Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«25» июня 2021г.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Программа учебной дисциплины модуля
«Содержательные аспекты современного математического образования»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки
44.04.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Методология математического образования

(очная форма обучения)

Составитель: Фолиадова Е.В., доцент
кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Элементы математической экономики» относится к дисциплинам модуля «Содержательные аспекты современного математического образования» Блока 1. *Дисциплины (модули)* части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Методология математического образования», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках математических дисциплин образовательных программ бакалавриата, а также дисциплины Б1.В.01.01. «Динамические системы», дисциплин по выбору Б1.В.01.ДВ.01.01/02/03 «Задачи оптимизации и их математические модели»/ «Вариационные методы и модели»/ «Теория принятия решений».

Результаты освоения дисциплины являются основой для научно-исследовательской работы магистрантов.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целями освоения дисциплины «*Элементы математической экономики*» являются:

- систематизация и углубление представлений магистрантов о специфике математического моделирования, о методологии использования математических моделей и методов в различных областях знания, в частности, в анализе экономических проблем;
- формирование представлений о процессе математического исследования прикладных, в частности, экономических задач, его важнейших этапах, чертах, особенностях постановки проблемы и представления результатов;
- углубление знаний в области фундаментальных разделов математики за счет изучения конкретных приложений.

В соответствии с этим при преподавании дисциплины ставятся следующие **задачи**:

- рассмотрение конкретных образцов исследования в областях математики, связанных с экономическими приложениями;
- формирование умений, связанных с чтением специальной научной (из предметных областей, связанных с экономикой) и математической литературы;
- актуализация и совершенствование понятийного аппарата, необходимого для исследований в области алгебры, математического анализа и их приложений в экономической сфере;
- формирование приемов мыслительной деятельности, связанных с обобщением (абстрагированием) и конкретизацией математических понятий, с моделированием внематематических понятий на языке математики, с интерпретацией результатов работы с математической моделью на языке исходной задачи;
- формирование методической грамотности и умений анализировать различные варианты построения математических моделей, проектировать на основе избранного варианта учебный процесс для конкретной целевой аудитории..

В результате освоения программы магистрант должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и	Образовательные результаты дисциплины

индикаторы ее достижения в дисциплине	(этапы формирования дисциплины)		
	Знает	Умеет	владеет
УК-1. Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий. ИУК 1.3. Рассматривает различные варианты решения проблемной ситуации на основе системного подхода, оценивает их преимущества и риски. ИУК 1.4. Грамотно, логично, аргументированно формулирует собственные суждения и оценки. Предлагает стратегию действий.	ОР-1. Приемы и методы выработки стратегии действий по разрешению проблемной ситуации. ОР-2 о существовании различных вариантов решения проблемной ситуации на основе системного подхода, методах оценки преимуществ и рисков как результатов принятого решения.	ОР-3 Грамотно, логично, аргументированно формулировать собственные суждения и оценки, вырабатывать стратегию действий	
ПК-2. Способен проектировать и реализовывать учебные программы математических дисциплин (модулей) для образовательных организаций разных уровней образования. ИПК 2.1. Знает содержание основных нормативных документов,	ОР-4. структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и	ОР-5. проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч.	

регламентирующих математическое образование на разных уровнях; структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-методического обеспечения современного процесса обучения математике. ИПК 2.2. Умеет проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.	реализации; виды учебно-методического обеспечения современного процесса обучения математике.	элективных, программы внеурочной деятельности.	

В результате освоения дисциплины «*Элементы математической экономики»* обучающийся должен:

знать

- основные классы математических структур, применяемые при моделировании экономических процессов;
- особенности применения основных идей дифференциального исчисления, интегрального исчисления. теории дифференциальных уравнений, теории разностных уравнений, вариационного исчисления при решении экономических задач, например, понятие эластичности функции;
- наиболее употребительные типы моделей микро- и макроэкономических процессов (модель Леонтьева, модель Солоу и др.);
- основные результаты теории матричных и кооперативных игр и возможности их применения при анализе экономических процессов;
- ***иметь представление*** о современных направлениях развития математической экономики, применении методов функционального анализа при исследовании экономических процессов;

уметь

- анализировать условия равновесия экономических систем с использованием различных стандартных моделей экономики;
- строить модели и решать задачи оптимизации экономических процессов (задачи линейного программирования, некоторые задачи нелинейного математического программирования, вариационного исчисления; применять идеи и алгоритмы динамического программирования);
- находить интегральные характеристики экономических процессов средствами теории рядов и интегрального исчисления;

- моделировать ситуации конфликта интересов двух или нескольких участников рынка средствами теории игр, находить решение игры в изученных случаях;

владеть

- основами терминологии математической экономики, понимать ее связи с математической терминологией;
- навыками чтения математического текста, экономического текста, способами осмысления и критического анализа научной информации;
- базовым понятийным аппаратом линейной алгебры, абстрактной алгебры, математического анализа, функционального анализа, теории игр как языком современной математической экономики;
- навыками совершенствования и развития своего научного потенциала, самообразования в области математики, ее приложений, ее преподавания.

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоятельная работа, час	
	Трудоемкость						
	Зач. ед.	Часы					
4	5	180	6	40	-	107	Экзамен
Итого:	5	180	6	40	-	107	27

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Отбор содержания дисциплины определяется необходимостью знакомства магистрантов с основными классическими и современными подходами к исследованию экономических проблем средствами математики. Основное внимание предлагается уделить базовым принципам построения математических моделей в области экономики, а также способам решения «школьных» задач экономического содержания и основам применения соответствующих инструментов, в том числе компьютерных сред.

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
4 семестр				
1. Некоторые классы оптимизационных моделей в экономике: линейное и линейное целочисленное программирование.	-	10	-	20
2. Модели поведения потребителя. Нелинейные модели (динамическое программирование) в решении экономических задач	2	6	-	18
3. Матричные модели экономики. Модели экономического равновесия. Модели экономического роста.	2	4	-	24
4. Игры как модели экономического поведения	2	4	-	20
5. Элементы финансовой математики	-	16	-	25
Всего по дисциплине:	**6**	**40**	**-**	**107**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Тема 1. Некоторые классы оптимизационных моделей в экономике: линейное и нелинейное программирование, вариационное исчисление.

Задачи линейного программирования как модели экономического поведения. Симплекс-метод и экономическая интерпретация компонент алгоритма. Двойственность в задачах линейного программирования: теневые цены.

Дополняющая нежесткость. Лемма Фаркаша. Выпуклое программирование в экономических задачах. Теоремы Куна-Таккера. Свойства седловой точки. Свойства функции наилучшего значения.

Примеры экономических задач, приводящих к вариационным моделям. Задачи теории оптимального управления как модели экономического поведения. Принцип максимума. Достаточные условия существования решения. Свойства функции наилучшего значения.

