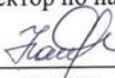


Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе

 Н.А. Ильина
«30» августа 2016 г.

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА

Программа учебной дисциплины вариативной части
для направления подготовки 01.06.01 Математика и механика
Направленность (профиль): Вещественный, комплексный и функциональный анализ
(очная и заочная форма обучения)

Составители:
Владова Е.В., кандидат физико-
математических наук, доцент,
Фолиадова Е.В., кандидат физико-
математических наук

Рассмотрено и утверждено на заседании ученого совета факультета физико-математического
и технологического образования (протокол от « 22 » июня 2016 г. № 9).

Ульяновск, 2016

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа дисциплины «Теория меры и интеграла» составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации), утверждённого приказом Министерством образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 года № 866 (зарегистрирован в Минюсте России 25.08.2014 № 33837), и с учебным планом.

Цель дисциплины «Теория меры и интеграла» - введение аспирантов в систему современных представлений об интегрировании, сочетающих развитие абстрактной теории и ее использование для решения широкого круга задач из различных областей математики, а также ее приложений, формирование умения работать с математическими объектами высокого уровня абстракции, развитие соответствующего типа мышления.

Задачи дисциплины:

- 1) сформировать у аспирантов систему базовых понятий общей теории меры и интеграла; углубить знание необходимых разделов теории функций действительной переменной в сопоставлении с классическим математическим анализом и соответствующими разделами теории функций комплексной переменной; познакомить аспирантов с типичными принципами получения основных результатов и возможностями их обобщения;
- 2) формировать умение применять аппарат интегрирования по областям в многомерных пространствах и по многообразиям, использовать аппарат интегральных преобразований при решении дифференциальных, интегральных уравнений;
- 3) развивать навыки использования геометрического языка в описании аналитических объектов, умение переводить утверждения с одного математического языка на другой, а также описывать нематематические объекты на подходящем математическом языке;
- 4) развивать аналитическое мышление, навыки самостоятельного получения и обоснования математических утверждений, общую математическую культуру.

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория меры и интеграла» относится к вариативной части блока дисциплин (Б1.В.02) и изучается в третьем семестре при очной форме обучения, в четвертом семестре при заочной форме обучения. Изучение дисциплины предполагает уверенное владение аспирантом основами теории функций действительной переменной, функционального анализа, топологии, дифференциальной геометрии и теории функций комплексной переменной в объеме стандартных курсов математических специальностей классических университетов. Знания и умения, полученные при изучении курса «Теория меры и интеграла», необходимы при изучении ряда дисциплин аспирантской подготовки: «Аналитические функции и аналитическое продолжение» «Теория операторов в гильбертовых и банаховых пространствах», дисциплин по выбору «Теория линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой», «Вариационные проблемы и методы в математическом анализе». Учебный материал дисциплины входит в программу кандидатского экзамена по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Знания и умения, полученные при изучении дисциплины «Теория меры и интеграла», используются также при изучении оригинальной научной литературы по теме диссертации и проведении самостоятельных исследований. Уверенное владение учебным материалом дисциплины важно для успешного прохождения аспирантом педагогической практики.

Требования к усвоению дисциплины

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом и видами профессиональной деятельности, формируемыми в рамках ОПОП аспирантуры по профилю

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ», аспирант должен обладать следующими компетенциями:

общими профессиональными компетенциями:

- способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);

профессиональными компетенциями:

- готовностью применять и самостоятельно пополнять знания о различных математических структурах, о типичных задачах математического анализа и методах их решения, о способах построения математических теорий и их развитии на протяжении истории математики (ПК-1);

- способностью ставить и решать новые задачи в области математики, корректно формулировать математические результаты и логически безупречно обосновывать процесс их получения (ПК-2);

