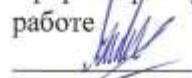


Министерство просвещения Российской Федерации  
Федеральное государственное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ульяновский государственный педагогический университет  
имени И.Н. Ульянова»  
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования  
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебно-методической работе  
 С.Н. Титов  
«25» июни 2021 г

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Программа учебной дисциплины Предметно-методического модуля  
основной профессиональной образовательной программы высшего  
образования – программы бакалавриата по направлению подготовки  
44.03.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы  
Математика  
(заочная форма обучения)

Составители: Сибирева А.Р., к.ф.-м.н,  
доцент, доцент кафедры высшей  
математики  
Фолиадова Е.В., к.ф.-м.н, доцент кафедры  
высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-  
математического и технологического образования, протокол от  
21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

## **Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Математический анализ» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Математика», заочной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках школьного курса «Алгебра и начала математического анализа» или соответствующих дисциплин среднего профессионального образования. Изучение дисциплины взаимосвязано с рядом дисциплин учебного плана: («Алгебра», «Геометрия»), а также иными математическими дисциплинами базовой и вариативной частей программы. Курс математического анализа дополняется и поддерживается дисциплинами по выбору студента (углубленное изучение отдельных тем и вопросов). Курс математического анализа является предшествующим для дисциплин: «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексной переменной», «Теория вероятностей и математическая статистика»; для ряда разделов алгебры (например, теории многочленов) и геометрии (например, дифференциальной геометрии), а также дисциплины по выбору «Избранные вопросы математического анализа».

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: Производственная (педагогическая) Преподавательская, Учебная (технологическая) Предметный практикум решения задач по математике.

### **1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине**

**Цель дисциплины** «Математический анализ» – освоение бакалавром системы базовых понятий, идей и методов классического математического анализа, формирование навыков решения задач, умения оперировать математическим аппаратом, развитие абстрактно-логического мышления, подготовка к преподаванию школьных курсов математики.

**Задачи дисциплины** связаны с формированием общекультурных и профессиональных компетенций и включают формирование логической и алгоритмической культуры, системных знаний по базовым разделам современной математики, представлений о структуре математического знания в целом.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Математический анализ» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-12 - Способен выделять структурные элементы, входящие в систему познания предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения),			

<p>анализировать их в единстве содержания, формы и выполняемых функций.</p> <p><b>ПК-12.1.</b> Знает формулировки определений, содержательное значение терминов и понятий предметной области, правила и алгоритмы оперирования с объектами предметной области, понимает взаимосвязь между структурными элементами; имеет представление о функциях и практическом применении изучаемых объектов.</p> <p><b>ПК-12.2.</b> Умеет выделять и анализировать структурные элементы, входящие в систему познания предметной области; определять логическую взаимосвязь между компонентами предметной области; строить логически верные и обоснованные рассуждения; решать задачи предметной области.</p> <p><b>ПК-12.3.</b> Владеет профессиональной терминологией и основами профессиональной речевой культуры; методами доказательных</p>	<p><b>ОР-1.</b> Основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач</p>	<p><b>ОР-2</b> Решать задачи по дисциплине, проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения</p>	
--	--	---	--

<p>рассуждений; методами анализа изучаемых объектов, методами систематизации и структурирования знаний в предметной области, основами моделирования в предметной области.</p>			
<p>ПК-14. Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями</p> <p>ИПК-14.1. Знает роль и возможности применения аппарата предметной области в смежных научных областях, их методологическое и мировоззренческое значение; имеет представление о междисциплинарных связях, научных методах смежных областей</p> <p>ИПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач.</p>	<p>OP-3. возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях</p>	<p>OP-4. решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине</p>	

## 2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с

**преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Номер семестра	Учебные занятия							Форма итоговой аттестации	
	Всего		Лекции, час	Лабораторные занятия, час	Практические занятия, час	Самостоятельная работа, час			
	Трудоемкость	Зачет. ед.	Часы						
1	3	108	4	-	10	85	экзамен 9		
2	2	72	2	-	6	58	зачет 6		
3	3	108	4	-	10	85	экзамен 9		
4	3	108	4	-	10	85	экзамен 9		
3	3	108	4	-	10	85	экзамен 9		
Итого:	14	504	18	-	46	398	42		

**3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

№ п/п	Наименование разделов и тем (с разбивкой на модули)	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
<b>1-й семестр (3 ЗЕ)</b>					
1.	Введение в математический анализ	2			
	Множество действительных чисел			2	21
	Пределы последовательностей и функций			4	21
	Предел и непрерывность функций			2	21
2.	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Основные понятия	2		2	22
<b>Итого за 1-й семестр</b>		<b>4</b>	<b>-</b>	<b>10</b>	<b>85</b>
<b>2 семестр (2 ЗЕ)</b>					
1.	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Основные теоремы	2		3	29

2.	Приложения производной к вычислению пределов и исследованию функций			3	29
<b>Итого за 2-й семестр</b>		<b>4</b>	<b>-</b>	<b>6</b>	<b>58</b>
<b>3 семестр (3 ЗЕ)</b>					
1.	<i>Интегральное исчисление функций одной переменной</i>				
	Неопределенный интеграл	2		6	29
	Определенный интеграл	2		2	29
	Несобственный интеграл			0	5
	Приложения интегрального исчисления			2	22
<b>Итого за 3-й семестр</b>		<b>4</b>	<b>-</b>	<b>6</b>	<b>58</b>
<b>4 семестр (3 ЗЕ)</b>					
1.	<i>Ряды</i>				
	Числовые ряды	2		4	20
	Функциональные ряды. Степенные ряды.	2		4	19
	Тригонометрические ряды			2	19
<b>Итого за 4-й семестр</b>		<b>4</b>	<b>-</b>	<b>10</b>	<b>58</b>
<b>5-й семестр (3 ЗЕ)</b>					
1.	<i>Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных</i>	2			
	Основные понятия и теоремы			2	12
	Экстремумы функций нескольких переменных			4	12
2.	<i>Интегральное исчисление функций нескольких переменных</i>	2			
	Кратные интегралы			4	12
	Криволинейные и поверхностные интегралы				11
	Векторная теория поля.				11
<b>Итого за 5-й семестр</b>		<b>4</b>	<b>-</b>	<b>10</b>	<b>58</b>
<b>Всего</b>		<b>16</b>		<b>48</b>	<b>476</b>

### 3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

#### 1-й семестр

##### Раздел 1. Введение в анализ.

**Тема 1. Множество действительных чисел.** Свойства совокупности вещественных чисел (упорядоченность, свойства операции сложения, свойства операции умножения, связь операций сложения и умножения, свойство Архимеда, свойство непрерывности). Аксиоматическое определение множества вещественных чисел. Числовые множества:  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ . Недостаточность множества рациональных чисел для решения измерительных задач. Определение вещественного числа как бесконечной десятичной дроби. Модуль действительного числа, его свойства. Расширенная область действительных чисел. Числовые промежутки. Ограниченные и неограниченные множества. Верхняя и нижняя грани множества. Теорема о существовании конечных граней у ограниченного множества. Теорема о единственности верхней/нижней грани множества.

**Интерактивная форма:** Эвристическая беседа «Развитие понятия числа».

**Тема 2. Предел числовой последовательности.** Определение числовой последовательности как функции натурального аргумента. Способы задания последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Определение предела числовой последовательности. Теорема о единственности предела последовательности.

Действия с последовательностями (сложение, вычитание, умножение, деление, умножение на число). Бесконечно малые последовательности и их свойства. Бесконечно большие последовательности. Взаимосвязь бесконечно малых и бесконечно больших

последовательностей. Лемма о представлении последовательности в виде суммы её предела и бесконечно малой последовательности. Свойства пределов последовательностей, связанные с арифметическими операциями над последовательностями. Неопределенные выражения. Теоремы о предельном переходе в равенстве и неравенстве, теорема о сжатой переменной. Свойства последовательностей (монотонность, ограниченность). Ограниченность как необходимое условие существования предела последовательности. Теоремы о пределе монотонных последовательностей. Лемма Бернули. Число  $e$ . Подпоследовательность. Теорема о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности и принцип Больцано-Вейерштрасса. Условие Коши для последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

**Тема 3. Предел и непрерывность функции.** Определение предела функции в точке на языке последовательностей. Односторонние пределы функции в точке на языке последовательностей. Определение предела функции в точке на языке « $\varepsilon - \delta$ ». Односторонние пределы функции в точке на языке « $\varepsilon - \delta$ ». Теорема об эквивалентности определений предела функции в точке на языке последовательностей и на языке « $\varepsilon - \delta$ ». Необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке. Свойства пределов функций (переход к пределу в неравенствах; предел постоянной; предел суммы, произведения, частного). Правило замены переменной для пределов функций (предел сложной функции, предел обратной функции). Предел функции на бесконечности. Условие Коши для функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. Предел монотонных функций. Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций (сумма, разность, произведение бесконечно малых функций; произведение бесконечно малой и ограниченной функций). Бесконечный предел функции в точке. Бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых функций. Сравнение бесконечно больших функций.