Интерактивные формы: Коллективное исследование «Матричные модели экономики и условия экономического равновесия».

Тема 2. Модели поведения потребителя. Нелинейные модели (динамическое программирование) в решении экономических задач

Отношение предпочтения. Функция полезности.

Максимизация полезности. Функция косвенной полезности. Функция спроса потребителя. Равенство Роя. Функции издержек. Функции спроса по Хиксу. Эластичности Курно, Энгеля и Слуцкого. Уравнение Слуцкого. Эквивалентное и

компенсирующее изменения. Специальные формы функций — модели с линейными издержками, с почти идеальным спросом и транслогарифмическая функция издержек. Индексы цен. Идеальный индекс Фишера.

Абсолютная и относительная несклонность к риску. Премия за риск Эрроу-Пратта. Стохастическое доминирование первой и второй степени. Теорема Адара-Рассела. Теорема Ротшильда-Штиглица.

Динамические модели. Задачи о кратчайшем маршруте, о найме сезонных рабочих, задачи об инвестировании и об оптимальном распределении сотрудников. Задачи об оптимальной загрузке

Тема 3. Матричные модели экономики. Модели экономического равновесия. Модели экономического роста.

Свойства идемпотентной матрицы, ортогональной матрицы и матрицы перестановок. Неотрицательные матрицы. Корни Фробениуса. Разложимые матрицы. Матрицы с доминирующей главной диагональю. Системы Леонтьева.

Условия равновесия. Отношения взаимной зависимости. Монотонная сравнительная статика. Полурешетки. Супермодулярность. Возрастающие различия. Функция затрат. Условная функция спроса на факторы производства. Лемма Шеппарда. Функция прибыли. Функции спроса на факторы производства. Функция предложения. Лемма Хотеллинга. Уравнение Пу.

Определение эластичности. Правило Маршалла. Свойства эластичности. Эластичность по направлению. Предельная норма замены. Эластичность замены.

Эластичность замены в теории производства. Эластичности замены по Аллену-Узаве и по Моришиме. Функции Кобба-Дугласа и с постоянной эластичностью замены. Закон минимума, функции затрат Дьюверта и транслогарифмическая.

Применение теорем о неподвижных точках (Банаха, Шаудера, Брауэра, Какутани) к нахождению условий экономического равновесия.

Сложные проценты. Эффективный годовой процент. Текущая стоимость. Внутренняя норма доходности. Правило Норстрёма. Непрерывная капитализация процентов. Модель роста Солоу. Модель роста Рамсея.

Интерактивные формы: Работа в микрогруппах «Задачи оптимизации в экономике»..

Тема 4. Игры как модели экономического поведения.

Антагонистическая игра двух лиц. Классический принцип минимакса для случая игры двух лиц с нулевой суммой. Строго доминирующие стратегии. Матричные игры, верхняя и нижняя цена игры, решение игры в чистых стратегиях (седловая точка), цена игры. решение игры в смешанных стратегиях, теорема Неймана о существовании решения в смешанных стратегиях. Применение линейного программирования к решению матричных игр.

Игра п лиц в стратегической форме. Равновесие по Нэшу. Смешанные стратегии. Симметричная игра. Свойство седловой точки равновесия по Нэшу. Эволюционная теория игр.

Понятие о кооперативных играх, коалиции и дележи.

Понятие о дифференциальных играх. Игра преследования.

Игры с природой.

Интерактивные формы: Круглый стол «Различные принципы оптимальности в проблемах теории игр». Учебно-методическая дискуссия «Изучение элементов теории игр на различных ступенях математического образования»..

Тема 5. Элементы финансовой математики.

Рост стоимости финансов. Банковские и кредитные продукты с точки зрения математики. Типовые модели расчёта стоимости кредита.

Задачи «на вклады и кредиты» в Государственной итоговой аттестации по математике. Возможности встраивания элементов финансовой математики в программы математического образования для средней школы.

Интерактивные формы. Деловая игра «Экспертное оценивание работ выпускников средней школы на Едином государственном экзамене (задача экономического содержания)».

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Общий объем самостоятельной работы магистрантов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную (107 часов) самостоятельную работу в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется преимущественно в малых группах, с использованием технологий взаимообучения. Дидактические материалы для организации работы разрабатываются самими магистрантами в ходе внеаудиторной самостоятельной работы (обмен заданиями между малыми группами).

Внеаудиторная самостоятельная работа нацелена на диагностику и совершенствование умений магистрантов осваивать прикладные разделы математики. Эта деятельность включает также разработку консультационных материалов по отдельным темам, решение прикладных задач, в том числе исследовательского характера. Соответствующие источники указаны в разделе 6, выбор осуществляет преподаватель.

Перечень рассматриваемых ресурсов пополняют в ходе освоения дисциплины сами магистранты, т.е. комплект дидактических материалов окончательно формируется уже в ходе реализации программы (что соответствует системно-деятельностному подходу к организации образования).

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине «Элементы математической экономики»

Структура контрольных работ по дисциплине

1. Домашние контрольные задания.

1.1. Изучить одну из экономических проблем (по указанию преподавателя), для этого рассмотреть историю вопроса (по научным обзорам или сетевым материалам), подробно разобрать одну из оригинальных научных статей, посвященных решению проблемы, выделить приемы построения модели и работы с моделью, использованные для получения решения. Рассмотреть вопрос о дидактической целесообразности использования тематики статьи (или близкой тематики) для организации проектной деятельности школьников или студентов. Форма отчета: конспект статьи с пояснениями.

1.2. Решить задачу на нахождение точки равновесия экономической системы.

1.3. Решить задачу на нахождение оптимальной стратегии действий в детерминированной ситуации.

1.4. Решить задачу на нахождение оптимальной стратегии в условиях игры двух лиц.

2. Аудиторная контрольная работа.

2.1. Тест по основным понятиям математической экономики**.**

2.2. Задача (экстремального содержания, уровня КИМ ЕГЭ).

2.3. Задача (связанная с банковскими вкладами и кредитами, уровня КИМ ЕГЭ).

Пример задания для домашней контрольной работы

1. Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспашет одно поле втрое быстрей, чем второй, а третьему трактору на эту же работу потребуется времени на два часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за семь часов двенадцать минут. Найдите наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все трактора начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любому трактору требуется сорок минут.

Примеры заданий для аудиторной контрольной работы

1. В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 800 000 рублей (размер премии каждого сотрудника - целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 250 купюр по 1000 рублей и 110 купюр по 5000 рублей.

   а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

   б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 80 000 рублей, а остальное поделить поровну на 80 сотрудников?

   в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?
2. В начале января 2017 года планируется взять кредит в банке на S млн. рублей, где S – целое число, на 4 года. Условия его возврата таковы:

- каждый июль долг возрастает на 10% по сравнению с началом текущего года;
- с августа по декабрь каждого года необходимо выплатить часть долга; - в январе каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии с заданной таблицей:

Найдите наибольшее значение S, при котором разность между наибольшей и наименьшей выплатами не будет превышать 2 млн. руб.