В результате освоения дисциплины «Теория меры и интеграла» аспирант **должен:**

знать основные понятия и теоремы теории меры Лебега и интеграла Лебега, теории функций ограниченной вариации, теории меры Лебега-Стилтьеса и интеграла Лебега-Стилтьеса, теории дифференциальных форм на многообразиях, включая интегрирование дифференциальных форм и абстрактную теорему Стокса; основные результаты классического математического анализа, связанные с измеримостью множеств и функций, связью между интегрированием и дифференцированием, и методы их получения из общей теории меры; теоретическую основу операционного исчисления и методов, связанных с применением иных интегральных преобразований; конструкции продолжения меры, основных пространств функционального анализа, в том числе пространств суммируемых функций, пространств обобщенных функций;

понимать связи основных результатов теории функций действительной переменной с соответствующими результатами классического математического анализа, теории функций комплексной переменной; границы применимости классических результатов и методов и возможности их модификации в более общих ситуациях;

уметь переформулировать задачи геометрии, классического анализа, теории вероятностей и др. на языке общей теории меры и наоборот; проводить доказательства некоторых общих результатов действительного анализа, комплексного анализа; применять изученные методы решения дифференциальных, интегральных уравнений, связанные с интегральными преобразованиями, в типичных случаях; получать и объяснять некоторые результаты классического анализа как частные случаи теорем общей теории меры и интеграла;

владеть языком и символикой теории множеств и теории меры, вещественного и функционального анализа, навыками оперирования с последовательностями и функциями как с точками абстрактного пространства.

Аспирант имеет возможность:

освоить применение идеи интегрирования по мере на гладких многообразиях, методов интегральных преобразований к широкому кругу задач вещественного, комплексного, функционального анализа и их приложений, в том числе к нерешенным проблемам;

уяснить основные идеи обобщения понятий меры и интеграла на случай пространств операторов, пространств с мерой и др.;

изучить современные подходы к введению классических понятий, литературу по новым направлениям математики, использующим идею интегрирования.

Структура и содержание дисциплины «Теория меры и интеграла»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 1 зачетную единицу (36 часов): 2 часа – лекции, 10 часов практическая работа, 24 часа самостоятельной работы. Форма отчетности – зачет.

№ п/п	Раздел дисциплины	Год обучения (очная/заочная форма)	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу аспирантов, и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (по неделям) Формы промежуточной аттестации (по итомам освоения дисциплины)
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	
1	2	3	4	5	6	7
1.	Тема 1. Общая теория меры.	2/2	2		4	реферат
2.	Тема 2. Общая теория интеграла.			2	4	реферат
3.	Тема 3. Интегрирование и дифференцирование.			2	4	проекты
4.	Тема 4. Интегральные преобразования.			2	4	реферат
5.	Тема 5. Интегрирование по многообразиям.			2	4	проекты
6	Тема 6. Интегральные представления аналитических и гармонических функций.			2	4	реферат
	Всего		2	10	24	зачет

Содержание дисциплины

Общая теория меры

Мера как неотрицательная аддитивная функция множеств. Счетная аддитивность (σ -аддитивность) меры. Конечные и σ -конечные меры. Измеримые пространства и пространства с мерой. Борелевская σ -алгебра подмножеств пространства \mathbf{R}^n . Мера Жордана для ограниченных подмножеств пространства \mathbf{R}^n . Множества нулевой меры. Полные меры. Конструкция лебегова продолжения меры с полукольца на кольцо, на σ -кольцо. Мера Лебега линейных множеств, множеств в пространстве \mathbf{R}^n .

Понятие меры Радона (заряда). Интеграл Лебега, интеграл Лебега-Стилтьеса, мера Дирака как примеры мер Радона. Мера Радона как разность двух положительных мер (разложение Хана, разложение Жордана). Пространство зарядов. Заряд, абсолютно непрерывный относительно заданной меры; заряд, сингулярный относительно заданной меры. Характеристика абсолютно непрерывных зарядов как непрерывных функционалов на метрическом пространстве множеств, эквивалентных относительно данной меры.