Точки непрерывности и точки разрыва функции. Классификация точек разрыва. Односторонняя непрерывность функции. Свойства функций, непрерывных в точке (непрерывность суммы, произведения, частного, композиции непрерывных функций). Непрерывность функции на промежутке. Свойства функций, непрерывных на промежутке. Теоремы Больцано – Коши (об обращении функции в нуль, о промежуточном значении функции непрерывной на отрезке). Теорема о существовании обратной функции для функции, непрерывной на промежутке. Теоремы Вейерштрасса (об ограниченности функции непрерывной на отрезке, о наибольшем и наименьшем значениях функции непрерывной на отрезке). Непрерывность элементарных функций.

## Раздел 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

**Тема 1. Основные понятия и теоремы.** Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной функции. Геометрический и механический смысл производной. Вычисление производных основных элементарных функций (константа, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические). Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Производная неявной функции. Логарифмическая производная. Производная функции, заданной параметрически. Таблица производных элементарных функций.

Формула для приращения функции. Правила вычисления производных. Производная сложной функции. Дифференцируемая функция, и ее дифференциал. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции. Непрерывность как необходимое условие дифференцируемости функции. Геометрический смысл дифференциала. Основные формулы и правила дифференцирования. Инвариантность формы дифференциала. Дифференциал как источник приближенных формул. Производные высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков. Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков.

## **2-й семестр**

**Тема. Приложения производной к вычислению пределов и исследованию функций.** Теорема Ферма. Теоремы о средних значениях: теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коши. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции с дополнительным членом в форме Пеано, в форме Лагранжа. Формула Маклорена для основных элементарных функций.

Правила Лопитала. Условие постоянства функции. Достаточное условие строгой монотонности функции. Критерий нестрогой монотонности функции. Точка экстремума и экстремум функции. Необходимое и достаточные условия экстремума функции. Выпуклость и вогнутость графика функции. Критерии выпуклости и вогнутости кривой. Точка перегиба графика функции. Необходимое условие, достаточные условия точки перегиба кривой. Асимптоты кривой. Общая схема исследования функции и построение ее графика. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке (на интервале, на неограниченном промежутке). Применение производной при решении экстремальных задач.

Интерактивная форма: кейс-задания «Приложения производной».

## **3-й семестр**

### **Раздел 3. Интегральное исчисление функций одной переменной.**

**Тема 1. Неопределенный интеграл.** Первообразная функции. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Приемы нахождения интеграла (непосредственное интегрирование, линейность неопределенного интеграла, подведение под знак дифференциала, метод подстановки, интегрирование по частям).

Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.

Интегрирование некоторых иррациональных функций. Интегрирование некоторых трансцендентных функций. Примеры интегралов, не выражаящихся через элементарные функции.

**Тема 2. Определенный интеграл.** Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла (задача о площади криволинейной трапеции, задача о массе стержня, задача о пройденном пути). Определенный интеграл как предел интегральной суммы (суммы Римана). Классы интегрируемых функций. Свойства определенного интеграла (линейность, аддитивность относительно промежутка интегрирования, монотонность относительно подынтегральной функции и ее следствия; теорема о среднем). Интеграл по ориентируемому промежутку и его свойства. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Вычисление определенных интегралов (основная формула интегрального исчисления, метод замены переменной, интегрирование по частям).

**Тема 3. Несобственные интегралы.** Несобственные интегралы первого рода (интегралы с бесконечными пределами). Геометрический смысл несобственного интеграла первого рода. Несобственные интегралы второго рода (интегралы от неограниченных функций). Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода. Сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы. Условно и абсолютно сходящиеся несобственные интегралы. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов.

**Тема 4. Приложения интегрального исчисления.** Вычисление площадей плоских фигур. Площадь фигуры в декартовых координатах. Случай параметрического задания кривой. Площадь сектора в полярных координатах. Длина дуги в декартовых координатах. Длина дуги в полярных координатах. Дифференциал дуги. Площадь поверхности вращения. Объем тела вращения. Статические моменты, моменты инерции, координаты

центра тяжести плоских кривых. Статические моменты, моменты инерции, координаты центра тяжести плоских фигур. Общая схема применения определенного интеграла к решению прикладных задач.

Интерактивная форма: кейс-задания «Приложения определенного интеграла».

#### 4-й семестр

##### **Раздел 4. Ряды.**

**Тема 1. Числовые ряды.** Частичная сумма и остаток ряда. Сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Гармонический и геометрический ряды. Основные теоремы о сходимости рядов. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда. Достаточное условие расходимости числового ряда. Свойства сходящихся рядов. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости рядов с положительными членами (первый признак сравнения, второй признак сравнения, признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак). Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

**Тема 2. Функциональные ряды. Степенные ряды.** Область сходимости функционального ряда. Сумма ряда. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся рядов. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость степенных рядов. Непрерывность суммы степенного ряда. Действия над степенными рядами. Единственность разложения функции в степенной ряд.

Ряд Тейлора. Необходимое и достаточные условия сходимости ряда Тейлора к своей функции. Ряд Маклорена. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Применение рядов к приближенным вычислениям.

**Интерактивная форма:** работа в парах «Разложение функций в степенной ряд. Промежутки сходимости степенных рядов»

**Тема 3. Тригонометрические ряды.** Периодические функции и их свойства. Гармонические колебания. Построение графиков периодических функций. Тригонометрические ряды. Ряд Фурье периодической функции с периодом  $2\pi$ . Теорема Дирихле. Ряд Фурье для четных и нечетных функций. Ряд Фурье для функции с произвольным периодом. Равенство Парсеваля.

#### 5-й семестр

##### **Раздел 5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.**

**Тема 1. Основный понятия и теоремы.** Определение функции двух переменных. Область определения, множество значений, график, линии уровня. Функции трёх переменных, функции и переменных. Поверхности уровня. Предел последовательности точек плоскости. Ограниченные множества точек плоскости. Теорема Больцано - Вейерштрасса. Определение предела функции двух переменных на языке последовательностей и на языке окрестностей. Определение непрерывности функции двух переменных на языке последовательностей и на языке окрестностей. Действия с непрерывными функциями. Теорема Коши (о промежуточных значениях непрерывной функции). Теоремы Вейерштрасса (об ограниченности функции и о достижении функцией своего наибольшего и наименьшего значения).

Частные приращения и частные производные функции. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных. Полное приращение функции. Условие выражения полного приращения функции через её частные производные. Дифференцируемая функция и ее полный дифференциал. Производные сложных

функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциал как источник приближенных формул. Частные производные высших порядков. Условие равенства смешанных производных. Дифференциалы высших порядков. Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков. Неявные функции и их дифференцирование. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент.

Интерактивная форма: работа в парах «Вычисление частных производных, дифференциалов, производных по направлению».

**Тема 2. Экстремумы функций нескольких переменных.** Точки экстремума функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных. Условный экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в области. Касательная к плоской кривой. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Интерактивная форма: кейс-задание «Экстремумы функций нескольких переменных».

## **Раздел 6. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Кратные интегралы.**

**Тема 1. Кратные интегралы.** Двойной интеграл в прямоугольных координатах. Определение двойного интеграла как предела интегральной суммы. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Тройной интеграл в прямоугольных координатах. Определение тройного интеграла как предела интегральной суммы. Вычисление тройного интеграла сведением к повторному. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

Вычисление площади плоской фигуры. Вычисление объёма цилиндрического тела. Вычисление площади поверхности. Вычисление массы плоской пластины. Вычисление координат центра тяжести плоской пластины. Вычисление объёма тела. Вычисление массы тела. Вычисление координат центра тяжести тела.