ОС-4. Выступление с докладом по микрогруппам.

Примерный перечень тем докладов:

1. Задачи нелинейного программирования в управлении персоналом
2. Квадратичное программирование. Понятие о квадратичных и билинейных формах.
3. Положительно-определённые квадратичные формы, угловые миноры и способ Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Определение максимумов и минимумов с помощью матриц Якоби.
4. Линейные операторы в экономике
5. Применение собственных значений к оценке рентабельности производства
6. Методы динамического программирования в решении задачи о замене оборудования
7. Сетевое планирование и составление расписаний.
8. Теория игр в управлении кадрами.

ОС-5 Творческая разработка

Разрабатывается программы элективного курса или проектно-исследовательской работы для школьников по тематике применения математических методов в экономике. Делается выступление, представляющее фрагмент мероприятия, программа сдается в письменной форме.

ОС-6. Составление тестов

Составляются контрольно-измерительные материалы по теме занятия в форме тестов и/или кейс-заданий.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

Глухова Н.В. Методы оптимизации использования трудовых ресурсов. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 50 с.

Столярова И.В, Сидорова Н.В., Куренева Т.Н., Каширская Ю.С. Проектная деятельность в обучении математике: учебно-методические рекомендации для бакалавров и магистрантов направления подготовки Педагогическое образование. –Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017.- 18 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Цель проведения аттестации – диагностика сформированности запланированных образовательных результатов. Для проверки освоения программы дисциплины «Элементы математической экономики» используются технологии формирующего оценивания (текущая аттестация) и суммативного оценивания (промежуточная аттестация в форме экзамена, завершающая изучение дисциплины).

Оценочными средствами текущего оценивания являются: выступление с мини-докладом, участие в работе микрогруппы, в коллективном исследовании. Контроль формирования компетенций ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

Подробное описание необходимого оборудования (демонстрационного материала), а также процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1, ОС-2, Самостоятельная работа ОС-3. Контрольная работа ОС-4 Выступление с докладом по результатам группового интерактивного задания 1 ОС-5. Творческая разработка Ос-6. Составление тестов	ОР-1. Знает приемы и методы выработки стратегии действий по разрешению проблемной ситуации. ОР-2 Знает о существовании различных вариантов решения проблемной ситуации на основе системного подхода, методах оценки преимуществ и рисков как результатов принятого решения. ОР-3 умеет грамотно, логично, аргументированно формулировать собственные суждения и оценки, вырабатывать стратегию действий. ОР-4. знает структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-методического обеспечения современного процесса обучения математике. ОР-5 умеет проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-7 Экзамен в форме устного собеседования	

Промежуточная аттестация (экзамен) проводится в форме участия в учебной конференции (публичная презентация самостоятельно разработанного дидактического материала по одному из вопросов математической экономики (выбор темы осуществляется магистрантами по согласованию с преподавателем).

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Программа экзамена по дисциплине

1. Матричные модели в экономике. Системы Леонтьева.
2. Условия равновесия. Отношения взаимной зависимости.. Применение принципов неподвижной точки к анализу положений равновесия.
3. Функция затрат. Условная функция спроса на факторы производства. Лемма Шеппарда. Функция прибыли. Функции спроса на факторы производства. Функция предложения.
4. Понятие эластичности функции. Свойства эластичности. Эластичность по направлению. Предельная норма замены. Эластичность замены в теории производства.
5. Сложные проценты. Эффективный годовой процент. Текущая стоимость. Внутренняя норма доходности.
6. Модель роста Солоу. Модель роста Рамсея.
7. Отношение предпочтения. Функция полезности. Максимизация полезности.
8. Функция спроса потребителя. Равенство Роя. Функции издержек. Функции спроса по Хиксу. Эластичности Курно, Энгеля и Слуцкого. Уравнение Слуцкого.
9. Индексы цен.
10. Задачи линейного программирования как модели экономического поведения. Двойственность. Теневые цены. Дополняющая нежесткость.
11. Лемма Фаркаша. Выпуклое программирование. Теоремы Куна-Таккера. Свойства седловой точки.
12. Задачи теории оптимального управления как модели экономического поведения. Принцип максимума. Достаточные условия существования решения.
13. Антагонистическая игра двух лиц. Классический принцип минимакса для случая игры двух лиц с нулевой суммой. Строго доминирующие стратегии. Матричные игры, верхняя и нижняя цена игры, решение игры в чистых стратегиях (седловая точка), цена игры.
14. Понятие смешанной стратегии в матричной игре, решение игры в смешанных стратегиях, теорема Неймана о существовании решения в смешанных стратегиях. Применение линейного программирования к решению матричных игр.
15. Равновесие по Нэшу. Смешанные стратегии. Симметричная игра. Свойство седловой точки равновесия по Нэшу.
16. Понятие о кооперативных играх, коалиции и дележи.
17. Различные модели кредитования.
18. Виды финансовых инструментов и принципы расчёта их стоимости.

ФОРМИРОВАНИЕ БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ РАБОТЫ МАГИСТРАНТА

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
4 семестр	Разбалловка по видам работ	1 х 3=3 балла	20 х 1= 20 баллов	349 баллов	128 баллов
	Суммарный макс. балл	3 балла Max	23 баллов max	372 балла max	500 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

По итогам освоения дисциплины «Элементы математической экономики», которая изучается в 4 семестре и трудоёмкость которой составляет 5 ЗЕ, магистрант набирает определённое количество баллов, которое соответствует результату «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно» согласно следующей таблице:

Итоговое количество баллов	**Итоговая отметка**
0-250	неудовлетворительно
251-350	удовлетворительно
351-450	хорошо
451-500	отлично

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В рамках дисциплины по выбору «*Элементы математической экономики»* предполагается рассмотрение конкретных образцов современных математических исследований в областях, связанных с использованием методов алгебры, математического анализа и функционального анализа в экономических приложениях.

Содержание дисциплины связано с углублением знаний магистрантов по математическим курсам, изученным как в рамках бакалавриата, так и в рамках магистратуры (1-3 семестр). Центральную роль здесь должно играть понятие функции (одной ил нескольких переменных либо функционала) как аппарат описания и моделирования экономических зависимостей. Часть теоретических вопросов предлагается вынести на самостоятельное изучение с последующим обсуждением на семинарах. На лекции (раздел 1) предполагается краткое изложение истории/логики развития экономических приложений математического и функционального анализа в их взаимосвязях с другими разделами математики, выделение сквозных идей. При этом акцент должен быть сделан именно на методологических особенностях и важнейших методах получения результатов – как общих для всей современной прикладной математики, так и специфических. Могут быть указаны несколько проблем, актуальных для экономических приложений математики, самостоятельное рассмотрение которых предлагается студентам. Проблемы желательно подбирать так, чтобы их решение демонстрировало пользу переформулировки исходной задачи на языке математики и типичные элементы дальнейшего исследования. С другой стороны, эти проблемы должны быть связаны с интересами конкретного магистранта, с математическим содержанием его магистерской диссертации. Самостоятельное изучение предложенных проблем студентами предполагает чтение аутентичной математической и экономической литературы – оригинальных статей, обзоров по указанной тематике, монографий. Отчет

по какой-либо из изученных статей (конспект с необходимыми пояснениями) является одним из контрольных заданий по дисциплине.

На практических занятиях демонстрируются приемы решения задач и решаются конкретные задачи экономического происхождения. При этом акцент должен делаться на всех этапах работы - этапе построения, анализа и интерпретации модели. Часть задач, поставленных на занятии, может после начального этапа совместного обсуждения быть предложена как домашнее задание, по некоторым из них целесообразно затем заслушивать краткие сообщения студентов. Как преподавателю, так и студентам во время их сообщений рекомендуется применять проблемный стиль изложения материала, ставить вопросы перед аудиторией, в том числе для последующего обдумывания, предусматривать время для ответа на вопросы слушателей.

Необходимо обратить особое внимание на анализ адекватности тех или иных математических моделей логике предмета. Базой для изучения дисциплины служит математический анализ и теория экстремальных задач, начала которой необходимо самостоятельно повторить перед данным курсом. С другой стороны, требуется уверенное владение материалом линейной алгебры, языком абстрактной алгебры и функционального анализа. Желательно проработать глоссарий дисциплины и убедиться в четком понимании смысла содержащихся в нем терминов. Предполагается изучение общих подходов к применению математических методов в экономике на примере конкретных исследований. С этой целью в качестве одного из заданий включено конспектирование оригинальной научной статьи.

Контрольное задание по дисциплине «*Элементы математической экономики»* предлагается в форме домашней работы, включающей применение известных алгоритмов решения задач и интерпретацию результатов, а также аудиторной контрольной работы. Формой рубежного контроля по дисциплине является экзамен, который проводится в форме учебной конференции (выступления магистрантов по выбранным темам с коллективным обсуждением). Темы докладов выбираются из предложенного преподавателем списка, допускается предложение темы магистрантом по согласованию с преподавателем.

Планы практических занятий

ЗАНЯТИЕ № 1. Целевая ориентация и ограничения в задачах принятия решений

1. Составить математические модели следующих задач линейного программирования.

1.1. Фирма выпускает два вида продукта в день. Производственный процесс составляет 430 минут в день (5 десятиминутных перерывов при восьми часовом рабочем дне). Для изготовления единицы продукта первого вида требуется одна минута, а единицы второго – две минуты. Продукции первого вида требуется не более 300 единиц в день, а второго – не более 230 единиц в день. Реализация единицы продукции первого вида приносит 2 доллара чистой прибыли, а второго – 3 доллара. Каков оптимальный производства, максимизирующий прибыль, чему равна максимальная прибыль?

1.2. В первой передаче имеется 18 минут рекламного времени, а во второй – 12 минут. Фирма имеет рекламные ролики трёх видов, и на основании анализа рынка считает, что 13 минут времени должно быть отведено для демонстрации роликов, рассчитанных на домохозяек, 7 минут – для демонстрации роликов, рассчитанных на молодёжь, и 10 минут – для демонстрации роликов, рассчитанных на бизнесменов. Известны рейтинги передач: первую передачу смотрят среди всех домохозяек 60 %, среди молодёжи – 50 %, среди бизнесменов – 30 %; для второй передачи соответствующие рейтинги составляют 40, 70 и 20 %. Распределите время показа рекламных роликов между передачами с целью максимизации времени просмотра целевой аудиторией.

Ответ: Ролик для домохозяек все 13 минут показывать в первой передаче, ролик для молодёжи –все 7 минут во второй передаче. Ролик для бизнесменов показывать по 5 минут в каждой передаче.

1.3. Фирма может выполнять работы двух типов. Для выполнения одного заказа первого типа требуется один инженер, 16 рабочих и 9 технологов, а для выполнения одного заказа второго типа – 2 инженера, 6 рабочих и 7 технологов. Выполнение одного заказа первого типа приносит чистую прибыль в 5 тыс. руб., а второго – в 7 тыс. руб. Фирма дала объявление о найме на работу и получила 15 заявлений от инженера, 96 – от рабочих, 69 – от технологов. Какое количество заказов первого и второго типа требуется взять фирме для максимизации прибыли? Какое количество сотрудников следует нанять? Чему равна максимально возможная прибыль?

1.4. (Д/з) На заводе есть два корпуса и три пункта аварийной эвакуации. Время на переход из первого корпуса к первому пункту эвакуации составляет 3 минуты, ко второму – 4 минуты, к третьему 2,5 минуты. Для второго корпуса соответствующие временные затраты составляют 4,5 минуты, 6,5 минут и 3,5 минуты. В первом корпусе работают 600 человек, во втором – 900. Первый пункт может принять 600 человек, второй – 500 человек, третий – 400 человек. Составить оптимальный план эвакуации, минимизирующий суммарное время, необходимое, чтобы все сотрудники добрались до пунктов эвакуации

Ответ: 200 сотрудников из первого корпуса направляются в первый пункт, 400 направляются в третий пункт, из второго корпуса 400 человек направляется в первый пункт и 500 во второй.

1.5 (Д/з) Фирма выпускает два вида изделий. Для изготовления одного изделия первого вида требуется 2 кг металла, а второго вида – 4 кг металла. Изделие первого вида может быть продано по цене 30 тыс. рублей за единицу, а второго – по цене 20 тысяч рублей за единицу, причём первого изделия можно реализовать не более 40 единиц, а второго не более 20. Всего имеется 100 кг металла. Каков оптимальный план производства, максимизирующий доход от продажи данных изделий, чему равна максимальная прибыль доход?

Ответ: 40 изделий первого вида и 5 изделий второго вида принесут доход в 1 мил.300 тыс. рублей.

ЗАНЯТИЕ № 2. Приведение систем ограничений к виду, пригодному для составления симплекс-таблиц

№ 1. Приведите систему ограничений ЗЛП ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) к системе ограничений в виде равенств:

а) $-2x_1 + x_2 \leq 1$;
$-x_1 + x_2 \leq 2$
$3x_1 + x_2 \leq 8$
$-2x_1 + 3x_2 \geq -9$
$4x_1 + 3x_2 \geq 0$.

б) $2x_1 - x_2 + x_3 = 2$
$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$
$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1$;

в) (д/з) $0 \leq 2x_1 + x_2 \leq 1$
$-x_1 + 3x_2 \leq 2$
$-x_1 + x_2 \geq -4$;

г) (д/з) $x_1 \leq 1$
$x_2 \leq 2$
$x_1 + x_2 \leq 3$

$-1 \le x_1 - x_2 \le 0$.

№ 2. Приведите систему ограничений ЗЛП ($x_i \ge 0$) к системе ограничений в виде равенств:

а) $\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 - x_6 = 1 \\ x_2 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 - 3x_6 = 3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ Отв. $2 + x_2 \ge 0$, $3 + x_2 - 2x_4 \ge 0$.

в) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$ Отв. $7x_2 - 4x_3 - 2x_4 \ge 0$, $-9x_2 + 5x_3 + 2x_4 \ge 0$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 14x_4 = 0 \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ Отв. $\frac{3}{2}x_2 + \frac{11}{8}x_4 \ge 0$, $-\frac{9}{4}x_4 \ge 0$

ЗАНЯТИЕ № 3 Решение задач линейного программирования симплекс-методом

1. Найти минимум целевой функции F при заданной системе ограничений симплекс-методом. Указать значения переменных x_1, x_2, … ($x_i \ge 0$) при которых достигается минимальное значение.

а) $F = x_1 - x_3$

Система ограничений:

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

$x_1 + 3x_2 + x_4 = 2$.

Отв. Минимум 3, в точке (0, 1, 3, 0).

б) $F = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$

Система ограничений:

$x_1 + x_4 + 6x_6 = 9$

$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2$

$x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6$

Отв. Минимум (-5), в точке (0, 5, 1.5, 0, 0, 1.5).

в) (д/з) $F = 5x_1 - 10x_2$

Система ограничений:

$-2x_1 + x_2 \le 1$

$-x_1 + x_2 \le 2$

$3x_1 + x_2 \le 8$

$-2x_1 + 3x_2 \ge -9$.

Отв. Минимум – 27,5 в точке (1.5, 3.5).

г) (д/з) $F = x_1 - x_2 - 4x_3 + 5$

Система ограничений:

$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10$

$x_1 - x_2 + x_3 \le 6$
$2x_1 + x_2 - x_3 \le 8.$
Отв. Минимум – 15 в точке (0, 0, 5) или (0, 3, 2).
д) $F = 3 + 4x_1 + 5x_2 - x_3$
$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 4$
$3x_2 - 2x_1 + x_3 \le 5$
$2x_1 - 3x_2 \le 3$
Отв. Минимум 1, (0, 0, 2, 0, 3, 9).
е) $F = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 + x_3 = 10$
$2x_1 - x_3 + x_4 \le 5.$
Отв. Минимум не существует.
2. Найти максимум целевой функции F при заданной системе ограничений симплекс-методом. Указать значения переменных x_1, x_2, … ($x_i \ge 0$) при которых достигается максимальное значение.
а) $F = x_1 + x_2$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 \le 1;$
$x_2 - x_3 \le 1$
$x_1 + x_3 \le 2.$
Отв. Максимум 3 в точке (2, 1, 0).
б) $F = 2x_1 - x_3 + x_4$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 10$
$x_1 - x_3 + 2x_4 \le 8.$ Отв. Максимального значения нет.
Выполнить самостоятельную работу (ОС-1)

ЗАНЯТИЕ № 4. Двойственные задачи

Задачи для самостоятельного решения:

1. Составьте двойственную задачу для задачи:

а) $\Phi = -y_1 - 2y_2 - 3y_3 \to \max$
$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 - 3y_3 \le 1 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \le -1 \end{cases}$$

б) $\Phi = 3y_1 + 2y_2 \to \min$
$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,$
$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_2 \ge 14 \\ 4y_1 + 5y_2 \ge 20 \end{cases}$$

в) $\Phi = 5y_1 + 4y_2 \to \max$
$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,$
$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 \le 24 \\ 3y_1 + 4y_2 \le 24 \end{cases}$$

Решите задачи с применением двойственного симплекс-метода.
2. Составить двойственную задачу по отношению к задаче, состоящей в максимизации функции $f = 2x_1 + x_2 + 3x_3$ при условиях
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge -24 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 \ge -3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3. Для производства трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве, соответственно не большем 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в таблице.

Виды сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	B	C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (руб.)	10	14	12

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость, и оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции. Оценки, приписываемые каждому из видов сырья, должны быть такими, чтобы оценка всего используемого сырья была минимальной, а суммарная оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида,– не меньше цены единицы продукции данного вида.

ЗАНЯТИЕ № 5. Двойственные задачи в анализе действий конкурентов. Теневые цены

1. Фирма выпускает два типа строительных блоков – обычные и улучшенные. При этом производятся две основные операции – прессование и отделка. Требуется составить оптимальный план выпуска блоков, если чистая прибыль от продажи одного обычного блока составляет 100 рублей, а улучшенного – 180 рублей. Материальные и временные затраты при этом заданы в таблице:

	Обычные	Улучшенные	Имеющиеся ресурсы
Расходные материалы (кг)	20	40	4000
Время на прессование (часы)	4	6	900
Время на отделку	4	4	600
Затрачиваемые средства (руб.)	30	50	6000

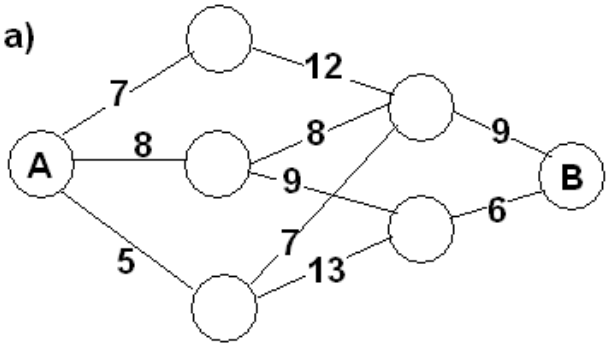
Определите цены, по которым конкурирующая фирма может перекупить наше рабочее время и расходные материалы.

Занятие 6. Нелинейные модели анализа экономического поведения

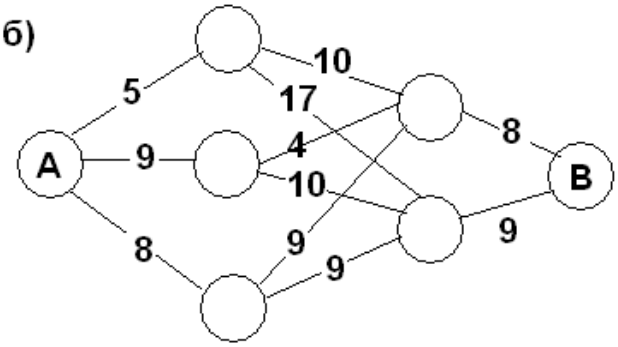
Общая характеристика методов динамического программирования

1. Дана транспортная схема (расстояния между соседними узлами указаны числами в км).

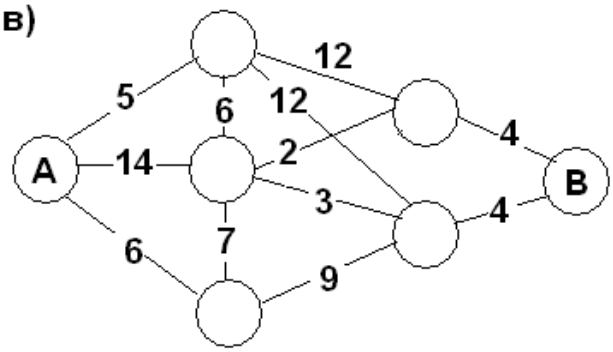
а)



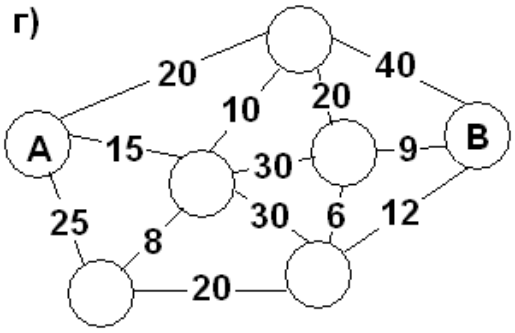
б)



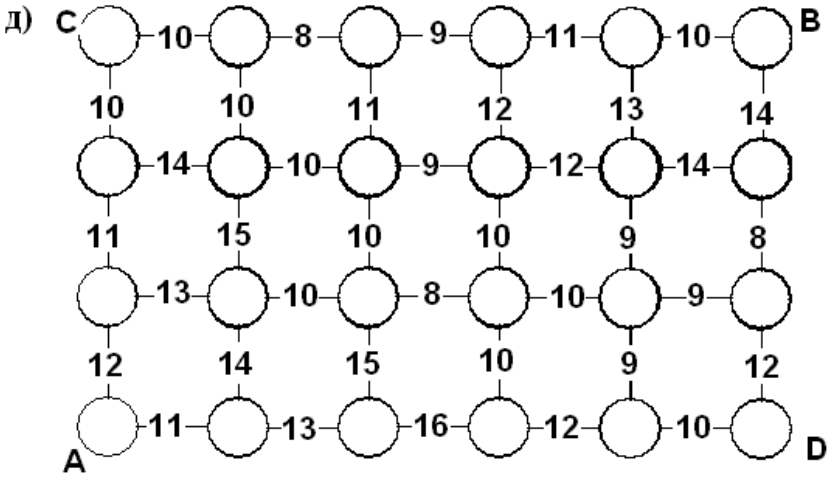
в)



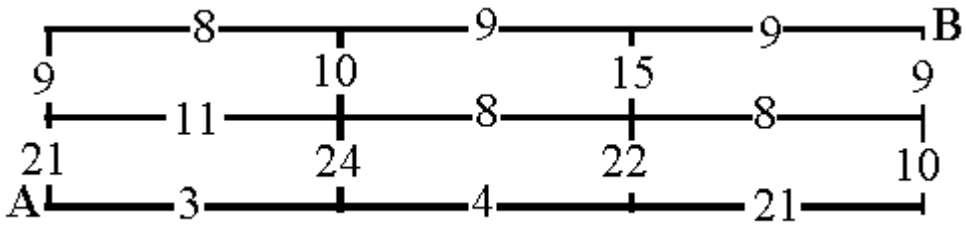
г)



д)



е)



Найдите длину кратчайшего маршрута от пункта А до пункта В.

2. Пусть на схеме указано количество достопримечательностей на данном маршруте. Составьте экскурсионный маршрут от А до В максимизирующий количество достопримечательностей, встречающихся по дороге.

ЗАНЯТИЕ № 7. Задача о найме сезонных рабочих

1. Потребности фирмы в сезонных рабочих представлены в таблице:

Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь
7	10	8	12	6	10

Реклама о найме обходится в 15 тыс.рублей в месяц, зарплата рабочему – 10 тыс. рублей в месяц. При увольнении выплачивается компенсация 5 тыс. рублей. Составить оптимальный план найма.

2. Некоторая туристическая фирма оценивает потребности в гидах следующим образом: на май месяц – 5 человек, на июнь – 6 человек, на июль – 8 человек, на август – 4 человека, на сентябрь 6 человек. Содержание избытка рабочей силы обходится фирме в 300 $ в месяц за каждого лишнего человека, а наём рабочих на протяжении месяца обходится в 400 $ в месяц (за объявление о найме) плюс 200 $ в месяц за человека (на обучение). Составьте оптимальный план найма рабочих, позволяющий минимизировать расходы по найму.

3. (д/з) Подрядчик оценивает минимальные потребности в рабочей силе на каждую из 5 следующих недель: а) 5, 7, 8, 4 и 6 рабочих соответственно. Содержание избытка рабочей силы обходится в 300 долларов в неделю, а наём рабочих на протяжении недели обходится в 400 $ (за объявление о найме) плюс 200 $ за каждого рабочего в неделю. Составьте оптимальный план найма рабочих, позволяющий минимизировать расходы по найму.

б) решить ту же задачу, если потребности в рабочей силе составят 6, 5, 3, 6 и 8.

ЗАНЯТИЕ №8. Задача об инвестировании и оптимальном распределении сотрудников по проектам

В таблице указан доход, который приносят предприятия при инвестировании в них сумм, указанных в левом столбце. Составьте оптимальный план распределения капиталовложений между тремя предприятиями, при котором будет достигнут максимальный доход.

а) Имеется капитал 10 тыс. долларов

Объём капиталовложений (тыс. долларов)	Доход (тыс. руб.)				
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4	Предприятие 5
1	1,5	2,1	1,6	1,3	1,4
2	3,1	3,5	3,1	3,6	3,2
3	6,4	6,2	6,3	6,4	6,3
4	8,0	7,8	7,4	7,4	8,0
5	9,5	9,5	9,6	9,2	9,5
6	11,8	12,9	11,7	11,5	13
7	11,8	12,9	11,7	11,5	13,5
8	11,8	12,9	11,7	11,5	13,5

б) Имеется капитал в 400 тысяч рублей.

Объём капиталовложений (тыс. руб.)	Доход (тыс. руб.)		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
100	71	75	81
200	157	168	162
300	246	243	243
400	324	322	321

Ответ. вложить 200 тыс. во второе и 200 тыс. в третье. Прибыль 330 тыс.

7. Пусть в фирме работает n сотрудников равной квалификации. каждому из которых (либо несколькими одновременно) можно поручить выполнение некоторых видов работ (заказов). Доходность от выполнения заказа меняется, в зависимости от того, сколько сотрудников одновременно задействовано в его выполнении. Эти изменения не линейны и заданы с помощью таблиц (то, что начиная с некоторого количества доходность перестаёт возрастать означает, что выполнение данного заказа не требует столь большого

количества сотрудников). Составьте оптимальный план распределения сотрудников, при котором обеспечен максимальный доход:

а) Общее количество сотрудников равно n = 10

Количество сотрудников	Доход (тыс. руб.)				
	Заказ 1	Заказ 2	Заказ 3	Заказ 4	Заказ 5
1	0,5	0,1	0,6	0,3	1,0
2	1,0	0,5	1,1	0,6	1,2
3	1,4	1,2	1,2	1,3	1,3
4	2,0	1,8	1,4	1,4	1,3
5	2,5	2,5	1,6	1,5	1,3
6	2,8	2,9	1,7	1,5	1,3
7	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
8	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
9	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
10	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3

б) Общее количество сотрудников равно n = 40

Количество сотрудников	Доход (тыс. руб.)		
	Заказ 1	Заказ 2	Заказ 3
10	35	20	22
20	69	75	71
30	132	120	145
40	167	158	150

ЗАНЯТИЕ № 9. Выступление с докладами (ОС-4)

ЗАНЯТИЕ № 10. Анализ рентабельности предприятий. Модель Леонтьева

1.Компания добывает нефть и уголь. При добыче 1 тонны угля 7 % расходуется на внутренние нужды, также расходуется 0.14 тонн нефти. При производстве угля оборудования на одну тонну расходуется 0.12 тонн нефти и 0.1 тонна угля. Выяснить, является ли данное производство рентабельным. Определить, сколько всего необходимо добыть угля и нефти (валовой продукт), если поступил заказ на приобретение 144 тонн нефти и 123 тонн угля (конечный продукт).

2. При производстве электроэнергии на внутренние нужды расходуется 1/3 от всей производимой энергии, коэффициент амортизации оборудования 1/12. При производстве соответствующего оборудования расходуется ½ условной единицы энергии, коэффициент амортизации оборудования ¼. Определите, будет ли данное производство рентабельным. Какое количество энергии и оборудования необходимо произвести, чтобы обеспечить продажу 4000 усл. ед. энергии и 5000 единиц оборудования.

3. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчётный период

отрасль		потребление		Конечный продукт	Валовый выпуск
		энергетика	машиностроение		
Производство	энергетика	7	21	72	100
	машиностроение	12	15	123	150

Вычислить необходимый объём валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление в энергетической отрасли возрастёт в два раза, а в машиностроении сохранится на прежнем уровне.

ЗАНЯТИЕ № 11. Матричные игры

1. Среди перечисленных матричных игр укажите те, которые имеет точку равновесия (седловую точку) и оптимальные стратегии:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 10 & 40 & 12 & 9 \\ 17 & 16 & 13 & 14 \\ 23 & 8 & 10 & 25 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найдите решение матричной игры, заданной матрицей А, в смешанных стратегиях:

а) А= $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) А = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. В городе имеются две гостиницы. В настоящее время в первой гостинице останавливаются 30 % посетителей города, а во второй – 70 %. Цены за проживания равные. Для увеличения числа клиентов хозяева гостиниц могут предпринять одну из следующих стратегий: предложить новые эксклюзивные услуги, снизить цену за проживание, дать рекламу или не делать ничего. 20 % клиентов приезжают в город впервые и поэтому ориентируются на рекламу, а 80 % – постоянные клиенты. Большинство клиентов (90 %) предпочитают ничего не менять, если условия остаются прежними, а 10 % стремятся попробовать что-то новое и перейдут в другую гостиницу, если увидят рекламу. Если условия изменятся, то для 40 % клиентов важна более дешевая цена, для 30 % - эксклюзивные услуги (но если две гостиницы введут эти услуги одновременно, то услуга перестанет быть эксклюзивной и клиенты останутся на своем месте), 20 % не перейдут с привычного места в любом случае, а 10 % хотят попробовать что-то новое и в любом случае перейдут в другую гостиницу, если что-то в ней изменится. Гостиницы оценивают прибыль от получения 5 % клиентов дополнительно за период проведения акции в ту же сумму, что и стоимость рекламы (эту же сумму гостиницы могут потратить на снижения цен или на эксклюзивные услуги). Какие стратегии следует предпринять гостиницам?

ЗАНЯТИЕ № 12. Игры с природой

1. Обувная фабрика распространяет своё производство обуви через магазин. Реализация зависит от состояния погоды. В теплую погоду предприятие реализует 1000 ботинок и 2000 туфель, при прохладной погоде 1500 пар ботинок и 800 пар туфель. Затраты на производство одной пары ботинок равны 30, а туфель 15 рублям, соответственно цена реализации равна 50 рублям и 20 рублям. Определить оптимальную стратегию фабрики.

2.. Фермер, имеющий ограниченный участок земельных угодий, может его засадить тремя различными культурами A_1, A_2, A_3. Урожай этих культур зависит главным образом от погоды ("природы"), которая может находиться в трёх различных состояниях: B_1, B_2, B_3. Фермер имеет информацию о средней урожайности этих культур (количество центнеров культуры, получаемого в одного гектара земли) при трёх различных состояниях погоды, которая отражена в таблице:

Виды культур	Возможные состояния погоды	Цены

	Засуха B_1	Нормальная B_2	Дождливая B_3	
A_1	20	15	10	5
A_2	7	15	5	7
A_3	0	5	10	10

При помощи критериев Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица при λ=0,8 определить какой культурой следует засеять участок.

3. Директор торговой фирмы, продающей телевизоры марки «Zarya» решил открыть представительство в областном центре. У него имеются альтернативы либо создавать собственный магазин в отдельном помещении, либо организовывать сотрудничество с местными торговыми центрами. Всего можно выделить 5 альтернатив решения: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Успех торговой фирмы зависит от того, как сложится ситуация на рынке предоставляемых услуг. Эксперты выделяют 4 возможных варианта развития ситуации S_1, S_2, S_3, S_4. Прибыль фирмы для каждой альтернативы при каждой ситуации представлена матрицей выигрышей А (млн. р./год).

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 12 & 14 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 10 \\ 2 & 4 & 9 & 22 \\ 12 & 14 & 10 & 1 \\ 15 & 6 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

При помощи критериев Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица при λ=0,2 определить какое решение стоит принять директору торговой фирмы

Занятие № 13. Задачи на кредиты с равными платежами

Задания для решения

№ 1. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму.
Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на *r* % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите *r*.

2. Пусть планируется взять кредит в банке на некоторый период (месяц, год) в размере суммы S.

Условия его возврата следующие:

- в начале каждого периода долг увеличивается на q % по сравнению с концом предыдущего периода.

- до конца каждого периода необходимо выплатить часть долга.

Найти общую сумму выплат, после полного погашения кредита, если **долг выплачивается равными ежемесячными (ежегодными) платежами.**

3. Георгий планирует взять кредит в банке в размере 150000 руб. на 4 года.

Банк предлагает две схемы погашения кредита.

В начале каждого года долг будет увеличиваться на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате кредит будет погашен четырьмя равными платежами.

4. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого

следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся часть долга (т.е. увеличивает долг на 14,5%), Затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил платеж двумя равными платежами (т.е. за два года)?

5. 31 декабря 2014 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся часть долга (т.е. увеличивает долг на 14%), Затем Владимир переводит в банк 4 548 600 рублей. Какую сумму взял Владимир в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами?

Занятие № 14. Задачи на кредиты с дифференцированными платежами

Задания для решения

1. Пусть планируется взять кредит в банке на некоторый период (месяц, год) в размере суммы S.

Условия его возврата следующие:

- в начале каждого периода долг увеличивается на q % по сравнению с концом предыдущего периода.

- до конца каждого периода необходимо выплатить часть долга.

- после платежа долг каждый период должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего периода.

Найти общую сумму выплат, после полного погашения кредита.

2. 1 июля 2019 года планируется взять кредит 900 тыс. руб. Первого числа каждого месяца банк начисляет 1 % на оставшуюся сумму долга. Затем в банк переводится платеж. На какое минимальное количество месяцев может быть взят кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 тыс.

3. Георгий планирует взять кредит в банке в размере 150000 руб. на 4 года.

Банк предлагает две схемы погашения кредита.

В начале каждого года долг будет увеличиваться на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате кредит будет погашен четырьмя равными платежами.

Схема выплаты кредита при дифференцированных платежах:

В начале каждого года долг увеличивается на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате платежа долг каждый год уменьшается на одну и ту же сумму.

Какая схема для Георгия будет самой оптимальной? Чему равна суммарная переплата при каждой схеме?

4. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс.рублей?

ЗАНЯТИЕ № 15. Выступления с докладами (ОС-5)

Занятие 16. Дискуссия

Примерный перечень вопросов для обсуждения в рамках дискуссии

1. Считаете ли Вы, что достаточный уровень математико-экономической компетентности нужен любому человеку независимо от рода деятельности? Если да, то какой вклад, с

Вашей точки зрения, в процесс формирования этой компетентности должна вносить математика?

2. Считаете ли Вы, что введение в основные образовательные программы общего образования элементов математической экономики может положительно сказаться на уровне экономической грамотности населения, или достаточно обычного курса математики? Если элементы математической экономики нужны, то на каком уровне образования, в рамках базовых программ или в курсах внеурочной деятельности? Поясните свою позицию, сформулируйте условия, при которых включение элементов математической экономики может внести заметный вклад в формирование экономической грамотности.
3. Согласны ли Вы, что включение прикладных компонентов (в частности, основ математической экономики) в курс математики может повысить интерес к математике, способствовать популяризации математического знания?
4. Считаете ли Вы, что включение новых прикладных фрагментов в курс математики может отрицательно сказаться на формировании базовых математических умений и навыков, или такие опасения беспочвенны?
5. Какие формы освоения начал математической экономики на уроках математики, а также во внеурочной деятельности кажутся Вам наиболее приемлемыми? Как Вы оцениваете их эффективность в сегодняшних условиях, перспективы взаимодействия курсов математики и экономики (например, как части обществознания)?

Занятие 17. Выступление с защитой разработки (ОС-6)

Занятие 18. Финансовая математика. Смешанные схемы выплат

1. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей.

2. 15-го января банк выдал кредит на 6 месяцев в размере 1 млн. рублей. условия его возврата таковы: 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-е по 14-е число необходимо выплатить часть долга. График погашения показан в таблице:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в % от кредита)	100 %	90 %	80 %	70 %	60 %	50 %	0

Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат не превзойдет 1,2 млн руб.

15-го января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн. рублей. условия его возврата таковы: 1 числа каждого месяца долг увеличивается на целое число процентов (r %) по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-е по 14-е число

необходимо выплатить часть долга. 15-го числа долг должен составлять определенное число млн. рублей. (см. таблицу):

15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат не превзойдет 1,2 млн руб.

4. Фермер получил кредит в банке под определенный процент. Через год фермер вернул в банк в счет погашения кредита ¾ от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту?

Занятие 19. Деловая игра

Примерные задания для подготовки к деловой игре
(экспертное оценивание работ выпускников)

1. Каковы цели включения задачи экономического содержания в КИМ ЕГЭ? На какую аудиторию рассчитана эта задача, какие компоненты математической компетентности проверяет?
2. Изучите Кодификатор элементов содержания (КЭС) и Кодификатор требований к усвоению программы курса математики (КТ) для разработки КИМ ЕГЭ. Какие элементы содержания курса математики являются основой для решения «экономической» задачи?
3. Рассмотрите подборку «экономических» задач, предлагавшихся в КИМ ЕГЭ, материалах тренировочных и пробных тестирований. Попробуйте систематизировать эти задачи, укажите выбранные Вами основания для классификации. Как Вы считаете, следует ли специально готовить школьников к решению таких задач, если да, то как?
4. Изучите критерии оценивания задачи №17 в нескольких вариантах КИМ ЕГЭ (для задач различных типов). Понимаете ли Вы основания для выставления того или иного количества баллов за решение, предложенное выпускником?

Занятие 20. Контрольная работа (ОС-3).

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Соколов, Г. А. Линейные целочисленные задачи оптимизации : учебное пособие / Г. А. Соколов. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 132 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-011144-5. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1106387
2. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций : учебник / АС. Шапкин, В. А. Шапкин. – М. : Дашков и К°, 2019. – 398 с. – Режим доступа: . –URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573373
3. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций : учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд, — Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2019. - 398 с - ISBN 978-5-394-02736-9. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1091193.

Дополнительная литература

1. Мастяева, И. Н. Методы оптимальных решений: Учебник / Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н. - Москва : КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 384 с. - ISBN 978-5-905554-24-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/944821

2. Количественные методы в экономических исследованиях : учебник / Ю. Н. Черемных, А. А. Любкин, Я. А. Рощина [и др.] ; под ред. М. В. Грачевой, Ю. Н. Черемных, Л. В. Тумановой. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юнити-Дана, 2017. – 688 с. : ил., табл., граф. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=685528.

Интернет-ресурсы

- Глобальный интеллектуальный ресурс «Статистика» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://statistica.ru .
- «Математическая составляющая» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://book.etudes.ru . Дата обращения: 30.08.2016.
- Портал MachineLearning [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.machinelearning.ru .
- Сайт Московского центра непрерывного математического образования. Лаборатория теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.mccme.ru .
- Общероссийский математический портал [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.mathnet.ru .