Измеримые функции. Сходимость по мере и сходимость почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Приложения теории меры в теории вероятностей.

Общая теория интеграла

Интеграл как продолжение линейного функционала с множества простых функций на измеримом пространстве. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана.

Интеграл Лебега-Стилтьеса, сравнение с интегралом Римана-Стилтьеса. Свойства интеграла по произвольной мере, по произвольному заряду.

Прямые произведения мер и теорема Фубини.

Пространства суммируемых функций (относительно данной меры). Случай дискретной (в том числе считающей) меры, случай меры Лебега.

Моменты случайных величин в теории вероятностей. Пространства суммируемых функций в теории случайных процессов.

Возможности дальнейшего обобщения понятия интеграла. Интеграл абстрактной функции действительной переменной.

Интегрирование и дифференцирование

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции и их связь с мерами, абсолютно непрерывными относительно меры Лебега. Теорема Радона-Никодима. Плотность заряда относительно меры (Лебега). Лебегово разложение меры. Представление монотонной функции в виде суммы абсолютно непрерывной функции, ступенчатой функции и сингулярной компоненты.

Интегральные преобразования

Дискретное преобразование Фурье и его свойства. Ряды по ортонормированным системам в гильбертовом пространстве, стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

Понятие сингулярного интеграла. Представление функции сингулярным интегралом в заданной точке. Приложения в теории рядов Фурье.

Преобразование Фурье интегрируемых, квадратично интегрируемых функций и его свойства. Теорема Планшереля.

Преобразование Лапласа и восстановление функции по ее изображению.

Преобразование Фурье-Стилтьеса. Понятие о проблеме моментов.

Понятие о вейвлет-преобразованиях.

Интегрирование по многообразиям

Гладкие и кусочно-гладкие многообразия. Дифференциальные формы, внешний дифференциал, перенос дифференциальных форм. Интеграл от дифференциальной формы по многообразию, его сведение к интегралу по области в евклидовом пространстве. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа как частные случаи общей формулы Стокса. Объем многообразия и площадь поверхности его края. Среднее значение функционала в области на подмногообразии меньшей размерности. Сравнение средних по области и по ограничивающей ее поверхности. Вращение векторного поля на границе поверхности.

Интегральные представления аналитических и гармонических функций

Интеграл абстрактной функции комплексной переменной по кривой в комплексной плоскости. Условия аналитичности функции комплексной переменной. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем и принцип максимума для гармонических функций. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

Образовательные технологии

Успешное освоение материала курса «Теория меры и интеграла» предполагает большую самостоятельную работу аспирантов и руководство этой работой со стороны преподавателей. Основой методики преподавания дисциплины должен быть мыследеятельностный подход в математическом образовании. При реализации курса используются элементы следующих образовательных технологий:

- продуктивное обучение (образовательный процесс направлен на самостоятельное реконструирование системы знаний по дисциплине);
- контекстное обучение (образовательный процесс погружён в контекст будущей преподавательской и/или исследовательской деятельности аспиранта);
- технология развития критического мышления (образовательный процесс опирается на рефлексивную работу с математическими текстами);
- технологии взаимобучения, кооперативного обучения (в различных организационных формах, в зависимости от численности группы), при возможности – с использованием принципов социально-психологического обучения.

Реализация указанных технологий предполагает использование исследовательских и проектных методов обучения, различных приёмов визуализации математического содержания, диалогических форм взаимодействия преподавателя и аспирантов. В процессе обучения широко применяются информационно-коммуникационные технологии, как для ресурсного поиска и обмена информацией, так и для презентации интеллектуальных и педагогических продуктов.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов

Самостоятельная работа аспирантов имеет основную цель – обеспечить качество подготовки выпускаемых специалистов в соответствии с требованиями основной программы высшего образования – программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по профилю «Вещественный, комплексный и функциональный анализ». Самостоятельная работа при освоении дисциплины «Теория меры и интеграла» способствует:

- 1) формированию системных знаний в области вещественного анализа в его взаимосвязи с другими разделами математики;
- 2) освоению приёмов доказательных рассуждений, специфичных для математического анализа в целом и вещественного анализа в частности;
- 3) формированию исследовательской позиции применительно к изучению и преподаванию современной математики;

- 4) развитию исследовательских навыков и креативных способностей в области математики.

