Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«25» июня 2021 г.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Программа учебной дисциплины модуля Современные подходы к начальному образованию и обучению информатике

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Начальное образование. Информатика
(очная форма обучения)

Составители: Волкова Н.А., ст. преподаватель кафедры высшей математики
Кувшинова А.Н., ст. преподаватель кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета педагогики и психологии, протокол от «22» июня 2021 г. №6

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дискретная математика» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Начальное образование. Информатика».

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин: Элементы высшей алгебры, Введение в математический анализ, Математическая логика.

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин «Комбинаторика и теория графов», а также ряда дисциплин информационного блока.

Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения данной дисциплины является формирование представлений об основных объектах, моделях и методах дискретной математики, развитие абстрактно-логического мышления.

Задачей освоения дисциплины является овладение студентами основными методами дискретной математики и применение их в будущей профессиональной деятельности.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11 Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования ПК-11.1. Знает основные научные понятия и особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска,	ОР-1 основные научные понятия дисциплины, особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и	ОР-2 самостоятельно и в составе научного коллектива решать конкретные задачи профессиональной деятельности; самостоятельно и под научным руководством осуществлять сбор и обработку информации; способен применять полученные знания для объяснения актуальных проблем и тенденций развития предмета	ОР-3 навыками комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием научной и учебной литературы, информационных баз данных

сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач. ПК-11.3. Владеет базовыми представлениями о принципах организации и осуществления исследований, практическими навыками осуществления исследований; применяет навыки комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием научной и учебной литературы, информационных баз данных.	периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач		
ПК-13. Способен соотносить основные этапы развития предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) с ее актуальными задачами, методами и концептуальными подходами, тенденциями и перспективами ее современного развития. ИПК-13.1. Знает	ОР-4 основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов		ОР-5 приёмами систематизации и периодизации знаний в предметной области; навыками использования систематизированного теоретического и практического знания для постановки и решения задач

основные этапы исторического развития предметной области. ИПК-13.3. Владеет приёмами систематизации и периодизации знаний в предметной области; навыками использования систематизированного теоретического и практического знания для постановки и решения задач предметной области.			предметной области

1. **Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
7	3	108	18	30	-	60	зачет
Итого:	3	108	18	30	-	60	

2. **Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения

	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
7 семестр				
Введение в дискретную математику	2	-		2
Рекуррентные соотношения	6	16		24
Производящие функции	4	6		14
Целочисленные функции	4	4		10
Асимптотика	2	4		10
Всего по дисциплине:	**18**	**30**	**-**	**60**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

1. Введение в дискретную математику

Предмет дискретной математики. Различие между дискретной и непрерывной математикой. История становления и развития дискретной математики. Приложения дискретной математики. Место дискретной математики в школьном математическом образовании.

2. Рекуррентные соотношения

Рекуррентные соотношения. Задачи, приводящие к рекуррентным соотношениям. Способы решения рекуррентных соотношений. Линейные однородные и неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Нелинейные соотношения. Системы рекуррентных соотношений. Числа Фибоначчи. Формула Бине.

3. Производящие функции

Понятие производящей функции числовой последовательности. Операции с производящими функциями. Примеры производящих функций. Применение производящих функций к решению задач дискретной математики.

4. Целочисленные функции

Функции $\lfloor x \rfloor$(«пол»), $\lceil x \rceil$(«потолок»), их применения. Рекуррентности и суммы с «полом» и «потолком». Функция $, \mathrm{mod}$‘: бинарная операция.

5. Асимптотика

Введение в асимптотические методы. Символы $\sim, o, \mathrm{O}$. Основные правила использования этих символов. Асимптотические решения рекуррентных соотношений. Формула суммирования Эйлера.

3. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов,

выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, письменных проверочных работ по дисциплине.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения домашних заданий.