**Тема 2. Криволинейные и поверхностные интегралы.** Определение криволинейного интеграла (1-го рода) по длине дуги от функции  $n$  переменных как предела интегральной суммы. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода от функции  $n$  переменных в случае параметрического и явного задания кривой интегрирования. Свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

Определение криволинейного интеграла (2-го рода) по координатам от функции  $n$  переменных как предела интегральной суммы. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода от функции  $n$  переменных в случае параметрического и явного задания кривой интегрирования. Свойства криволинейного интеграла 2-го рода. Интегрирование по замкнутому контуру. Формула Грина. Условие независимости интеграла от линии интегрирования. Интегрирование полных дифференциалов. Первообразная функции.

Приложения криволинейных интегралов. Вычисление площади цилиндрической поверхности. Вычисление массы плоской кривой. Вычисление работы, совершающей переменной силой. Вычисление площади фигуры, ограниченной простым замкнутым контуром. Интеграл по поверхности. Свойства интегралов по поверхности. Формула Стокса. Формула Остроградского.

Интерактивная форма: кейс-задания «Приложения двойных и тройных интегралов».

**Тема 3. Векторная теория поля.** Векторное поле. Однородное поле. Плоское поле. Векторная линия. Стационарные и нестационарные векторные поля. Дивергенция векторного поля. Источник и сток поля скоростей. Соленоидальное поле. Ротор векторного поля. Потенциальное поле. Гармоническое поле. Уравнение Лапласа. Оператор Лапласа. Оператор Гамильтона и векторные дифференциальные операции второго порядка.

Интегралы теории поля и теории потенциала. Поток вектора. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Грина. Формула Стокса. Работа поля. Циркуляция вектора. Потенциал поля. Свойства простейших векторных полей (соленоидальное, потенциальное, гармоническое).

Интерактивная форма: задания в парах «Вычисление основных характеристик векторного поля».

#### **4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляющую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным докладам;
- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение домашних контрольных работ;
- выполнение групповых интерактивных заданий.

#### **ОС-1. Самостоятельная работа.**

1. Известно, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\pi}{2}$ . Найти  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2\sin f(x) + \cos f(x)}{2f(x) + 1}$ .

- 1)  $\frac{2}{\pi+1}$ ;      2) 0;      3) 1;      4)  $\infty$ ;      5) не существует.

2. Найти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + \sqrt{x})^2 (1 - 5x^2)^3}{(3x^2 + 2x)^4}$ .

- 1)  $-\frac{500}{81}$ ;      2) 0;      3)  $\infty$ ;      4)  $\frac{5}{4}$ ;      5) 1.

3. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}$ .

- 1) 0;      2)  $\infty$ ;      3) 1;      4)  $\frac{1}{2}$ ;      5) не существует.

4. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{4}{3}} (\sqrt[3]{x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^2 - 3})$ .

- 1) 0;      2)  $\infty$ ;      3)  $\frac{5}{3}$ ;      4) не существует;      5) 5.

5. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{3x} - 5^{-2x}}{\arcsin 4x}$ .

- 1)  $\infty$ ;      2) 0;      3) 2;      4)  $\frac{1}{4} \ln 8575$ ;      5) не существует.

6. Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\ln(3-2x)}$ .

- 1) 0;      2)  $\frac{\pi}{4}$ ;      3)  $\infty$ ;      4) не существует;      5) 1.

7. Найти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+1}{13x-1} \right)^{2x+3}$ .

- 1)  $\frac{3}{13}$ ;      2)  $-\infty$ ;      3) 1;      4) 0;      5)  $+\infty$ .

8. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^2 + 1}{5x^2 - 1} \right)^{-3x^2}$ .

- 1)  $e^{-\frac{6}{5}}$ ;      2) 1;      3) 0;      4)  $\infty$ ;      5)  $5^{-3}$ ;

9. Определить порядок роста функции  $f(x) = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{x+2x+1}}{2\sqrt[3]{x+2}}$  относительно  $g(x) = x$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

- 1)  $\frac{3}{2}$ ;      2)  $\infty$ ;      3)  $\frac{13}{6}$ ;      4) 0;      5) 1.

10. Найти  $2a+b$ , если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 2x}{x-1} - ax + b \right) = 3$ .

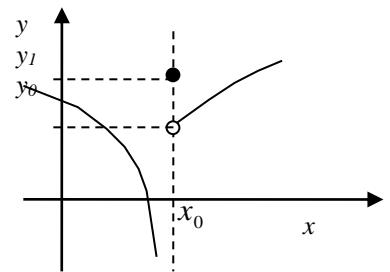
- 1) 0;      2) 4;      3) 2;      4) 6;      5) -4.

11. Найдите  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , если  $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ .

- 1)  $+\infty; +\infty$ ;      2) 0;  $+\infty$ ;      3) 0; 0;      4)  $+\infty; 0$ ;      5)  $-\infty; +\infty$ .

12. Верны ли приведенные ниже утверждения? (Ответ «да» – знак «+», ответ «нет» – знак «-»).

- Левосторонний предел функции в точке  $x_0$  – конечное число.
- Правосторонний предел функции в точке  $x_0$  – конечное число.
- $x_0$  – точка разрыва первого рода.
- $x_0$  – точка разрыва второго рода.
- Значение функции в точке  $x_0$  совпадает со значением левостороннего или правостороннего предела.



Выбрать набор верных ответов.

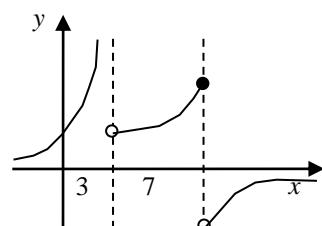
1)  $- + + - -$ ; 2)  $-- + -$ ; 3)  $+ - + -$ ; 4)  $+ + +$ ; 5)  $+ - + -$ .

13. Найти левосторонний и правосторонний пределы функции в точке  $x_0$ .

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}, \quad x_0 = 3.$$

1)  $-\infty; +\infty$ ; 2)  $0; +\infty$ ; 3)  $0; \pi$ ; 4)  $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$ ; 5)  $+\infty; -\infty$ .

14. Найти  $5a - 4b$ , где  $a$  – точка разрыва первого рода,  $b$  – точка разрыва второго рода функции, заданной графически.



15. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 1; \\ 2-x & \text{при } 1 < x < 2; \\ 1 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

16. Определить функцию  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , чтобы она стала в этой точке непрерывной.

$$f(x_0) = ? \quad f(x) = \frac{e^{5x}-1}{x}, \quad x_0 = 0.$$

17. Найти скачок функции  $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|} x^2$  в точке разрыва.

18. Найдите точку или точки разрыва. Если точка разрыва первого рода, то её абсциссу умножить на 1; если второго рода, то на 2; если точек разрыва несколько – полученные, как описано выше, числа сложить.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 3; \\ \frac{1}{x-6} & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

19. Схематически изобразить график функции, удовлетворяющий условиям:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4.$$

20. Доказать непрерывность функции  $f(x) = x^2$  в каждой точке  $x_0$  области определения.

### ОС-2. Примерный перечень тем рефератов.

- Действительные числа как бесконечные десятичные дроби.
- Действительные числа как сечения множества рациональных чисел.

3. Действительные числа как классы эквивалентных фундаментальных последовательностей.
4. Полнота пространства действительных чисел и ее следствия в математическом анализе.
5. Компактность отрезков пространства действительных чисел и ее следствия в математическом анализе.
6. Аксиома Архимеда и ее следствия в математическом анализе.
7. Неархimedовы расширения поля рациональных чисел. Множество гипердействительных чисел и его свойства.
8. Определения пределов последовательностей и функций в нестандартном анализе.
9. Определения непрерывности и равномерной непрерывности функций в нестандартном анализе.
10. Определения производной и дифференциала в нестандартном анализе.
11. Показательная функция и геометрическая прогрессия как модели реальных процессов.
12. Логарифмическая функция как модель реальных процессов.
13. Степенные зависимости и их свойства.
14. Тригонометрические функции как модели колебательных процессов.
15. История тригонометрических функций.
16. Асимптоты кривой и асимптотическое поведение функций.
17. Применение асимптотических разложений к решению уравнений.
18. Понятие эластичности функции и его приложения в экономике.
19. Применение формулы Тейлора к исследованию поведения функций.
20. Основы теории катастроф: случай функций одной переменной.

