 занятий	
	самостоятельная работа	2·15
	работа у доски	5·15
	результат выполнения домашней работы	5·15

4.	Контрольная работа (реферат +планирование)	12+20
5.	экзамен	64
ИТОГО:	3 зачетные единицы	300 баллов

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

Семестр	Баллы	Посещение занятий	Работа на практических занятиях	Контрольное мероприятие	Экзамен
6	Разбалловка по видам работ	1х9 + 1х 15 =24 балла	12 х 15=180 баллов	1 х 32= 32балла	64 балла
Суммарный макс. балл		24 балла	180 баллов	32 балла	64 балла
Суммарно по дисциплине		40 балла	400баллов	64 балла	64 балла

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

По итогам изучения дисциплины «Элементарная математика», трудоёмкость которой составляет 7 ЗЕ 4,5,6 семестры.

Обучающийся набирает определённое количество баллов, которое соответствует отметке согласно следующей таблице (для 6 семестра):

Оценка	3 ЗЕ
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-271
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	0-150

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература

Учебно-ме т одическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература

1. Гусев, Валерий Александрович. Практикум по элементарной математике. Геометрия : учеб. Пособие для студентов физ.-мат. Спец. Пед. Ин-тов и учителей. / В.А. Гусев ; В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. - 2-е изд., перераб. И доп. - М. : Просвещение, 1992. - 351 [1] с. : ил. - ISBN 5-09-003840-6 : 17.00. (Библиотека университета).
2. Литвиненко, Виктор Николаевич. Практикум по элементарной математике : алгебра: тригонометрия [Текст] : [учебное пособие для физико-математических специальностей педагогических институтов и учителей]. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Просвещение, 1991. - 348, [3] с. - 2.32.
3. Шклярский, Д. О.Избранные задачи и теоремы элементарной математики. 1 : Арифметика и алгебра / Д.О. Шклярский; Н.Н. Ченцов; И.М. Яглом. - Москва : Наука, 1976. - 382 с. - (Библиотека математического кружка). URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=446162

4. Шклярский, Давид Оскарович Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия) : Учебное пособие. - 3. - Москва : Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2015. - 256 с. - ISBN 9785922116237. URL: http://znanium.com/go.php?id=854396

Дополнительная литература

5. Зайцев, Владимир Валентинович. Элементарная математика [Текст] : повторит. курс / под ред. В. В. Рыжкова. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Наука, 1974. - 591 с.
6. Быльцов, Сергей Федорович.Занимательная математика для всех / С. Ф. Быльцов. - спб. : Питер, 2005. - 349,[2] с. : ил. - ISBN 5-94723-726-1 : 92.00. (Библиотека университета).
7. Ионова, И. В. Элементарная математика [Текст] : метод. материалы для студентов физико-мат. фак. / Ульян. гос. пед. ун-т им. И.Н. Ульянова. - Ульяновск : УлГПУ, 2010. - 21 с.
8. Кузина, Наталья Георгиевна. Элементарная математика [Текст] : учебное пособие / МОиН РФ, ФГБОУ ВО "УлГПУ им. И. Н. Ульянова". - Ульяновск : ФГБОУ ВО "УлГПУ им. И. Н. Ульянова", 2017. - 37 с. - Список лит.: с. 35-36. - 1.00.
URL: http://els.ulspu.ru/?song_lyric=%d1%8d%d0%bb%d0%b5%d0%bc%d0%b5%d0%bd%d1%82%d0%b0%d1%80%d0%bd%d0%b0%d1%8f-%d0%bc%d0%b0%d1%82%d0%b5%d0%bc%d0%b0%d1%82%d0%b8%d0%ba%d0%b0
9. Харди, Годфри Г. Неравенства / Г. Харди ; Д.Е. Литлвуд, Г. Полиа; пер. С англ. В.И. Левина; с доп. В.И. Левина, С.Б. Стечкина. - 3-е изд. - М. : комкнига : УРСС, 2008. - 456 с. - Список лит.: с. 442-456. - ISBN 5-382-00434-1 : 333.00.(Библиотека университета).
10. Попов, Г. Н. Исторические задачи по элементарной математике/ Г. Н. Попов. - 2-е изд. - М. : Вузовская книга, 2007. - 214,[1] с. : ил. - ISBN 5-9502-0267-8: 244.50.(Библиотека университета)
11. Шарыгин, Игорь Федорович. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И. Ф. Шарыгин ; Р. К. Гордин. - : Астрель ; : АСТ, 2001. - 396,[1] с. : ил. - ISBN 5-271-01560-2 : 74.00. (Библиотека университета).

Шелехова, Л.В. Сюжетные задачи по математике: задачник-практикум : учебно-методическое пособие / Л.В. Шелехова. - Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. - 48 с. : ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-3992-4 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=274521

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Интернет-ресурсы

http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал

Электронные библиотечные системы (ЭБС), с которыми сотрудничает «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»

№	Название ЭБС	№, дата договора	Срок использования	Количество пользователей
1	«ЭБС ZNANIUM.COM»	Договор № 2304 от 19.05.2017	с 31.05.2017 по 31.05.2018	6 000
2	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»	Договор № 1010 от 26.07.2016	с 22.08.2016 по 21.11.2017	6 000

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Порядок расположения тем в курсе лекций и практических занятий не случаен, поскольку каждая последующая тема основана на понимании некоторых сведений из предыдущих тем. Аналогичная зависимость существует и в порядке изложения внутри каждой темы. Именно поэтому темы курса следует изучать строго в той последовательности, в какой они приведены в рабочей учебной программе.

При изучении каждой темы следует

– внимательно прочитать текст лекции (раздела);

– разобрать приведенные в лекции примеры решения задач;

– доказать все утверждения с пометкой «доказать самостоятельно», если это не удаётся обратиться к литературе или к преподавателю на следующем занятии.

– постараться воспроизвести основные определения и формулировки теорем (предложений, свойств), которые встречаются в лекции, в письменной форме, не заглядывая в лекционный материал. Следует помнить, что объём одновременно запоминаемого материала у каждого человека различен, но его можно существенно нарастить путём регулярных тренировок. Поэтому, если не удастся сразу воспроизвести весь требуемый материал, то следует разбить его на доступные части – это может быть одно определение, или даже несколько первых слов в определении, затем воспроизвести выученный отрезок, затем выучить следующий отрезок и воспроизвести его, а затем оба сразу и т.д. На каждом следующем шаге доступный для запоминания отрезок можно удлинять, но в конечном итоге нужно добиться воспроизведения всего материала (не правильно выучить первое определение, а затем более к нему не возвращаться; нужно выучивать каждое следующее определение, а затем повторять все предыдущие). Кроме того важно знать – понимание запоминаемого материала, его логическое осмысление в десятки раз увеличивает скорость запоминания.

– сравнить полученные результаты с лекционным материалом, в случае возникновения расхождений проанализировать их (в чём состоят ошибки, какие примеры могли бы подойти под ошибочное определение, но не подходят под настоящее, какие объекты пришлось бы исключить, если бы было принято ошибочное определение, к каким последствиям могла бы привести неправильно сформулированная теорема и т.п.; особое внимание следует обращать на порядок следования кванторов, слова «необходимо», «достаточно», «тогда и только тогда»), ещё раз (а возможно и несколько раз) правильно воспроизвести определение или теорему, в которых были допущены ошибки.

– решить практические задания (домашнее задание).

Изучение каждой темы завершается выполнением соответствующего задания из контрольной работы.

При последовательном и добросовестном изучении курса, своевременном и самостоятельном выполнении контрольных работ, зачет выставляется автоматически по итогам изучения курса. При изучении разделов дисциплины, предусмотренных для самостоятельного изучения, а также разделов пропущенных по уважительным причинам, вначале нужно ознакомиться с программой дисциплины по данному разделу. Руководствуясь программой, необходимо приступить к последовательному и глубокому

усвоению материала, изложенного в рекомендуемой литературе. При этом следует составлять краткий конспект материала по основным положениям, вынесенным в программу.