ОС-1. Примерный перечень тем рефератов

1. Нелинейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.
2. Метод производящих функций в решении рекуррентных соотношений.
3. Решение систем рекуррентных соотношений.
4. Рекуррентные соотношения с переменными коэффициентами.
5. Асимптотические решения рекуррентных соотношений.
6. Задачи, приводящие к рекуррентным соотношениям.
7. Рекуррентные соотношения с переменными коэффициентами
8. Целочисленные функции $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$, mod.

ОС-2. Примерные задания для самостоятельной работы.

1. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением.

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1, \quad a_1 = 0,\ a_2 = 1.$$

2. Решить систему: $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + 2b_n, \\ 4b_{n+1} = 40b_n - a_n, \\ a_1 = 4, b_1 = -7. \end{cases}$

ОС-3. Примерные задания для контрольной работы.

1. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением.

$$a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_2 = 16.$$

2. $\{a_n\}$- последовательность Фибоначчи. Доказать:

$$a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2} = a_n \cdot a_{n+1}.$$

3. Найти производящую функцию последовательности:

$$\left\{ \frac{6^{k+2}}{k-3} + \frac{4}{(k+1)!} \right\}, k \geq 4$$

4. Найти асимптотическое поведение последовательности, заданной рекуррентным соотношением при $n\to\infty$:
   $3a_{n+2}+4a_{n+1}+a_n=0$, $a_0=3$, $a_1=4$.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Куренева Т.Н. Дискретная математика. Учебно-методическое пособие для бакалавров педагогических направлений подготовки – Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2017. Том Часть 1.– 25 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

	СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ, используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Защита реферата ОС-2 Самостоятельная работа ОС-3 Контрольная работа	ОР-1 Знать основные научные понятия дисциплины, особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики; ОР-2 Уметь самостоятельно и в составе научного коллектива решать конкретные задачи профессиональной деятельности; самостоятельно и под
	Оценочные средства для промежуточнойаттестации зачет (экзамен) ОС-4 Зачет в форме устного собеседования	

		научным руководством осуществлять сбор и обработку информации; способен применять полученные знания для объяснения актуальных проблем и тенденций развития предмета; ОР-3 Владеть навыками комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием научной и учебной литературы, информационных баз данных; ОР-4 Знать основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов; ОР-5 Владеть приёмами систематизации и периодизации знаний в предметной области; навыками использования систематизированного теоретического и практического знания для постановки и решения задач предметной области

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-4. Примерный перечень вопросов к зачету

1. Предмет дискретной математики. Различие между дискретной и непрерывной математикой. Приложения дискретной математики.
2. Рекуррентные соотношения. Задачи, приводящие к рекуррентным соотношениям.
3. Способы решения рекуррентных соотношений.
4. Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.
5. Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.
6. Системы рекуррентных соотношений.
7. Числа Фибоначчи и их свойства. Формула Бине.
8. Понятие производящей функции числовой последовательности. Операции с производящими функциями. Примеры производящих функций.
9. Применение производящих функций при решении рекуррентных соотношений.
10. Функции $\lfloor x \rfloor$(«пол»), $\lceil x \rceil$(«потолок»), их применения.
11. Рекуррентности и суммы с «полом» и «потолком».
12. ‘ mod‘: бинарная операция.

13. Символы $\sim, o$, O. Основные правила использования этих символов.
14. Асимптотические решения рекуррентных соотношений.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачет
7 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 Баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. Балл	9 баллов max	24 балла Max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося

	Баллы (3 ЗЕ)
«зачтено»	**более 150**
«не зачтено»	**150менее**

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Практическое занятие № 1. *Рекуррентные соотношения. Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.*

Вопросы к занятию:

1. Возвратная последовательность.
2. Линейное однородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами.
3. Характеристический многочлен возвратной последовательности.
4. Теоремы о нахождении общего решения линейного однородного рекуррентного соотношения.