### ОС-3. Контрольная работа.

Найти производную функции

$$1) \frac{0.1}{4\sqrt[9]{x^7}} - \frac{x^6}{0/2}; \quad 2) \left(\frac{2}{\sqrt[5]{x}} + 1\right)(x+6); \quad 3) \frac{2}{\sqrt[3]{(3x^2-7)^4}}; \quad 4) \frac{2}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}; \quad 5) \sqrt{\ln(2x+1)}; \\ 6) 10^{\arcsin x}; \quad 7) \frac{1}{\operatorname{th}^2 x}; \quad 8) (1 + \lg x)^x.$$

9. Вычислить значение дифференциала функции  $f(x)$  при изменении переменной от  $x_0$  до  $x$ .  $f(x) = \operatorname{th}4x + 3x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 0.5$ .

10. Найти общее выражение для производной порядка  $n$  от функции  $\frac{1}{x^3}$ .

11. Применить формулу Лейбница для вычисления производной  $((1 - 7x)\sin x)^5$ .

12. Найти производные 1-го и 2-го порядка от функции, заданной параметрически  $x = 3 \arccos t$ ,  $y = 2\sqrt{1 - t^2}$ .

13. Вычислить предел, используя правило Лопитала

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\ln \cos 3x}{(6x - \pi)^2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (4 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}.$$

14.  $\ln(xy) + x^2 + 3y = 0$ ,  $y_x^-$ ?

15. Вычислить приближенно  $\operatorname{arctg} 1$ , 0.02.

### ОС-4. Кейс-задачи

1. Построить графики функций с помощью производной первого порядка

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданных отрезках.

$$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, \quad [1, 4].$$

3. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

$$y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1), \quad x_0 = 2.$$

4. Найти асимптоты и построить графики функций.

$$y = (x^2 + 1) / \sqrt{4x^2 - 3}.$$

5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$y = (x^3 + 4) / x^2.$$

6. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$$

### ОС-5. Контрольная работа.

Задача 1. Найти неопределенные интегралы функций.

$$(8x+10)^2 \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3 + \frac{x}{13})^5}} \quad - \frac{14}{(7x-6)^4}$$

Задача 2. Найти интегралы.

$$\int \tan^4 x \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \int \frac{14x+3}{(7x^2+3x+2)^3} dx \quad \int_0^{\pi/6} \cos^5 x \sin x dx$$

Задача 3. Найти интегралы.

$$\int \cos(3x+2) dx \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sin^2(\pi/3 x)} \quad \int (-2x+7) \sin(-x^2+7x+5) dx$$

Задача 4. Найти интегралы.

$$\int 5^{-2x+1} dx \quad \int_0^1 (3x^2+5) 7^{x^3+5x+6} dx \quad \int e^{\sin x} \cos x dx$$

Задача 5. Найти интегралы.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+49x^2}} \quad \int \frac{dx}{15+2x^2} \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^6}} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$$

Задача 6. Найти интегралы.

$$\int (6x+2) \cos 2x dx \quad \int_1^2 (x^3+3x-2) \ln 2x dx \quad \int x^2 2^{5x} dx$$

Задача 7. Найти неопределенные интегралы от заданных функций.

$$\frac{5x^2+3x-5}{x^2(x+1)} \quad \frac{7x^2-4x+45}{(x-2)(x^2+9)} \quad \frac{x^3-13x^2+36x+1}{x^2-13x+36}$$

Задача 8. В А) и С) найти неопределенные интегралы от заданных функций, в В) – определенный интеграл на промежутке  $[a;b]$ .

$$\int_0^{\pi/12} \sin^{10} x \cdot \cos^5 x \cdot \frac{\sin^2 x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}, \quad a=0, \quad b=\frac{\pi}{12} \quad \int_a^b \sin 5x \cdot \sin 7x$$

Задача 9. Найти интегралы.

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} \quad \int \frac{dx}{x + \sqrt[4]{x^3}}$$

Задача 10. Найти интегралы.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(\sqrt{4-x^2})^3}$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{2+x^2})^5}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}dx}{x^3}$$

Задача 11. Найти интегралы.

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x}$$

$$\int_0^{\arctg 2} \frac{dx}{4\cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$$

### ОС-6. Примерный перечень тем рефератов.

1. Исследование кривых, заданных параметрически.
2. Исследование некоторых кривых, заданных неявно.
3. Циклоида и ее свойства.
4. Семейство циклоидальных кривых.
5. Астроида и ее свойства.
6. Кардиоида и овалы Кассини.
7. Лемнискаты. Лемниската Бернулли и ее свойства.
8. Экстремальные задачи геометрического содержания в школьном курсе математики.
9. Экстремальные задачи физического содержания в школьном курсе математики.
10. Экстремальные задачи практического содержания в школьном курсе математики.
11. Доказательство тождеств с помощью дифференциального исчисления.
12. Некоторые классические неравенства и их доказательство средствами дифференциального исчисления.
13. Неравенство Йенсена и его следствия.
14. Интегрирование дифференциального бинома.
15. Эллиптические кривые и эллиптические интегралы.
16. Теоремы о среднем для интегралов Римана.
17. Интеграционные методы в трудах Архимеда.
18. Геометрические приложения интеграла Римана.
19. Физические приложения интеграла Римана.
20. Первообразная и интеграл в школьном курсе физики

### ОС-7. Контрольная работа

Задача 1. Найти интегралы.

$$\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$\int_0^{\pi/6} \cos^5 x \sin x dx$$

$$\int_0^1 (3x^2 + 5) 7^{x^3+5x+6} dx$$

Задача 2. Найти интегралы.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(\sqrt{4-x^2})^3}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sin^2(\pi/3)x}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}dx}{x^3}$$

Задача 3. Найти интегралы.

$$\int_1^2 (x^3 + 3x - 2) \ln 2x dx$$

$$\int_0^{\arctg 2} \frac{dx}{4\cos^2 x + \sin^2 x}$$

Задача 4. Найти площадь фигуры: а) в декартовых координатах: частей эллипса

$$x^2 + 4y^2 = 8, \text{ отсеченного гиперболой } x^2 - 3y^2 = 1;$$

б) ограниченной параметрически заданной кривой:  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  и осью  $Ox$ ;

в) ограниченной кривой в полярных координатах:  $\rho = \cos \varphi$ .

Задача 5. Найти длину дуги: а) в декартовых координатах:  $y = \ln(\cos x)$  между соседними точками пересечения с осью  $Ox$ ;

- б) кривой, заданной параметрически:  $x = \frac{t^6}{6}$ ,  $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ , между точками пересечения с осями координат;  
 в) кривой в полярных координатах: логарифмической спирали  $\rho = ae^{m\varphi}$  от точки  $(\rho_0, \varphi_0)$  до точки  $(\rho, \varphi)$ .

Задача 6. Найти объем: а) тела вращения: вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной параболами  $y = x^2$  и  $8x = y^2$ .

б) тела (через площадь поперечных сечений): клина, отсеченного от кругового цилиндра радиуса  $a$  плоскостью, проходящей через диаметр основания и наклоненной к основанию под углом  $\varphi$

Задача 7. Найти статический момент кривой  $y = \cos x$  от точки  $x = -\frac{\pi}{2}$  до точки  $x = \frac{\pi}{2}$  относительно оси  $Ox$ .

### ОС-8. Самостоятельная работа.

1. Найти область сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{tg} \frac{1}{n})^n}{(x+1)^n}.$$

2. Доказать равномерную сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$$

3. Найти радиус сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2}$$

4. Разложить по степеням  $x$  функцию:  $\frac{1-\operatorname{ch} 3x}{x^2}$

5. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл:  $\int_0^{0,1} e^{-2x^2} dx$

6. Разложить функцию  $f(x)=2x+1$  в ряд Фурье на промежутке  $(-3;3)$ .

### ОС-9. Самостоятельная работа.

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции.

A $\sqrt{x^2 + y^2 - 4}$	B $\ln x + \ln(-y)$	C $\sqrt{(x-5)(x+2)}$	D $\arcsin \frac{x^2 + y^2}{4}$
-----------------------------	------------------------	--------------------------	------------------------------------

Задача 2. Найти частные производные первого порядка от функций.

A $3x^4 y^2 - 2x + 4y - 6$	B $2x^4 \cos 5y$	C $\operatorname{tg}(3xy^2 + x^2)$	D $(x+4y) \cdot \ln(x+3y)$
-------------------------------	---------------------	---------------------------------------	-------------------------------

Задача 3.

A) Найти $du$ $(2x - y + 3z)^5$	B) Найти $\operatorname{grad} z$ $e^{xyz} + 2x - 3y + 4z$	C) Найти $d^2 z$ $xy^2 z^3 + \frac{1}{x}$
------------------------------------	--	--

Задача 4. А) Найти  $\frac{dz}{dt}$  (в тех задачах, где это указано, не  $\frac{dz}{dt}$ , а  $\frac{dz}{dx}$ ). Б) Найти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .

А)

$$z(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad x = \sin 3t; \quad y = t^3 + 5$$

Б)

$$z(x; y) = x \cdot \operatorname{arctg} y; \quad x = \frac{u}{v}; \quad y = 3u - 2v$$

Задача 5. а) Найдите  $\frac{dy}{dx}$  в А; б) Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  в В; в) Найдите в С  $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}$ , используя непосредственное дифференцирование обеих частей уравнения.

A

$$x^2 + y^2 + x \cdot \sin y = 0$$

B

$$\ln(2x+3y+7z) + xy^2 z^3 = 2$$

C

$$x^2 + y^3 + 5z + z^4 = 0$$

### ОС-10. Контрольная работа.

1. Найти точки экстремума функций.

a)  $z(x; y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x + 2y + 5$    b)  $z = \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x + \frac{y^2}{2} - 9y$

в)  $z(x; y) = 2x^3 + 2y^3 - 24x^2 + 27y^2$

2. Найти полный дифференциал функции:

a)  $f(x, y) = \arcsin(x/\sqrt{x^2 + y^2})$ ,    $f(x, y) = xy \ln(xy)$ .

3. Составьте уравнение касательной плоскости к поверхности  $f(x) = e^{x+y}$  в точке  $(1, -1, 1)$ .

4. Разложите данную функцию  $f(x) = \sqrt{1-x-y}$  по формуле Тейлора с центром в точке  $M(0, 0)$ .

5. Найти  $dz$   $d^2z$  (3, -2) функции  $z = f(x)$ , заданной неявно:  $z^3 - xz + y = 0$ , если  $f(3, -2) = 2$ .

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области  $D$ , ограниченной указанными линиями.  $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ ;  $D: x = 0, y = 0, y = 3 - x$

### ОС-11. Примерный перечень тем рефератов.

1.  $n$ -кратные интегралы и их свойства.
2. Криволинейные интегралы функций  $n$  переменных.
3. Дифференциальные формы, их дифференцирование и интегрирование.
4. Различные подходы к определению площади поверхности.
5. Ориентируемые и неориентируемые многообразия.
6. Геометрические приложения кратных интегралов.
7. Геометрические приложения криволинейных интегралов.
8. Физические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.
9. Скалярные и векторные поля в физике и в математике.
10. Теория размерности Хаусдорфа.
11. Интегралы и производные дробного порядка.

### ОС-12. Контрольная работа.

1. Вычислите:  $\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy$ ,  $D = x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}$ .

2. Вычислите:  $\iiint_V x dx dy dz$ ,  $V: y = 10x, y = 0, x = 1, z = xy, z = 0$ .

3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$y^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x.$$

4. Найдите массу пластиинки, заданной линиями,  $\mu$  – поверхностная плотность:

$$D: x = 1, y = 0, \quad y^2 = 4x (y \geq 0); \quad \mu = 7x^2 + y.$$

5. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = 16\sqrt{2x}, \quad y = \sqrt{2x}, \quad z = 0, \quad x + z = 2.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad \frac{9z}{2} = x^2 + y^2$$

7. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$z = 2 - 12(x^2 + y^2), \quad z = 24x + 2$$

8. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, \quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}, \quad -x \leq y \leq 0.$$

### ОС-13. Контрольная работа.

- Найдите с помощью криволинейного интеграла массу материальной кривой, заданной уравнением  $y = \ln x$ , где  $1 \leq x \leq e$ , если линейная плотность ее в каждой точке пропорциональна квадрату абсциссы, то есть  $\rho = kx^2$ .
- Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислите поверхностный интеграл  $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$  по внешней стороне поверхности  
S:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .
- Найти дивергенцию сферического векторного поля  $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ , где  $\vec{r} = xi + yj + zk$ ,  $r = |\vec{r}|$ . Определить вид функции  $f(r)$ , для которой поле  $\vec{a}$  является соленоидальным.
- Найти циркуляцию вектора  $\mathbf{F} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$  по окружности  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$  в положительном направлении.
- найти поток радиуса-вектора  $r$  через внешнюю сторону поверхности прямого кругового конуса, если  $h$  – высота конуса и  $R$  – радиус основания.
- Найти ротор в точке  $M(1, 2, 3)$  векторного поля  $\vec{a} = z^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}$ .

*Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:*

- Волкова Н.А., Столярова И.В., Фолиадова Е.В. История математики: учебно-методические рекомендации. –Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2017 – 39 с.
- Коноплева И.В., Сибирева А.Р. Исследование функций: методические указания. – 2е изд. испр. –Ульяновск: УлГТУ, 2013. –32 с. – 2017 [Электронный].
- Коноплева И.В., Сибирева А.Р. Пределы и непрерывность: Методические указания. - Ульяновск: УлГТУ, 2004. - 34 с. – 2017 [Электронный].
- Математический анализ. Введение в анализ: учебно-методическое пособие для студентов направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование», профили «Математика. Информатика», «Математика. Иностранный язык», «Физика. Математика» и 44.03.01 «Педагогическое образование» профиль «Математика». Квалификация (степень) выпускника: бакалавр. Макеева О.В. – Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова, 2017. – 49 с.
- Распутко Т. Б., Сибирева А.Р. Функции нескольких переменных: методические указания. –Ульяновск: УлГТУ, 2004. – 32 с. – 2017 [Электронный].
- Распутко Т.Б., Сибирева А.Р. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. УлГТУ, Ульяновск, 2001. –36 с. – 2017 [Электронный].
- Сибирева А.Р., Распутко Т.Б. Методы интегрирования. методические указания для самостоятельной работы студентов. Изд. 2-е. – Ульяновск: УлГТУ, 2005. – 40 с. – 2017 [Электронный].
- Сибирева А.Р., Ригер Т.В. Кратные интегралы. Методические указания к типовому расчету по высшей математике. –Ульяновск: УлГТУ, 1997. – 32 с. – 2017 [Электронный].

9. Сибирева А.Р., Савинов Н.В. Качественные задачи и контрпримеры на тему «Пределы». Методические указания. – Ульяновск: УлГТУ, 2001. – 32 с.–2017 [Электронный].

## 5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

### Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволяют выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

**Цель проведения аттестации** – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

**Промежуточная аттестация** осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль освоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ, используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	ОС-1. Самостоятельная работа. ОС-2. Примерный перечень тем рефератов. ОС-3. Контрольная работа. ОС-4. Кейс-задачи ОС-5. Контрольная работа. ОС-6. Примерный перечень тем рефератов. ОС-7. Контрольная работа ОС-8. Самостоятельная работа. ОС-9. Самостоятельная работа. ОС-10. Контрольная работа. ОС-11. Примерный перечень тем рефератов. ОС-12. Контрольная работа. ОС-13. Контрольная работа.	ОР-1. Знает основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач. ОР-2. Решает задачи по дисциплине, умеет проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения. ОР-3. Знает возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях
	<b>Оценочные средства для промежуточной аттестации</b> <b>зачет (экзамен)</b> 1,3,4,5 семестры экзамен в форме устного собеседования	ОР-4. умеет решать задачи школьного курса математики

	2 семестр зачет в форме устного собеседования	повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине
--	---	---

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

***Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости  
обучающихся по дисциплине***

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

***Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости  
обучающихся по дисциплине***

**1 семестр**

Примерный перечень вопросов к экзамену

Раздел «Введение в анализ»

1. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел.
2. Числовые множества  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ . Множество рациональных чисел. Плотность множества рациональных чисел. Недостаточность множества рациональных чисел для решения измерительных задач.
3. Определение вещественного числа как бесконечной десятичной дроби.
4. Расширенная числовая прямая. Числовые промежутки. Окрестность точки.
5. Модуль действительного числа. Свойства модуля действительного числа.
6. Ограниченные и неограниченные множества. Верхняя и нижняя грани множества.
7. Теорема о существовании конечных граней у ограниченного множества. Теорема о единственности верхней/нижней грани множества.
8. Определение числовой последовательности как функции натурального аргумента. Способы задания последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
9. Определение предела числовой последовательности. Левосторонняя и правосторонняя сходимость последовательности.
10. Теорема о единственности предела последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
11. Теоремы о предельном переходе в равенстве и неравенстве, теорема о сжатой переменной.
12. Свойства последовательностей (монотонность, ограниченность). Теорема об ограниченности последовательности, имеющей предел.
13. Теоремы о пределе монотонных последовательностей.
14. Лемма Бернулли. Число  $e$ .
15. Подпоследовательность. Теорема о пределе подпоследовательности.
16. Принцип Больцано – Вейерштрасса.
17. Условие Коши для последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.
18. Действия с последовательностями (сложение, вычитание, умножение, деление, умножение на число). Бесконечно малые последовательности и их свойства.
19. Бесконечно большие последовательности. Взаимосвязь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.
20. Лемма о представлении последовательности в виде суммы её предела и бесконечно малой последовательности. Свойства пределов последовательностей, связанные с арифметическими операциями над последовательностями.
21. Определение предела функции в точке на языке последовательностей. Односторонние пределы функции в точке на языке последовательностей.