Для проверки знаний после изучения каждой темы рекомендуется ответить на вопросы для самопроверки, имея в виду, что они не исчерпывают всего программного материала. После усвоения учебного материала дисциплины выполняется контрольное задание.

Планы практических занятий

Практическое занятие 1: Метод разложения на множители при решении тригонометрических уравнений

При решении тригонометрических уравнений можно пользоваться всеми известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Это вынесение общего множителя за скобки, группировка, применение формул сокращенного умножения.

Метод разложения на множители используют в том случае, если в правой части уравнения стоит 0. При этом справедливо следующее утверждение:

так как произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысл, то, разложив на множители соответствующее уравнение, можно представить его как совокупность нескольких уравнений.

Пример: $2\sin x \cdot \cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$(2\sin x \cdot \cos 2x + 2\cos 2x) - (1 + \sin x) = 0;$$

$$2\cos 2x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0;$$

$$(\sin x + 1)(2\cos 2x - 1) = 0$$

$\sin x + 1 = 0$ или $2\cos 2x - 1 = 0$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\sin x = -1$ $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ или $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Практическое занятие 2: Метод введения новой переменной при решении тригонометрических уравнений

При решении уравнения методом введения новой переменной следует помнить, что $E(\sin) = [-1; 1], E(\cos) = [-1; 1]$.

Пример: $\cos 2x + 4\sin x = 8\cos x$. Воспользуемся формулами: $\cos x =$ ——— ; $\cos x =$ ——— и заменим $\cos 2x = t$. Тогда получим уравнение: $t + 4$ —— =

8 —— , $t + 2t + 4t = 0$, $t(t + 2t + 4) = 0$, $t = 0$ или $t + 2t + 4 = 0$ - нет действительных корней (Д < 0).

Таким образом, данное уравнение свелось к решению простейшего уравнение: $\cos 2x = 0$

$x = - + - n, n \quad Z.$

Ответ: $- + - n, n \quad Z.$

Практическое занятие 3: Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной подстановки

$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ - эти формулы верны для всех $x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

Подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ называется универсальной.

Пример. $3\sin t - 4\cos t = \frac{5}{2}$

Заменим $\sin t$ и $\cos t$ на их выражение через $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ и обозначим $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = b$.

Получаем рациональное уравнение $\frac{6b}{1+b^2} - \frac{4(1-b^2)}{1+b^2} = \frac{5}{2}$, которое преобразуется в квадратное $3b^2 + 12b - 13 = 0$ $b_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}$.

Задача свелась к решению двух уравнений $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}$.

$$t = 2\operatorname{arctg}\frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

.

Значение вида $t = \pi + 2\pi n$ исходному уравнению не удовлетворяет, что проверяется проверкой - подстановкой данного значения t в исходное уравнение.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Практическое занятие 4: Метод введения вспомогательного угла при решении тригонометрических уравнений

Рассмотрим уравнение вида

$a\sin x + b\cos x = c$, где a, b, c - коэффициенты, x - неизвестное.

$a \neq 0, b \neq 0$, $c \neq 0$.

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; Так как $\frac{}{\sqrt{\quad}}$ + $\frac{}{\sqrt{\quad}}$ = 1 и модуль каждого из них не превосходит единицы, а сумма их квадратов равна 1, то существует угол φ такой, то $\frac{}{\sqrt{\quad}}$ = cos φ, $\frac{}{\sqrt{\quad}}$ = sin φ.

Тогда наше уравнение принимает вид: cos φsin x + sin φcos x = $\frac{}{\sqrt{\quad}}$;

Тогда sin(x + φ) = $\frac{}{\sqrt{\quad}}$. Если a + b ≥ c, то уравнение имеет решение:

x = (−1) arcsin $\frac{}{\sqrt{\quad}}$ − φ + πn, n Z, где

$$\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Заметим, что введенные обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

Пример. $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$

Здесь $a=\sqrt{3}; b=-1$, поэтому делим обе части уравнения на $\sqrt{3+1}=2$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin 3x-\sin\frac{\pi}{6}\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$$\sin(3x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6}+3x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$$

$$x=(-1)^k\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z.$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z.$$

Ответ: $(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z.$

Пример: $\cos x+\sin x=\sqrt{2}$

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$:

$$\frac{\cos x}{\sqrt{2}}+\frac{\sin x}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sin x=1$$

т.к. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$, то уравнение можно записать в виде:

$$\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=1,$$ получим $$\cos(x-\frac{\pi}{4})=1$$

$$x-\frac{\pi}{4}=2\pi n,\ n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$

Пример.

$$2\sin 17x+\sqrt{3}\cos 5x+\sin 3x=0$$

$$\sin 17x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin 3x=0$$

Замечание. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }=\sin\ -$ и $-=\cos\ -$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sin 17x+\sin\ \ 5x+-\ =0.$$

$11x+\ -=\ \pi n, n\ \ Z$ или $6x-\ -=\ -+\ \pi k, k\ \ Z$. Воспользуемся формулой: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\ }{\ }\cdot\cos\frac{\ }{\ }$ и $x=\ -\frac{\ }{\ }+\frac{\ }{\ }n, n\ \ Z,\ x=\ \frac{\ }{\ }+-k, k\ \ Z.$

Получим уравнение: $2\sin\ 11x + - \cdot \cos\ 6x - - = 0,$

$\sin\ 11x + - = 0$ или $\cos\ 6x - - = 0.$

Практическое занятие 5: Уравнения, решаемые с помощью условия равенства одноименных тригонометрических функций.

Рассмотрим условие равенства одноименных тригонометрических функций, т.е. условия, которым должны удовлетворять аргументы α и β, если $\sin\alpha = \sin\beta, \cos\alpha = \cos\beta,\ \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta,\ \mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta$.

Теорема 1. Для того, чтобы синусы двух аргументов α и β были равны необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: $\alpha - \beta = 2\pi n$ или $\alpha + \beta = \pi + 2\pi k \cdot R$ и Z.

Доказательство

1) Необходимость.

Пусть $\sin\alpha = \sin\beta$.

Воспользуемся формулой разности синусов: $\sin\alpha - \sin\beta = 0;\ 2\sin\frac{}{} \cdot \cos\frac{}{} = 0, \sin\frac{}{} = 0$ или $\cos\frac{}{} = 0, \alpha - \beta = 2\pi n, n$ Z $\alpha + \beta = \pi + 2\pi k, k$ Z.

2) Достаточность.

Пусть $\alpha - \beta = 2\pi n, n$ Z или $\alpha+\beta= \pi+2\pi k k$ Z.

Выразим из данных равенств α: $\alpha = \beta + 2\pi n, n$ Z $(\alpha = \pi - \beta + 2\pi k, k$ Z).

Тогда $\sin\alpha = \sin(\beta + 2\pi n) = \sin\beta.$

$(\sin\alpha = \sin(\pi - \beta + 2\pi k) = \sin(\pi - \beta) = \sin\beta).$

Теорема 2. $(\cos\alpha=\cos\beta)\Leftrightarrow \alpha + \beta = 2\pi n, n$ Z.

Теорема 3. Пусть $\alpha \neq - + \pi$ и $\beta \neq - + \pi$, k Z.

$(\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\beta)\Leftrightarrow(\alpha - \beta = \pi n, n$ Z)/

Доказательства теорем 2 и 3 аналогичные.

Доказанные теоремы используются при решении тригонометрических уравнений, которые либо представляют собой равенство тригонометрических функций, либо могут быть к такому равенству приведены.

Пример. $\sin 3x = \cos x.$

Воспользуемся формулой приведения теоремой 1:

$$\sin 3x = \sin(- - x);\quad \begin{array}{l} 3x - - - x = 2\pi n, n\ \mathrm{Z} \\ 3x + - - x = \pi + 2\pi k, k\ \mathrm{Z} \end{array}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n\ \mathrm{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\ \mathrm{Z}$$

Ответ: $- + - n; - + \pi k;\ n, k$ Z.

Пример. $\mathrm{tg}3x \cdot \mathrm{tg}\ 5x + - = 1.$ Так как $\mathrm{tg}3x \neq 0$, то разделим обе части уравнения на tg3x.

$\mathrm{tg}\ 5x + - = \frac{}{}$; $\mathrm{tg}\ 5x + - = \mathrm{ctg}3x.$

Используя формулу приведения, получим $\mathrm{tg}\ 5x + - = \mathrm{tg}(- - 3x).$ *

По теореме 3 имеем:

$5x + - - - - 3x = \pi n, n$ Z.

$8x = - + \pi n, n$ Z.

x = — + – n, Z.

При каждом значении x из этой совокупности обе части уравнения * имеют смысл.

Ответ: — + – n, n Z.

Практическое занятие 6: Графический метод решения тригонометрических уравнений

Тригонометрические уравнения можно решать как аналитически, так и графически. При решении уравнения графически рассматривают две функции и строят их графики в одной системе координат. Абсциссы точек пересечения графиков функций являются решениями уравнения.

Графический метод может использоваться не только для одиночных уравнений, но и для их систем, а также неравенств. В случае с системами необходимо находить не только абсциссы, но и ординаты (если графики функций f(x) и g(x) пересекаются в точке A (x1, y1), то решением системы будет x=x1, y=y1). При решении неравенств ответом будет совокупность абсцисс, при которых график функции f(x) находится выше или ниже (в зависимости от условия) графика функции g(x).

Пример: 2cos πx=2x-1

Рассмотрим функции: y=2cos πx и y=2x-1

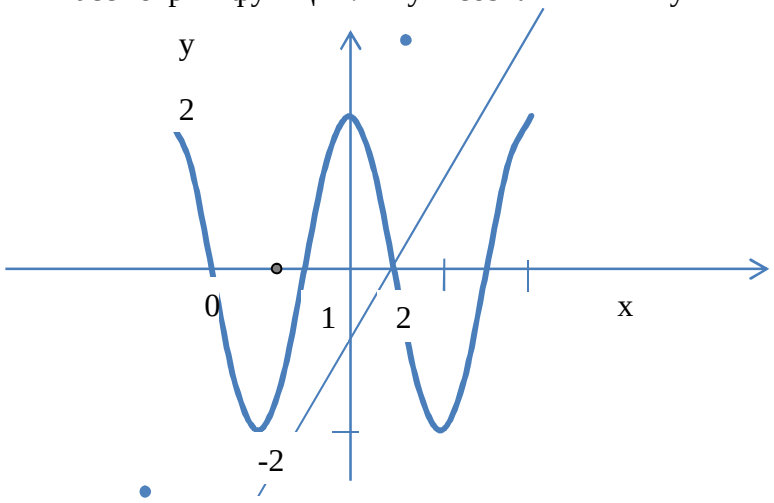

Рис. 33

Точка пересечения графиков имеет координаты (0,5; 0).

Следовательно, x=0,5

Ответ: 0,5

Практическое занятие 7: Функциональный метод решения тригонометрических уравнений

Не всякое уравнение вида f(x)=g(x) в результате преобразований может быть приведено к уравнению того или иного стандартного вида, для которого подходят обычные методы решения. В таких случаях имеет смысл использовать такие свойства функций f(x) и g(x) как монотонность, ограниченность, четность, периодичность и др. Так, если одна из функций возрастает, а другая убывает на определенном промежутке, то уравнение f(x) = g(x) не может иметь более одного корня, который, можно найти подбором. Если функция f(x) ограничена сверху, а функция g(x) – снизу так, что f(x)max=A g(x)min=A, то уравнение f(x)=g(x) равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$.

Также при использовании функционального метода рационально использовать некоторые теоремы, приведенные ниже. Для их доказательства и использования необходимы следующие уравнения общего вида:

f(x)=x (1) $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n\ раз}(x))\ldots)) = x$ (2)

Теорема 1. Корни уравнения (1) являются корнями уравнения (2).

Теорема 2. Если f(x) – возрастающая функция на интервале a<f(x)<b, то на данном интервале уравнения (1) и (2) равносильны. Если f(x) – убывающая функция на интервале a<f(x)<b, n - нечетное, то на данном интервале уравнения (1) и (2) равносильны.

Теорема 3. Если в уравнении f(x)=g(x) при любом допустимом x выполняются условия f(x)≥a, g(x)≤a, где a – некоторое действительное число, то дано уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$.

Следствие 1. Если в уравнении f(x)+g(x)=a+b при любом допустимом x f(x)≤a, g(x)≤b, то данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = b \end{cases}$.

Функциональный метод решения уравнений часто используется в комбинации с графическим, так как оба эти метода основаны на одних свойствах функций. Иногда комбинацию этих методов называют графоаналитическим методом.

Пример: $3+(x-\pi)2=1-2\cos x$

$(x-\pi)2+2=-2\cos x$

$(x-\pi)2+2\geq 2$ $\qquad -2\leq -2\cos x\leq 2$

$\begin{cases} (x-\pi)^2+2=2 \\ -2\cos x=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\pi \\ x=\pi+2\pi k, k\in Z \end{cases}$; $x=\pi$, при $k=0$

Ответ: π.

Практическое занятие 8: Отбор корней при решении тригонометрических уравнений

При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений используют один из следующих способов.

● Арифметический способ:

а) непосредственная подстановка полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения;

б) перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

● Алгебраический способ:

а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;

б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

● Геометрический способ:

а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений;

б) изображение корней на числовой прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.

Пример. Решить уравнение $6\sin 2x+2\sin^2 2x=5$ и указать корни, принадлежащие промежутку $[\pi;2\pi]$.

Приведем уравнение $6\sin 2x+2\sin^2 2x=5$ к квадратному уравнению относительно $\cos 2x$.

$$6\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+2(1-\cos^2 2x)=5;0,2\cos^2 2x+3\cos 2x-5=0.$$

Откуда $\cos 2x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$

Здесь применим способ отбора в промежуток при помощи двойного неравенства

$$\pi\leq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\leq 2\pi, \pi-\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}k\leq 2\pi-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\leq\frac{\pi}{2}k\leq\frac{7\pi}{4}, \frac{3}{2}\leq k\leq\frac{7}{2}$$

Так как к принимает только целые значения, то возможно лишь к=2,к=3.

При к=2 получим $x=\frac{5\pi}{4}$, при к=3 получим $x=\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}к, к\in Z; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin^2(x+\frac{3\pi}{4})+\sqrt{3}}{\sqrt{5x-x^2}}=0$$

Преобразовывая числитель, приведем уравнение к более простому виду

$$\frac{2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)+\sqrt{3}}{\sqrt{5x-x^2}}=0\Leftrightarrow\frac{2\sin^2 x-2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)}{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5x-x^2}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sin^2 x-\sqrt{3}(1-\sin 2x)+\sqrt{3}}{\sqrt{5x-x^2}}=0\Leftrightarrow\frac{2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x}{\sqrt{5x-x^2}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)}{\sqrt{5x-x^2}}=0$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0\\5x-x^2>0\end{cases}\\\begin{cases}\sin x+\sqrt{3}\cos x=0\\5x-x^2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=k\pi, к\in Z\\x(x-5)>0\end{cases}\\\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+n\pi, п\in Z\\x(x-5)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=k\pi, к\in Z\\x\in(0;5)\end{cases}\\\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+n\pi, п\in Z\\x\in(0;5)\end{cases}\end{array}\right.$$

Отбор корней на промежутке (0;5) проведем двумя способами. Первый способ -для первой системы совокупности, второй способ – для второй системы совокупности.

$\begin{cases}x=к\pi, к\in Z\\x\in(0;5)\end{cases}$, $0<k\pi<5$, $0<k<\frac{5}{\pi}$.

Так как к – целое число, то к=1. Тогда $x=\pi$ - решение исходного уравнения.

Рассмотрим вторую систему совокупности

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+n\pi, п\in Z\\x\in(0;5)\end{cases}$$

Если n=0, то $x=-\frac{\pi}{3}\notin(0;5)$. При п=-1;-2;… решений не будет.

Если п=1, $x=\frac{2\pi}{3}\in(0;5), x=\frac{2\pi}{3}$ - решение системы и, следовательно, исходного уравнения.

Если п=2, то $x=\frac{5\pi}{3}\notin(0;5)$

При $п\geq 3, п\in N$ решений не будет.

Ответ: $\frac{2\pi}{3};\pi$

Упражнения.

1. sin2x-sin x=0,
2. tg3x=tgx,
3. $\sqrt{3}$ cos x=sin2x cos x,
4. sin 2x=$\sqrt{2}$ sin x,
5. sin x+sin 5x=0,
6. cos2x-sin2x=1,
7. (1-cos 6x) cos 2x=sin23x,
8. 1+sin 2xcos x=sin 2x+cos x,
9. sin22x+sin24x=1,
10. 4sin3x+3$\sqrt{3}$ cos($\frac{5\pi}{2}$ - 2x)=10sin(5π-x)
11. 3cos2x-5sin2x-sin2x=0,
12. sin x-cos x=0,
13. 5sin x+6cos x=0,

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Образовательный процесс обеспечивается достаточной информационно-библиографической базой, современными техническими средствами, информационными и коммуникационными технологиями.

В процессе проведения учебных занятий могут быть использованы мультимедийные технологии, аудиоаппаратура, видеоаппаратура.

Для подготовки к учебным занятиям используются университетский библиотечный фонд, кафедральная библиотека, современные информационные и коммуникационные технологии (Интернет), при необходимости аудио- и видеотека, видеокамера, фотоаппаратура, компьютерная и копировальная техника.

Лицензионные программы

* Архиватор 7-Zip, открытое программное обеспечение, бесплатная лицензия, пролонгировано.
* Антивирус ESET Endpoint Antivirus for Windows, лицензия EAV-0120085134, контракт №1110 от 15.12.2014 г., действующая лицензия.
* Операционная система WindowsPro 7 RUS Upgrd OLP NL Acdmc, Open License: 47357816, договор №17-10-оаэ ГК от 29.10.2010 г., действующая лицензия.
* Офисный пакет программ Microsoft Office Standard 2010 OLP NL Academic, OpenLicense: 60696830, договор №200712-1Ф от 20.07.2012 г., действующая лицензия.
* Программа для просмотра файлов формата Dj Vu Win Dj View, открытое программное обеспечение, бесплатная лицензия, пролонгировано.
* Программа для просмотра файлов формата PDF Adobe Reader XI, открытое программное обеспечение, бесплатная лицензия, пролонгировано.
* Браузер Google Chrome, открытое программное обеспечение, бесплатная лицензия, пролонгировано.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Образовательный процесс обеспечивается достаточным аудиторным фондом, оснащенным необходимым учебным оборудованием.

Для проведения лекционных занятий могут быть использованы лекционные аудитории; специализированные лекционные аудитории (оснащенные аудиовизуальными и мультимедийными средствами). Для проведения практических занятий, а также промежуточного и итогового тестирования используются малые аудитории, специализированные малые аудитории (кабинет музейного проектирования, технически оснащенные аудитории), компьютерные классы.

Для проведения аудиторных занятий:

Наименование специализированных аудиторий и лабораторий	Перечень оборудования
Ауд. № 402 Лекционная аудитория»	Столы ученические двухместные - 24 шт.; *Стол преподавателя – 1 шт.; *Стулья ученические – 48 шт.; *Доска магнитно- меловая (зеленая) – 1шт.; *Экран любительский - 1 шт. (9122144); *Шкаф книжный – 1 шт.
Ауд. № 320	Стол ученический трёхместный – 9 шт,

Аудитория для практических занятий	стол преподавателя – 1 шт., стул ученический – 32 шт., шкаф закрытый – 6 шт., шкаф-тумба – 1 шт., доска зелёная (металл, 3 секции) (ВА0000003465) – 1 шт., доска зелёная (металл, 1 секция) – 1 шт. Основное оборудование: Проектор Toshiba TDP-T45 – 1 шт., Ноутбук Asus-F5-R – 1 шт., Газовые законы (L-микро) – 1 шт.,

Для самостоятельной работы студентов: компьютерные классы (с выходом в Интернет), библиотека (с выходом в Интернет).