Задачи:

1. Найти общее решение линейных однородных рекуррентных соотношений:

1) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0;$
2) $a_{n+2} + 3a_n = 0;$
3) $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n;$
4) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0;$
5) $a_{n+2} - 2\cos\varphi\, a_{n+1} + a_n = 0;$
6) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0;$
7) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0;$
8) $a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n = 0.$

2. Решить линейные однородные рекуррентные соотношения:

1) $a_{n+2} - 9a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = 0;$
2) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0,\ a_1 = 10,\ a_2 = 16;$
3) $a_{n+2} - 2\cos\varphi\, a_{n+1} + a_n = 0,\ a_1 = \cos\varphi,\ a_2 = 2\cos\varphi;$
4) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0,\ a_1 = 6,\ a_2 = 27;$
5) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0,\ a_1 = 3,\ a_2 = 7, a_3 = 27;$
6) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0,\ a_1 = a,\ a_2 = b, a_3 = c;$
7) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = -3;$
8) $a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_{n+1} + a_n, a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 8;$
9) $a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3;$
10) $a_{n+4} - 4a_{n+2} + 4a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0.$

Практическое занятие № 2-3. *Линейные неоднородные рекуррентные соотношения постоянными коэффициентами.*

Вопросы к занятию:

1. Линейное неоднородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами
2. Теорема о нахождении общего решения линейного неоднородного рекуррентного соотношения.
3. Теорема о нахождении частного решения линейного неоднородного рекуррентного соотношения.

Задача: Решить неоднородные линейные рекуррентные соотношения:

1) $a_{n+1} - a_n = n,\ a_1 = 1;$
2) $a_{n+1} + 2a_n = n + 1,\ a_0 = 1;$
3) $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = n,\ a_1 = 1, a_2 = -2;$
4) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = -4,\ a_0 = 1, a_1 = -7;$
5) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = n^2 - 3n + 1,\ a_1 = 0, a_2 = -1;$
6) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n,\ a_0 = 5, a_1 = 7;$
7) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 2;$

8) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$, $a_0 = 1, a_1 = 2$;

9) $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n + 2^{-n}, a_0 = 1, a_1 = \frac{3}{2}$;

10) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n$, $a_1 = -9$, $a_2 = 45$;

Практическое занятие № 4-5. *Нелинейные рекуррентные соотношения. Приложения теории рекуррентных соотношений.*

Вопросы к занятию:

1. Нелинейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами.
2. Рекуррентное соотношение с переменными коэффициентами.
3. Методы решений рекуррентных соотношений.

Задачи:

1. Решить рекуррентные соотношения:

1) $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 1$; 2) $a_{n+1}^2 = 2a_n$; 3) $a_n a_{n+2}^3 = a_{n+1}^3 a_{n+3}$; 4) $a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$, $a_1 = 1$; 5) $a_n = a_{n-1}a_{n-2}^2$, $a_1 = a_2 = 2$.

2. Вычислить интегралы методом рекуррентных соотношений:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x dx$; 3) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n} x dx$;

5) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 6) $\int_0^1 x^m ln^n x dx$; 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{sinx-cosx}{sinx+cosx})^{2n+1} dx$; 8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n} x dx$;

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n} x dx$.

3. Пусть $x_0 = a, x_1 = b$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ методом рекуррентных соотношений:

1) $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + 2x_{n+1})$; 2) $x_n = (1 - \frac{1}{n})x_{n-1} + \frac{1}{n}x_{n-2}$;

3) $x_{n+1} = (1 - \frac{1}{2n})x_n + \frac{1}{2n}x_{n-1}$.

4. Вычислить определители порядка *n* методом рекуррентных соотношений:

1) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots 1 \\ & & \dots & \\ -1 & -1 & -1 & \dots 0 \end{vmatrix}$; 2) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Практическое занятие № 6. *Системы рекуррентных соотношений..*

Вопросы к занятию:

1. Понятие решения системы рекуррентных соотношений.
2. Методы решений систем рекуррентных