22. Определение предела функции в точке на языке « $\varepsilon - \delta$ ». Односторонние пределы функции в точке на языке « $\varepsilon - \delta$ ». Теорема об эквивалентности определений предела функции в точке на языке последовательностей и на языке « $\varepsilon - \delta$ ».
23. Необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке.
24. Свойства пределов функций (переход к пределу в неравенствах; предел постоянной; предел суммы, произведения, частного).
25. Правило замены переменной для пределов функций (предел сложной функции, предел обратной функции). Предел функции на бесконечности.
26. Условие Коши для функции. Критерий Коши существования конечного предела функции.
27. Предел монотонных функций.
28. Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций (сумма, разность, произведение бесконечно малых функций; произведение бесконечно малой и ограниченной функций).
29. Бесконечный предел функции в точке. Бесконечно большие функции.
30. Сравнение бесконечно малых функций. Сравнение бесконечно больших функций.

31. Первый замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

32. Следствия из первого замечательного предела:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ .

33. Второй замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ .

34. Следствия из второго замечательного предела:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

35. Эквивалентность бесконечно малых функций. Необходимое и достаточное условие эквивалентности бесконечно малых функций. Принцип замены бесконечно малых функций.

36. Неопределенные выражения ( $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ ).

37. Определения функции, непрерывной в точке. Односторонняя непрерывность функции.

38. Точка разрыва функции. Классификация точек разрыва.

39. Свойства функций непрерывных в точке (непрерывность суммы, произведения, частного, композиции непрерывных функций).

40. Непрерывность функции на промежутке.

41. Достаточное условие непрерывности монотонной функции.

42. Теорема Больцано-Коши об обращении в нуль функции непрерывной на отрезке.

43. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении функции непрерывной на отрезке.

44. Теорема о существовании обратной функции для функции непрерывной на промежутке.

45. Теорема Вейерштрасса об ограниченности функции непрерывной на отрезке.

46. Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении функции непрерывной на отрезке.

47. Непрерывность элементарных функций.

#### Раздел «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

48. Определение производной функции. Геометрический и механический смысл производной.
49. Производная обратной функции. Производная неявной функции.
50. Логарифмическая производная. Производная функции, заданной параметрически.
51. Таблица производных элементарных функций. Правила вычисления производных.
52. Формула для приращения функции. Производная сложной функции.
53. Дифференцируемая функция. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции.
54. Непрерывность как необходимое условие дифференцируемости функции.
55. Дифференциал функции и его геометрический смысл.

56. Основные формулы и правила дифференцирования.
57. Инвариантность формы дифференциала. Дифференциал как источник приближенных формул.
58. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
59. Дифференциалы высших порядков.
60. Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков.

## 2 семестр

Примерный перечень вопросов к зачёту

Раздел «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

1. Теорема Ферма.
2. Терема Роля.
3. Теорема Лагранжа.
4. Теорема Коши.
5. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции с дополнительным членом форме Лагранжа.
6. Формула Маклорена для элементарных функций ( $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $(1+x)^m$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\arctg x$ ).
7. Правило Лопитала.
8. Условие постоянства функции. Достаточное условие строгой монотонности функции.
9. Необходимое и достаточное условия нестрогой монотонности функции.
10. Точка экстремума и экстремум функции. Необходимое и достаточные условия экстремума функции.
11. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточное условие выпуклости и вогнутости кривой.
12. Точка перегиба графика функции. Необходимое и достаточное условия существования точки перегиба кривой.
13. Асимптоты кривой. Общая схема исследования функции и построение ее графика.
14. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции, заданной на интервале

## 3 семестр

Примерный перечень вопросов к экзамену

**Раздел «Интегральное исчисление функций одной переменной»**

1. Понятия первообразной и обобщенной первообразной функции на промежутке. Общий вид первообразных данной функции на промежутке. Понятие неопределенного интеграла.
2. Таблица простейших неопределенных интегралов.
3. Свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования).
4. Общий алгоритм интегрирования рациональных функций. Интегрирование простейших дробей первого и второго рода.
5. Рекуррентная формула для вычисления интегралов вида  $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ . Интегрирование простейших дробей третьего и четвертого рода.
6. Интегрированиедробно-линейных иррациональностей.
7. Интегрирование квадратичных иррациональностей: подстановки Эйлера, тригонометрические и гиперболические подстановки.
8. Интегрирование функций, рационально зависящих от  $\sin x$ ,  $\cos x$ . Интегрирование функций, рационально зависящих от экспоненты. Интегрирование функций, рационально зависящих от  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ .
9. Определенный интеграл (интеграл Римана) как предел интегральных сумм. Функции, интегрируемые по Риману на отрезке. Необходимое условие интегрируемости.
10. Определенный интеграл (интеграл Римана) как разделяющее число верхних и нижних сумм Дарбу. Свойства сумм Дарбу. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу.

11. Достаточные условия интегрируемости.
12. Свойства интеграла Римана (линейность, монотонность, аддитивность относительно промежутка интегрирования). Свойства, связанные с оценкой интеграла Римана. Теорема о среднем.
13. Интеграл Римана по произвольному промежутку и его свойства.
14. Интеграл с переменным верхним пределом как первообразная подынтегральной функции. Формула Ньютона-Лейбница.
15. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.
16. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку.
17. Несобственный интеграл от неограниченной функции.
18. Теоремы сравнения для несобственных интегралов.
19. Квадрируемые фигуры на плоскости. Площадь криволинейной трапеции. Площадь фигуры, элементарной относительно одной из осей.
20. Площадь криволинейного сектора.
21. Спрямляемые кривые. Длина плоской кривой, заданной параметрически. Случай кривой, заданной явно в декартовых или полярных координатах.
22. Объем тела вращения. Площадь поверхности вращения.
23. Статические моменты и центр масс кривой.
24. Статические моменты и центр масс однородной криволинейной трапеции.
25. Работа переменной силы.

#### **4 семестр**

Примерный перечень вопросов к экзамену

#### **Раздел «Числовые ряды»**

Раздел «Интегральное исчисление функций одной переменной. Неопределенный интеграл»

1. Первообразная функции.
2. Неопределенный интеграл.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Таблица основных интегралов.
5. Приемы нахождения интеграла (непосредственное интегрирование, подведение под знак дифференциала, метод подстановки, интегрирование по частям).
6. Интегрирование простейших дробей.
7. Интегрирование рациональных функций.
8. Интегрирование иррациональных функций.
9. Интегрирование трансцендентных функций.

Раздел «Интегральное исчисление функций одной переменной. Определенный интеграл»

10. Определенный интеграл как предел интегральной суммы (суммы Римана).
11. Классы интегрируемых функций.
12. Свойства определенного интеграла (интеграл по ориентированному промежутку).
13. Свойства определенного интеграла, выражаемые равенствами.
14. Свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами.
15. Определенный интеграл, как функция верхнего предела.
16. Основная формула интегрального исчисления.
17. Вычисление определенных интегралов методом замены переменной.
18. Вычисление определенных интегралов интегрированием по частям.
19. Площадь фигуры в декартовых координатах. Случай параметрического задания кривой.
20. Площадь сектора в полярных координатах.
21. Длина дуги в декартовых координатах.

22. Длина дуги в полярных координатах.
23. Дифференциал дуги. Эквивалентность бесконечно малой дуги и стягивающей ее хорды.
24. Площади поверхности вращения.
25. Объемов тела вращения.
26. Статические моменты, моменты инерции, координаты центра тяжести плоских кривых.
27. Статические моменты, моменты инерции, координаты центра тяжести плоских фигур.
28. Общая схема применения определенного интеграла к решению прикладных задач.
29. Несобственные интегралы первого рода (интегралы с бесконечными пределами).
30. Несобственные интегралы второго рода (интегралы от неограниченных функций).
31. Сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы.
32. Условно и абсолютно сходящиеся несобственные интегралы.
33. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов.

### Раздел «Ряды»

34. Числовой ряд.
35. Частичная сумма и остаток ряда.
36. Сумма ряда.
37. Сходящиеся и расходящиеся ряды.
38. Гармонический и геометрический ряды.
39. Теоремы о сходимости рядов (эквивалентность сходимости числового ряда и его остатка, необходимое условие сходимости числового ряда).
40. Критерий Коши сходимости числового ряда.
41. Необходимое условие сходимости числового ряда. Достаточное условие расходимости числового ряда.
42. Свойства сходящихся рядов.
43. Признаки сходимости рядов с положительными членами (первый признак сравнения, второй признак сравнения, признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак).
44. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
45. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
46. Функциональный ряд.
47. Область сходимости функционального ряда.
48. Сумма функционального ряда.
49. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда.
50. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.
51. Признак Вейерштрасса равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда.
52. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда.
53. Почленное интегрирование равномерно сходящегося ряда.
54. Почленное дифференцирование равномерно сходящегося ряда.
55. Степенной ряд. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
56. Равномерная сходимость степенных рядов.
57. Свойства степенных рядов. Единственность разложения функции в степенной ряд.
58. Ряд Тейлора. Необходимое и достаточные условия сходимости ряда Тейлора к своей функции.
59. Ряд Маклорена. Разложение элементарных функций в степенные ряды.
60. Применение рядов к приближенным вычислениям.
61. Периодические функции и их свойства. Гармонические колебания.
62. Ряд Фурье периодической функции с периодом  $2\pi$ . Теорема Дирихле.

63. Ряд Фурье для четных и нечетных функций. Ряд Фурье для функции с произвольным периодом.

## 5 семестр

Примерный перечень вопросов к экзамену

**Раздел «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»**  
Раздел «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

7. Понятие метрического пространства. Пространство  $\mathbb{R}^n$  как метрическое пространство.
8. Последовательности точек в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве.
9. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.
10. Предельные точки. Замкнутые множества.
11. Компакт в метрическом пространстве.
12. Граница множества.
13. Прямые, лучи и отрезки в  $\mathbb{R}^n$ .
14. Определение функции двух переменных. Область определения и множество значений функции двух переменных.
15. График функции двух переменных. Линии уровня.
16. Определение функции  $n$  переменных. Область определения и множество значений функции  $n$  переменных. График функции  $n$  переменных. Поверхности уровня.
17. Предел последовательности точек плоскости.
18. Ограниченные множества точек плоскости.
19. Предел функции по множеству. Повторные пределы. Бесконечные пределы.
20. Непрерывность функции в точке.
21. Непрерывность сложной функции.
22. Теорема Больцано - Вейерштрасса.
23. Теорема Коши (о промежуточных значениях непрерывной функции).
24. Теоремы Вейерштрасса (об ограниченности функции и о достижении функцией своего наибольшего и наименьшего значения).
25. Равномерная непрерывность функции.
26. Теорема Кантора.
27. Частные приращения и частные производные функции.
28. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
29. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке.
30. Достаточные условия дифференцируемости функции в точке.
31. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных.
32. Дифференцируемость сложной функции.
33. Формула конечных приращений Лагранжа.
34. Производная по направлению. Градиент функции.
35. Полное приращение функции. Условие выражения полного приращения функции через её частные производные.
36. Дифференцируемая функция и ее полный дифференциал.
37. Инвариантность формы первого дифференциала.
38. Дифференциал как источник приближенных формул.
39. Касательная плоскость к плоской и пространственной кривой.
40. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
41. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.

## Раздел «Экстремумы функций нескольких переменных»

42. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.
43. Теорема о неявной функции.

44. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной неявно.
45. Теорема о системе неявных функций. Поверхности, заданные параметрически.  
Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной параметрически.
46. Теорема об обратном отображении.
47. Диффеоморфизмы областей и их свойства. Геометрический смысл модуля и знака якобиана диффеоморфного отображения.
48. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума.
49. Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных в терминах второго дифференциала, в терминах гессиана.
50. Понятие условного экстремума функции нескольких переменных. Решение задачи на условный экстремум методом исключения переменных.
51. Лагранжиан. Решение задачи на условный экстремум методом множителей Лагранжа.
52. Наибольшие и наименьшие значения функции нескольких переменных в области.  
Случай задачи линейного программирования.
53. Раздел «Интегральное исчисление функций нескольких переменных:
54. кратные интегралы»
55. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Двойной интеграл по прямоугольнику как предел интегральных сумм. Необходимое условие существования двойного интеграла.
56. Верхние и нижние суммы Дарбу функции двух переменных и их свойства. Двойной интеграл как разделяющее число верхних и нижних сумм Дарбу. Достаточные условия существования двойного интеграла по прямоугольнику.
57. Свойства двойного интеграла по прямоугольнику. Двойной интеграл по произвольному ограниченному множеству. Площадь ограниченного множества как двойной интеграл.
58. Сведение двойного интеграла к повторному (случай прямоугольной области, случай области, элементарной относительно одной из осей).
59. Коэффициент изменения меры при диффеоморфном отображении. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
60. Задача о массе неоднородного тела. Тройной интеграл по параллелепипеду как предел интегральных сумм. Необходимое условие существования тройного интеграла. Тройной интеграл как разделяющее число верхних и нижних сумм Дарбу. Достаточные условия существования тройного интеграла.
61. Свойства тройного интеграла. Тройной интеграл по произвольному ограниченному телу. Объем ограниченного тела как тройной интеграл.
62. Сведение тройного интеграла к повторному (случаи параллелепипеда, области, элементарной относительно одной из осей, области, элементарной относительно одной из координатных плоскостей).
63. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

**Раздел «Интегральное исчисление функций нескольких переменных:  
криволинейные и поверхностные интегралы»**

64. Задачи о массе неоднородной кривой и о работе переменной силы. Понятие криволинейного интеграла первого рода (по длине дуги). Длина дуги кривой как криволинейный интеграл. Понятие криволинейного интеграла второго рода (по координатам).
65. Свойства криволинейных интегралов первого и второго рода.
66. Сведение криволинейного интеграла первого рода к интегралу Римана.
67. Сведение криволинейного интеграла второго рода к интегралу Римана. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.
68. Формула Грина. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла второго рода.

69. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора плоской кривой, соединяющей данные точки. Полные дифференциалы функций двух переменных и их интегрирование.
70. Понятие двусторонней поверхности. Сторона поверхности и ориентация кривых на поверхности.
71. Вычисление площади криволинейной поверхности, заданной параметрически. Случай явно заданной поверхности.
72. Понятие поверхностного интеграла первого рода (по площади поверхности). Понятие поверхностного интеграла второго рода (по координатам). Свойства поверхностных интегралов первого и второго рода.
73. Сведение поверхностных интегралов первого и второго рода к двойному интегралу. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.
74. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса.
75. Условия независимости поверхностного интеграла второго рода от выбора поверхности, натянутой на данный контур. Полные дифференциалы функций трех переменных и их интегрирование.
76. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора пространственной кривой, соединяющей данные точки.
77. Понятия скалярного и векторного поля (плоского, пространственного). Градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля. Символический оператор «набла» и его свойства.
78. Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса в обозначениях векторной теории поля.
- Раздел «Приложения интегрального исчисления функций нескольких переменных»**
79. Вычисление длины дуги плоской или пространственной кривой, заданной параметрически, с помощью криволинейного интеграла первого рода. Случай плоской кривой, заданной явно в декартовых или полярных координатах. Вычисление массы неоднородной кривой.
80. Вычисление площади плоской области с помощью двойного интеграла. Случай криволинейной трапеции, области, элементарной относительно одной из осей, криволинейного сектора. Вычисление площади плоской области с помощью криволинейного интеграла второго рода. Вычисление массы неоднородной пластиинки.
81. Вычисление площади криволинейной поверхности, заданной параметрически, с помощью поверхностного интеграла первого рода. Случай поверхности, заданной явно в декартовых координатах. Случай поверхности вращения. Вычисление площади цилиндрической поверхности с помощью криволинейного интеграла первого рода. Вычисление массы неоднородной поверхности.
82. Вычисление объема тела с помощью тройного интеграла. Случай криволинейного цилиндра, области, элементарной относительно одной из осей, области, элементарной относительно одной из плоскостей, тела вращения. Вычисление объема тела с помощью поверхностного интеграла второго рода. Вычисление массы тела.
83. Вычисление статических моментов кривой, плоской области, криволинейной поверхности, тела. Координаты центра масс кривой, плоской области, криволинейной поверхности, тела.
84. Вычисление моментов инерции кривой, плоской области, криволинейной поверхности, тела относительно оси, относительно точки.
85. Вычисление работы переменной силы при перемещении тела вдоль кривой.

**Примерные практические задания к экзамену**

- Найти точки экстремума функций.  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x + 2y + 5$
- Вычислить

$$\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$$

3. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

$$9z/2 = x^2 + y^2.$$

### **Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине**

*Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся*

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен, зачет
<b>1,3,4,5 семестры</b>	Разбалловка по видам работ	2 x 2=4 баллов	5 x 1=5 баллов	167 баллов	Экзамен 120 балла
	Суммарный макс. балл	4 балла max	9 балла max	180 баллов max	300 баллов max
<b>2 семестр</b>	Разбалловка по видам работ	2 x 1=2 балла	3 x 1=3 балла	133 балла	Зачет 60 баллов
	Суммарный макс. балл	2 балла max	5 баллов max	140 баллов max	200 баллов max

*Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 1,3,4,5 семестров*

<b>Оценка</b>	<b>Баллы (3 ЗЕ)</b>
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

### **1. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

**Подготовка к практическим занятиям.**

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

## Планы практических занятий

### 1 СЕМЕСТР

Занятие 1. План. Множества. Операции над множествами. Множества натуральных, рациональных, иррациональных, вещественных чисел. Принадлежность элементов множеству. Операции над множествами чисел.

Числовые последовательности, их роль в вычислительных процессах. Определение числовой последовательности как функции натурального аргумента. Различные способы задания последовательностей. Свойства числовых последовательностей. Предел числовой последовательности. Стабилизация десятичных знаков у членов последовательности, имеющей предел. Решение задач с использованием определения предела числовой последовательности. Подпоследовательности.

Занятие 2. План. Предел функции в точке и на бесконечности. Решение задач на нахождение пределов, раскрытие неопределенностей / и 0/0. Техника раскрытия неопределённостей.

Занятие 3. План. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентности, следствия первого и второго замечательного пределов. Замена бесконечно малых эквивалентными при вычислении пределов. Техника раскрытия неопределённостей. Замена переменных при нахождении пределов функций.

Занятие 4. Определение непрерывности функции. Непрерывность функции на промежутке. Непрерывность элементарных функций. Свойства функций непрерывных в точке: непрерывность суммы, произведения, частного и сложной функции. Односторонние пределы функции в точке. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.

Занятие 5. План Производная функции, ее геометрический и механический смыслы. Таблица производных. Техника нахождения табличных производных. Производная суммы, произведения, частного.

Производная сложной и обратной функций. Техника нахождения производных. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцируемость функции. Дифференциал функции. Связь с производной. Уравнения касательной и нормали. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Использование дифференциала в приближенных вычислениях.

Производные и дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы дифференциалов порядка выше первого. Формула Лейбница. Случай функций, заданных параметрически. Дифференцирование неявно заданных функций.

## **2 СЕМЕСТР**

Занятие 1. План. Условия возрастания и убывания функций. Необходимое условие экстремума. Достаточные признаки максимума и минимума с первой и высшими производными. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба.

Занятие 2. План. Асимптоты. Схема исследования функций. Исследование функций и построение графиков.

Занятие 3. План. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функций, непрерывной не отрезке. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функций, непрерывной на открытом промежутке. Решение текстовых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции. Построение математических моделей задач.

## **3 СЕМЕСТР**

Занятие 1. План. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул.

Занятие 2. План. Простейшие приемы интегрирования: внесение под знак дифференциала. Техника интегрирования.

Занятие 3. План. Некоторые приемы интегрирования. Замена переменных в неопределенном интеграле. Интегрирование алгебраических иррациональностей: простейшие иррациональности. Интегрирование по частям.

Интегрированиедробно-рациональныхфункций. Интегрированиедробей первого, второго и третьего типа. Алгоритм интегрированиядробно-рациональныхфункций. Метод неопределенныхкоэффициентов.

Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование простейших тригонометрических выражений. Универсальная замена переменных. Тригонометрические подстановки.

Занятие 4. План. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Приложения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах; в случае, если кривая задана параметрически.

Занятие 5. План. Приложения определенного интеграла к вычислению к объемов тел. Понятие кубируемого тела. Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений. Вычисление объема тела вращения. Определение и вычисление длины дуги гладкой кривой. Понятие спрямляемой кривой. Дифференциал длины дуги кривой, заданной параметрически. Длина дуги кривой, заданной явно в декартовых координатах. Длина дуги кривой, заданной явно в полярных координатах.

## **4 СЕМЕСТР**

Занятие 1. План. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Геометрическая прогрессия. Необходимое условие сходимости ряда. Ряды с положительными членами. Теоремы сравнения.

Занятие 2. План. Признаки сходимости Д'Аламбера и Коши. Интегральный признак сходимости ряда. Оценка остатка ряда с помощью интегрального признака.

Занятие 3. План. Знакочередующиеся ряды. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о абсолютной сходимости ряда. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Обобщение признаков сходимости Д'Аламбера и Коши на случай знакопеременных рядов.

Занятие 4. План. Функциональные ряды, область сходимости

Степенные ряды. Теоремы Абеля. Круг сходимости, интервал и радиус сходимости для рядов с действительными членами. Разложение функций в степенной ряд.

Ряд Тейлора.

Разложение по степеням  $x$  некоторых элементарных функций.

Применение степенных рядов к приближенным вычислениям. Вычисление пределов, решение уравнений, нахождение интегралов с помощью степенных рядов.

Занятие 5. План. Разложение в ряды Фурье функций на  $(-\pi, \pi)$  и  $(-l, l)$ , четных и нечетных функций.

## 5 СЕМЕСТР

Занятие 1. План. Функции нескольких переменных. Область определения. График. Линии и поверхности уровня.

Частные производные. Дифференцирование функции нескольких переменных. Полный дифференциал, связь с частными производными. Градиент, производная по направлению.

Занятие 2. План. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования. Касательная и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. Приложения дифференциала.

Производные сложных функций. Неявные функции. Теорема существования и дифференцирования неявных функций. Вычисление производных неявных функций.

Занятие 3. План. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.

Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции непрерывной в замкнутой, ограниченной области.

Занятие 4. Двойные, тройные интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Задачи на нахождение двойных и тройных интегралов в декартовых координатах.

Занятие 5. План. Замена переменных в кратном интеграле: общая и стандартная. Двойной интеграл в полярных координатах. Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Тройной интеграл в сферических координатах.

Геометрические приложения кратных интегралов. Физические приложения кратных интегралов.

## 2. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

### Основная литература

- Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: Учебник / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Физматлит, 2015. – 444 с. – ISBN 978-5-9221-1585-8. – URL: <https://znanium.com/catalog/document?id=293958&showcollections=1>
- Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ: Учебник / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Физматлит, 2003. – 424 с. – ISBN 5-9221-0185-4. URL: <https://znanium.com/catalog/document?id=303181&showcollections=1>

### **Дополнительная литература**

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринский. – 8-е изд., испр. и доп. – Москва : Физматлит, 2001. – Том 1. – 680 с. – ISBN 978-5-9221-0156-0.  
URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83037>
  2. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринский. – 8-е изд. – Москва : Физматлит, 2001. – Том 2. – 861 с. – ISBN 978-5-9221-0157-8.  
URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83038>
  3. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринский. – Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). – Москва : Физматлит, 2002. – Том 3. – 727 с. – ISBN 5-9221-0155-2.  
URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196>
- Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

### **Интернет-ресурсы**

1. Мир математических уравнений. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>
2. Softline. <http://exponenta.ru/>
3. Популярные лекции по математике. <http://ilib.mccme.ru/plm>
4. Школьникам, студентам, аспирантам. <http://ph4s.ru/>
5. Прикладная математика. <http://primat.org>
6. Учебно-методическая литература для студентов. <http://studfiles.ru/>
7. Сайт издательства «Венец» УЛГТУ. <http://venec.ulstu.ru/lib/>
8. МГТУ ГА. <http://vm.mstuca.ru/posobia/posobia.htm>
9. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. <http://window.edu.ru/>