К самостоятельной работе относятся:

- самостоятельная работа на аудиторных занятиях (лекциях, практических занятиях);
- внеаудиторная самостоятельная работа.

В процессе обучения предусмотрены следующие виды самостоятельной работы обучающегося:

- работа с конспектами лекций; постановка вопросов по теме лекции;
- проработка математического содержания темы по конспекту лекций, учебникам и пособиям на основании вопросов, подготовленных преподавателем либо самим аспирантом;
- проработка дополнительных тем, не вошедших в лекционный материал, но обязательных согласно учебной программе дисциплины;
- изучение, анализ, реферирование обязательной и дополнительной литературы, сопоставление различных подходов к построению математических теорий;
- написание рефератов по отдельным разделам дисциплины; подготовка научных докладов и творческих работ;
- решение сформулированных преподавателем и/или самостоятельно поставленных задач по основным разделам курса; разработка систем заданий по курсу; работа над проектами;
- подготовка к текущему и промежуточному контролю знаний.

В целях фиксации результатов самостоятельной работы аспирантов по дисциплине проводится аттестация самостоятельной работы. Контроль результатов самостоятельной работы осуществляется преподавателем в течение всего семестра. При освоении дисциплины могут быть использованы следующие формы контроля самостоятельной работы:

- 1) реферат,
- 2) коллоквиум,
- 3) тестовый контроль,
- 4) другие по выбору преподавателя.

Научный руководитель организует самостоятельную работу аспиранта в соответствии с рабочим учебным планом и графиком, рекомендованным преподавателем. Аспирант должен выполнить объем самостоятельной работы, предусмотренный рабочим учебным планом, максимально используя возможности индивидуального творческого и научного потенциала для освоения образовательной программы в целом.

Самостоятельная работа аспирантов может носить репродуктивный, частично-поисковый и поисковый характер. Самостоятельная работа, носящая репродуктивный характер, предполагает, что в процессе работы аспиранты пользуются методическими материалами и методическими пособиями, в которых указывается, в какой последовательности следует изучать материал дисциплины, обращается внимание на особенности изучения отдельных тем и разделов. Самостоятельная работа, носящая частично-поисковый и поисковый характер, нацеливает аспирантов на самостоятельный выбор способов выполнения работы, на развитие у них навыков творческого мышления, инновационных методов решения поставленных задач.

Для анализа организации своей самостоятельной работы аспиранту рекомендуется в письменной форме ответить на предлагаемые вопросы и затем критически проанализировать, насколько эффективно он работает самостоятельно.

Во время самостоятельной работы обучающиеся обеспечены доступом к базам данных и библиотечным фондам, а также доступом к сети Интернет.

Фонд оценочных средств

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

№ п/п	КОНТРОЛИРУЕМЫЕ МОДУЛИ, РАЗДЕЛЫ (ТЕМЫ) ДИСЦИПЛИНЫ	НАИМЕНОВАНИЕ ОЦЕНОЧНОГО СРЕДСТВА	КОД ФОРМИРУЕМОЙ КОМПЕТЕНЦИИ <i>общепрофессиональные компетенции (ОПК):</i> ОПК-1	КОД ФОРМИРУЕМОЙ КОМПЕТЕНЦИИ <i>профессиональные компетенции (ПК):</i>	
				ПК- 1	ПК- 2
1	Тема 1. Общая теория меры	Реферат			
2	Тема 2. Общая теория интеграла	Реферат			
3	Тема 3. Интегрирование и дифференцирование.	Проект			
4	Тема 4. Интегральные преобразования.	Реферат			
5	Тема 5. Интегрирование по многообразиям.	Проект			
6	Тема 6. Интегральные представления аналитических и гармонических функций.	Реферат			
		НАИМЕНОВАНИЕ ОЦЕНОЧНОГО СРЕДСТВА	ОС 1-2	ОС 1-2	ОС 1-2

Оценочное средство 1. Реферат.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Кафедра высшей математики

Реферат по дисциплине «Теория меры и интеграла»

Задание: подготовить реферат по выбранному фрагменту темы.

Примерная тематика рефератов по теме 1:

1. Общее понятие меры.
2. Лебегово продолжение меры.
3. Конструкции мер.
4. Измеримые функции.
5. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере.

Примерная тематика рефератов по теме 2:

1. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана.
2. Свойства интеграла по произвольной мере, по произвольному заряду. Прямые произведения мер и теорема Фубини.
3. Пространства суммируемых функций (относительно данной меры). Случай дискретной (в том числе считающей) меры, случай меры Лебега.
4. Пространства суммируемых функций в теории случайных процессов.
5. Интеграл абстрактной функции действительной переменной.

Примерная тематика рефератов по теме 4:

1. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.
2. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.
3. Преобразование Лапласа, его свойства и применение.
4. Преобразование Фурье-Стилтьеса.
5. Преобразование Фурье обобщенных функций.

Примерная тематика рефератов по теме 6:

1. Применение аналитических функций для расчета плоских векторных полей.
2. Интегральная формула Коши.
3. Интеграл типа Коши. Предельные значения интеграла типа Коши.
4. Формула Пуассона. Задача Дирихле для гармонической функции.
5. Интегральная формула Бореля-Помпею.

Требования к оформлению реферата:

1. Объем: 5-10 страниц. В рекомендуемый объем работы не входят титульный лист, план, список литературы и приложения.
2. Шрифт – Times New Roman.

3. Размер шрифта – 14.
4. Выравнивание текста – по ширине, кроме титульного листа.
5. Междустрочный интервал – 1,5.
6. Отступ: 1,25.
7. Параметры страницы: размер – А4, поля: сверху, снизу – 2 см, справа – 1,5 см, слева – 2,5 см.
8. Структура реферата:
 - Титульный лист
 - План
 - Основной текст реферата
 - Список литературы (не менее 5 источников)
 - Приложение (не обязательно)

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

РЕФЕРАТ
по дисциплине «Теория меры и интеграла»

(ТЕМА РЕФЕРАТА)

Выполнил(а):
аспирант(ка) 2 курса
очного (заочного) отделения
Ф.И.О. (полностью)

Проверил(а): должность,
ФИО.

Ульяновск, 2016

Оценочное средство 2. Проект.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Кафедра высшей математики

Проект по дисциплине «Теория меры и интеграла»

Задание: разработать проект, включающий краткое изложение необходимого теоретического материала, постановку исследовательской задачи, описание методов решения задачи, изложение основных результатов.

Примерная тематика проектов по теме 3:

1. Класс монотонных функций и класс функций ограниченной вариации.
2. Неопределенный интеграл Лебега. Восстановление функции по ее производной.
3. Функции множеств и их применения в теории интегрирования.
4. Неопределенный интеграл Перрона.
5. Абстрактно заданный интеграл и его обобщения.

Примерная тематика проектов по теме 6:

1. Интеграл от дифференциальной формы по многообразию, его сведение к интегралу по области в евклидовом пространстве.
2. Основные интегральные формулы как частные случаи общей формулы Стокса.
3. Объем многообразия и площадь поверхности его края.
4. Среднее значение функционала в области на подмногообразии меньшей размерности.
5. Вращение векторного поля на границе поверхности.

Итоговый контроль проводится в виде зачета.

Примерные вопросы к зачету

Раздел «Общая теория меры»

1. Мера как аддитивная функция множеств. Счетная аддитивность (σ -аддитивность) меры. Конструкция лебегова продолжения. Конечные и σ -конечные меры. Измеримые пространства и пространства с мерой.
2. Борелевская σ -алгебра подмножеств пространства \mathbf{R}^n . Мера Жордана для ограниченных подмножеств пространства \mathbf{R}^n . Мера Лебега линейных множеств, множеств в пространстве \mathbf{R}^n . Сравнение меры Жордана с мерой Лебега.
3. Заряд (мера Радона) как σ -аддитивная функция множеств. Заряд как разность двух положительных мер (разложение Хана, разложение Жордана). Пространство зарядов. Заряд, абсолютно непрерывный относительно заданной меры; заряд, сингулярный относительно заданной меры. Характеристика абсолютно непрерывных зарядов как непрерывных функционалов на метрическом пространстве множеств, эквивалентных относительно данной меры.
4. Измеримые функции и их свойства. Сходимость функциональной последовательности по мере и почти всюду. Теорема Егорова. Теорема Лузина.
5. Приложения теории меры в теории вероятностей.

Раздел «Общая теория интеграла»

6. Интеграл как продолжение линейного функционала с множества простых функций на измеримом пространстве. Интеграл Лебега.
7. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Сравнение интегралов Лебега и Римана.
8. Интеграл Лебега-Стилтьеса, сравнение с интегралом Римана-Стилтьеса. Свойства интеграла по произвольной мере, по произвольному заряду.
9. Прямые произведения мер и теорема Фубини.
10. Пространства суммируемых функций (относительно данной меры). Случай дискретной (в том числе считающей) меры, случай меры Лебега. Приложения в теории вероятностей.

Раздел «Интегрирование и дифференцирование»

11. Дифференцирование и интегрирование как взаимно обратные операции в классическом анализе. Постановка проблемы в случае интегрирования по Лебегу и дифференцирования почти всюду.
12. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченной вариацией и их представление в виде суммы возрастающей и убывающей функций.
13. Производная неопределенного интеграла Лебега. Интеграл Лебега-Стилтьеса и его дифференцирование.
14. Абсолютно непрерывные функции и их связь с мерами, абсолютно непрерывными относительно меры Лебега. Теорема Радона-Никодима. Плотность заряда относительно меры Лебега.
15. Лебегово разложение меры. Представление монотонной функции в виде суммы абсолютно непрерывной функции, ступенчатой функции и сингулярной компоненты.

Раздел «Интегральные преобразования»

16. Дискретное преобразование Фурье и его свойства. Ряды по ортонормированным системам в гильбертовом пространстве, стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

17. Понятие сингулярного интеграла. Представление функции сингулярным интегралом в заданной точке. Приложения в теории рядов Фурье.
18. Преобразование Фурье интегрируемых, квадратично интегрируемых функций и его свойства. Теорема Планшереля.
19. Преобразование Лапласа и восстановление функции по ее изображению. Приложения операционного исчисления
20. Преобразование Фурье—Стилтьеса. Понятие о проблеме моментов.

Раздел «Интегрирование по многообразиям»

21. Гладкие и кусочно-гладкие многообразия. Касательное пространство, касательное расслоение.
22. Дифференциальные формы, внешний дифференциал, перенос дифференциальных форм.
23. Интеграл от дифференциальной формы по многообразию, его сведение к интегралу по области в евклидовом пространстве.
24. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа как частные случаи общей формулы Стокса.
25. Объем многообразия и площадь поверхности его края. Среднее значение функционала в области на подмногообразии меньшей размерности. Сравнение средних по области и по ограничивающей ее поверхности.

Раздел «Интегральные представления аналитических и гармонических функций»

26. Условия аналитичности функции комплексной переменной. Интегральная теорема Коши. Теорема Мореры.
27. Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Лемма Шварца.
28. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.
29. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций.
30. Теорема о среднем и принцип максимума для гармонических функций. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

Критерии формирования зачетной оценки

Цель зачета по дисциплине «Теория меры и интеграла» - проверить усвоение основной проблематики курса, свободное владение терминологией вещественного и функционального анализа, знание основных изученных в курсе определений и теорем, понимание идей основанных на них алгоритмов, умение проводить доказательные рассуждения, анализировать и критически оценивать фрагменты математических текстов.

Зачет принимает преподаватель, ведущий лекционные занятия по данной дисциплине. Зачет проводится очно, в устной форме, по билетам, в учебной аудитории. Билет включает теоретические вопросы из программы зачета, задачи (на вычисление интеграла либо интегрального преобразования, применение интегрального преобразования к решению уравнений, на проверку истинности утверждений, на иллюстрацию утверждений примерами, на поиск контрпримеров). Билет может включать также вопросы тестового характера, в этом случае предполагается письменный ответ. Билетов должно быть не менее чем на 20% больше числа аспирантов в учебной группе. Предварительное ознакомление аспирантов с билетами не разрешается. Кроме указанных в билете вопросов, преподаватель имеет право задавать дополнительные вопросы с целью уточнения объема знаний аспирантов и оценки качества

усвоения теоретического материала и практических навыков и умений. Разрешается использование аспирантом справочных материалов.

Оценка «зачтено» ставится, если	Оценка «не зачтено» ставится, если
<ul style="list-style-type: none"> • аспирант раскрыл основное содержание теоретических вопросов билета, корректно сформулировал необходимые результаты и привел верное доказательство части этих результатов (по своему выбору); 	<ul style="list-style-type: none"> • аспирант не раскрыл содержание хотя бы одного из теоретических вопросов билета, либо допустил принципиальные ошибки при формулировке какого-либо из основных результатов, либо не привел доказательства ни одного из сформулированных результатов или же приведённое рассуждение содержало принципиальные ошибки; либо
<ul style="list-style-type: none"> • аспирант продемонстрировал умение решать базовые задачи по дисциплине; • аспирант правильно отвечает на большинство вопросов теста (при условии включения в билет тестовой части – не менее 50% верных ответов); 	<ul style="list-style-type: none"> • аспирант не справился с решением задач алгоритмического характера по дисциплине, с тестовыми вопросами при условии их включения в билет (менее 50% верных ответов); либо
<ul style="list-style-type: none"> • аспирант в основном верно ответил на дополнительные вопросы, демонстрирует понимание основного содержания дисциплины и возможностей её приложений. 	<ul style="list-style-type: none"> • аспирант не ответил на дополнительные вопросы по дисциплине, даже с учётом помощи преподавателя.

Оценка "зачтено" ставится, если аспирант ответил на поставленные вопросы. Аспиранты, не сдавшие зачет, сдают его повторно в соответствии с графиком, разработанным отделом подготовки научно-педагогический кадров.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература

1. Быкова, О.Н. Теория функций действительного переменного : Учебное пособие. - Москва ; Москва : ООО "КУРС" : ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2016. - 196 с. - URL: <http://znanium.com/go.php?id=543159>
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. [Текст] : [в 2 т.] Том 1: Начала теории. Учебник для матем. и физ. спец. вузов. СПб.: Лань, 2009. 486 с. (Библиотека УлГПУ)
3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций [Текст] : [в 2 т.] : учебник. Т. 2 : Дальнейшее построение теории. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. - 624 с. (Библиотека УлГПУ)
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. СПб.: Лань, 2008. 560 с. (Библиотека УлГПУ)
5. Халмош П. Теория меры. М.: Факториал Пресс, 2003. 256 с. (Библиотека УлГПУ)

Дополнительная литература

6. Авраменко, В.С. Теория функций действительного переменного : учебное пособие. 1 / В.С. Авраменко. - Елец : Елецкий государственный университет им И.А. Бунина, 2011. - 100 с. URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=271996>
7. Бурбаки Н., Элементы математики [Текст]. [Кн.6]: Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1977. (Библиотека УлГПУ)
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 1981. 572 с. (Библиотека УлГПУ)
9. Леонтьева, Т. А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями : Учебное пособие. - Москва : ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2013. – 164 с. URL: <http://znanium.com/go.php?id=377270>
10. Львовский, С. М. Лекции по комплексному анализу : курс лекций / С.М. Львовский. - Изд. 2-е, стереотип. - Москва : МЦНМО, 2009. - 136 с. URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63178>
Львовский, С. М. Лекции по математическому анализу : курс анализа / С.М. Львовский. - Москва : МЦНМО, 2008. - 296 с. <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63277>
11. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: ЛКИ, 2007. 302 с. (Библиотека УлГПУ)
12. Шабунин, М.И. Теория функций комплексного переменного [Текст] : [учебник для вузов]. - Москва : Лаборатория знаний, 2016. - 300 с. (Библиотека УлГПУ)

Информационное обеспечение дисциплины

1. <http://www.mathnet.ru/> - Общероссийский математический портал (свободный доступ к полным текстам статей журналов Академиздатцентра "Наука" РАН).
2. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm> (библиотека «Мир математических уравнений», книги по математике, математический анализ, функциональный анализ).
3. <http://www.mcsme.ru> – Московский центр непрерывного математического образования.
4. <http://ium.mcsme.ru/courses.php> - Московский центр непрерывного математического образования, библиотека курсов Независимого Московского университета.
5. <http://lib.mexmat.ru/books> - Электронная библиотека Попечительского совета МГУ.
6. <http://math-portal.ru>
7. <http://reslib.com> – Research library
8. <http://projecteuclid.org>
9. <http://www.springerlink.com>
10. <http://www.encyclopediaofmath.org>
11. <http://myweb.facstaff.wvu.edu>

Материально-техническое обеспечение дисциплины «Теория меры и интеграла»

Образовательный процесс обеспечивается достаточным аудиторным фондом, оснащённым необходимым учебным оборудованием.

Для проведения лекционных занятий могут быть использованы лекционные аудитории; специализированные лекционные аудитории (оснащённые аудиовизуальными и мультимедийными средствами). Для проведения практических занятий, а также промежуточного и итогового тестирования используются малые аудитории, компьютерные классы.

Для проведения аудиторных занятий:

Наименование специализированных аудиторий и лабораторий	Перечень оборудования
Аудитория № 417 (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	Посадочные места – 50 Преподавательский стол – 1 шт. Столы ученические двухместные – 14 шт. Столы ученические трехместные – 8 шт. Тумба под компьютер – 1 шт. Встроенные шкафы – 2 шт. Стулья – 50 шт. Мультимедийный класс в составе: интерактивная система SMART Board SB 685. Ноутбук HP Pavilion g6-2364. Доска – 1 шт. Жалюзи – 3 шт. Стул из кожи черный – 1 шт.

Помещения для самостоятельной работы аспирантов:

компьютерные классы (с выходом в Интернет), библиотека (с выходом в Интернет)

Медиацентр (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	73 моноблока, соединённых локальной компьютерной сетью; беспроводная сеть Wi-Fi; стационарный проектор; экран; 5 ЖК-мониторов, 2 ЖК-панели; система видеоконференцсвязи – PolycomHDX6000HD; акустическая система: вокальная аудиосистема и акустические колонки. Секционные столы-18шт.
Читальный зал (электронная библиотека, (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	Ноутбуки 15,6 ACER Packard Bell EasyNote ENTE11HC-B9604G50MNKS 8 шт. Ноутбук Lenovo IdeaPad B590 Intel Pentium Dual-Core B960 2.2ГГц 4G/500G/DVD-RW15.6*/Windows 7 Home -7шт.