Задачи

Решить системы:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = 2$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = -3a_n \\ -b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \end{cases}, \quad a_1 = -1, \quad b_1 = 2$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n - 3b_n \\ -3b_{n+1} = 2a_n + 6b_n \end{cases}, \quad a_1 = -2, \quad b_1 = 1$$

$$\begin{cases} 2a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ 2b_{n+1} = 2a_n + b_n \end{cases}, \quad a_1 = -1, \quad b_1 = 1$$

$$\begin{cases} 2a_{n+1} = -4a_n - 9b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 3.1b_n \end{cases}, \quad a_1 = 7, \quad b_1 = -10$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n - 20b_n \\ 4b_{n+1} = -6a_n + 3b_n \end{cases}, \quad a_1 = 14, \quad b_1 = -4$$

Практическое занятие № 7. *Задачи, приводящие к рекуррентным соотношениям.*

Вопросы к занятию:

1. Рекуррентное соотношение порядка k.
2. Общее и частное решения рекуррентного соотношения.
3. Рекуррентный метод.

Задачи

1. **Задача Фибоначчи** (1202 г.)

Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

2. **Задача о Ханойской башне** *(головоломку под названием «ханойская башня» придумал французский математик Эдуард Люка в 1883 г.)*

Башня представляет собой восемь дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Требуется определить наименьшее число перекладываний, удовлетворяющих правилу.

3. **Задача о разрезании пиццы (***впервые задача была решена в 1826 г. Швейцарским математиком Яковом Штейнером).*

Сколько кусков пиццы можно получить, делая *n* прямолинейных разрезов ножом? Или: каково максимальное число областей, на которые плоскость делится *n* прямыми?

4. **Задача Иосифа Флавия (***Иосиф Флавий – известный историк первого века***).**

По легенде Иосиф выжил благодаря своей математической одаренности. В составе отряда из 41 иудейского воина он был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины выстроились в круг и решили последовательно убивать каждого третьего, пока в живых не останется ни одного человека. Иосиф, наряду с одним из своих единомышленников посчитал такой конец бессмысленным и вычислил безопасные места в порочном круге для себя и своего товарища. Определить эти номера.

Практическое занятие № 8. *Числа Фибоначчи и их свойства.*

Вопросы к занятию:

1. Последовательность чисел Фибоначчи.
2. Формула Бине.
3. Основные свойства чисел Фибоначчи.

Задачи

1. Доказать следующие свойства чисел Фибоначчи:

1) $(\forall m,n) \quad f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$;

2) $(\forall\, m,n) \;\; m \vdots n \Rightarrow f_m \vdots f_n$;

3) $(\forall n) \;\; HOD(f_n, f_{n+1}) = 1$;

4) любое натуральное число $N > 1$ может быть однозначно представлено в виде суммы чисел Фибоначчи, причем каждое число входит в сумму не более одного раза, и никакие два соседних числа не входят вместе;

5) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

6) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n+1} = f_{2n+2}$;

7) $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;

8) $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots + f_{2n-1} - f_{2n} = 1 - f_{2n-1}$;

9) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;

10) $f_1 f_2 + f_2 f_3 + \ldots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$;

11) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$;

12) $f_{n+1}^2 = f_n f_{n+2} + (-1)^n$;

13) $f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 = f_{3n}$;

14) $f_n^4 - f_{n-2} f_{n-1} f_{n+1} f_{n+2} = 1$.

2. Найти наибольший общий делитель 1000-го и 770-го членов последовательности Фибоначчи.

3. В последовательности Фибоначчи выбрано 8 подряд идущих чисел. Доказать, что их сумма не входит в этот ряд.

Практическое занятие № 9. *Производящие функции.*

Вопросы к занятию:

1. Понятие производящей функции числовой последовательности.
2. Операции с производящими функциями.
3. Примеры производящих функций.

Задачи:

1. Найти производящую функцию последовательности:

   1) $\left\{\frac{10}{k+1} + \frac{3}{2^k}\right\}$ 2) $\left\{\frac{5}{(k+2)!} - 8^{k+3}\right\}$ 3) $\left\{\frac{4^k}{k-3} + 3\right\}, k \geq 4$

2. Найти производящую функцию последовательности:

   1) $a_n = \sin(2n)\cos(3n) + \sin(3n)\cos(2n)$

   2) $a_n = \cos^2(2n) - \sin^2(2n)$

   3) $a_n = \sin(3n)\cos(3n)$

3. Найти общий член a_n последовательности, для которой функция $f_a(x)$ является производящей:

   1) $f_a(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ 2) $f_a(x) = 2^{x^2}$ 3) $f_a(x) = e^{-2x^2}$

4. Найти общий член a_n последовательности, для которой функция $f_a(x)$ является производящей:

   1) $f_a(x) = \sin^2(3x)$ 2) $f_a(x) = \cos^3(3x)$ 3) $f_a(x) = \cos(7x)$

Практическое занятие № 10-11. *Применение производящих функций к решению рекуррентных соотношений.*

Вопросы к занятию:

1. Применение производящих функций к решению рекуррентных соотношений

Задачи:

1. Найти производящую функцию последовательности чисел Фибоначчи.
2. Решить линейные однородные рекуррентные соотношения:
   1) $a_{n+2} - 9a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = 0$;
   2) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, $a_1 = 10$, $a_2 = 16$;
   3) $a_{n+2} - 2\cos\varphi\, a_{n+1} + a_n = 0$, $a_1 = \cos\varphi$, $a_2 = 2\cos\varphi$;
   4) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$, $a_1 = 6$, $a_2 = 27$;
   5) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 27$;
   6) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$;
   7) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -3$;
   8) $a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_{n+1} + a_n, a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 8;$
   9) $a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3;$
   10) $a_{n+4} - 4a_{n+2} + 4a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$.
3. Решить неоднородные линейные рекуррентные соотношения:
   1) $a_{n+1} - a_n = n$, $a_1 = 1$;
   2) $a_{n+1} + 2a_n = n+1$, $a_0 = 1$;
   3) $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = n$, $a_1 = 1, a_2 = -2$;
   4) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = -4$, $a_0 = 1, a_1 = -7$;
   5) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = n^2 - 3n + 1$, $a_1 = 0, a_2 = -1$;
   6) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = (n+1)3^n$, $a_0 = 5, a_1 = 7$;
   7) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n$, $a_0 = 1, a_1 = 2$;
   8) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$, $a_0 = 1, a_1 = 2$;
   9) $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n + 2^{-n}, a_0 = 1, a_1 = \frac{3}{2}.$;
   10) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n$, $a_1 = -9$, $a_2 = 45$.

Практическое занятие № 12. *Функции* $\lfloor x \rfloor$ *(«пол»),* $\lceil x \rceil$ *(«потолок»).*

Вопросы к занятию:

1. Понятие целочисленной функции.
2. Функция $\lfloor x \rfloor$ («пол»).
3. Функция $\lceil x \rceil$ («потолок»).
4. Графики функций «пол» и «потолок».
5. Основные свойства функций «пол» и «потолок».

Задачи:

1. Доказать следующие утверждения:

1). $(\forall x \in R)\ (\forall n \in Z)\quad \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n,\quad \lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

2) $(\forall x \in R)\ (\forall n \in Z)$

а) $\lfloor x \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad n \le x < n+1,$

б) $\lfloor x \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad x-1 < n \le x,$

в) $\lceil x \rceil = n \quad \Leftrightarrow \quad n-1 < x \le n,$

г) $\lceil x \rceil = n \quad \Leftrightarrow \quad x \le n < x+1,$

д) $x < n \quad \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < n,$

е) $n < x \quad \Leftrightarrow \quad n < \lceil x \rceil,$

ж) $x \le n \quad \Leftrightarrow \quad \lceil x \rceil \le n,$

з) $n \le x \quad \Leftrightarrow \quad n \le \lfloor x \rfloor.$

3) $(\forall x \in R,\ x \geq 0)\ \lfloor\sqrt{\lfloor x \rfloor}\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor,\quad \lceil\sqrt{\lceil x \rceil}\rceil = \lceil\sqrt{x}\rceil.$

4) $(\forall x \in R)\ \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ ($\{x\}$- дробная часть x).

Практическое занятие № 13 *Функция* , mod *‘. Защита рефератов (ОС-1).*

Вопросы к занятию:

1. Понятие целочисленной функции.
2. Функция , mod ‘.
3. Свойства функции , mod ‘.

Задачи:

1. Докажите или опровергните:

$$(x \bmod ny) \bmod y = x \bmod y \qquad \text{при целом } n.$$

2. Докажите тождество

$$\sum_{0 \leqslant k < m} \left(\left\lfloor \frac{m+k}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{m^2}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\min(m \bmod n, (-m) \bmod n)^2}{n} \right\rfloor$$

для всех положительных целых чисел m и n.

Практическое занятие № 14. *Асимптотические решения рекуррентных соотношений.*

Вопросы к занятию:

1. Символы $\sim, o, O$.
2. Основные правила использования этих символов.
3. Асимптотические решения рекуррентных соотношений.
4. Формула суммирования Эйлера.

Задачи:

1. Пусть $f_a(t)$- производящая функция последовательности $\{a_n\}$. Найти асимптотическое (при $n \to \infty$) поведение a_n.
   1) $f_a(t)=(12t^3 + 10t^2)(6t^2 + 5t - 6)^{-1}$;
   2) $f_a(t)= (2t^3 - 1.8t - 0.02)(2t^2 + 1)^{-1}(t^2 + 1.4t + 0.49)^{-1}$;
   3) $f_a(t)= (6t^2 + 5t - 6)^{-1}$;
   4) $f_a(t)= (1 - 3t)(8t^3 - 1)^{-1}(t^2 + 1)^{-1}$.
2. Найти асимптотическое (при $n \to \infty$) поведение a_n, заданного рекуррентным соотношением и начальными условиями:
   1) $a_{n+1} = (b - a_n^2)/2$, $a_0 = b/2$, $0 < b < 1$.
   2) $a_{n+1} = (a_n + b/a_n)/2$, $a_0 > 0$, $b > 0$.
   3) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -3$.
   4) $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = n$, $a_1 = 1$, $a_2 = -2$.
3. Доказать:
   1) $(2n - 1)!! \sim \sqrt{2}\,(2n)^n e^{-n}$, где $(2n - 1)!! = 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n - 1)$;
   2) $(n/3)^n < n!$;
   3) $(1 + 1/n)^n < 3$;
   4) $((n+2)/(n+1))^{n+1} > ((n+1)/n)^n$.

Практическое занятие № 15. *Контрольная работа (ОС-4).*

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Баврин, И.И. Дискретная математика : учебник и задачник для прикладного бакалавриата / МПГУ. - Москва: Юрайт, 2015. - 208 с.
2. Дискретная математика : учебное пособие. 1 / И.П. Болодурина; Т.М. Отрыванкина; О.С. Арапова; Т.А. Огурцова. - Оренбург : ОГУ, 2016. - 108 с. Электронный ресурс: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=467106
3. Костюкова, Н.И. Комбинаторные алгоритмы для программистов/ Н.И. Костюкова.- М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016- 217 с. Электронный ресурс: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=429067
4. Шапорев, С. Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий [Текст] : учеб. пособие для вузов. - Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2009. - 396 с.

Дополнительная литература

1. Виленкин, Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.- 329 с. Электронный ресурс: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=449583
2. Ковалева, Л. Ф. Дискретная математика в задачах : учебное пособие / Л.Ф. Ковалева. - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - 142 с. Электронный ресурс: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273
3. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов [Текст] : учеб. пособие для вузов, обуч. по [спец.], "Информатика и вычислительная техника". - Санкт-Петербург : Питер, 2002. - 301 с.
4. Окулов, С.М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике [Текст] : учеб. пособие [для вузов]. - Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 422 с.
5. Палий, И. Б. Дискретная математика. Курс лекций [Текст] : учеб. пособие [для вузов]. - Москва : Эксмо, 2008. - 349 с.

Интернет-ресурсы

- Электронная библиотека http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=231616
- Электронная библиотека http://znanium.com/bookread2.php?book=241722
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru