Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н.Титов
«25» июня 2021 г.

ГЕОМЕТРИЯ

Программа учебной дисциплины Предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Информатика.

(очная форма обучения)

Составитель: Гришина С.А., кандидат физико-математических наук, доцент
Череватенко О.И., кандидат физико-математических наук

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «21» июня 2021 г. № 7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Геометрия» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Информатика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Основы математической обработки информации», «Алгебра», школьного курса математики.

Результаты изучения дисциплины являются теоретической и методологической основой для изучения дисциплин: «Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных», «Компьютерная графика и анимация», для прохождения практик «Учебная (Технологическая) Практикум по построению изображений», «Учебная (научно-исследовательская работа, получение первичных навыков научно-исследовательской работы) Курсовая работа № 1», «Производственная (педагогическая) преподавательская практика по математике 1» и итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целями освоения дисциплины «Геометрия» являются

- раскрытие значение геометрии, углубление представления о месте геометрии в изучении окружающего мира;
- изучение основных разделов геометрии и воспитание общей геометрической культуры, необходимой будущему учителю для понимания как основного курса математики, так и школьных факультативных курсов;
- способствовать развитию пространственного мышления.

Задачей освоения дисциплины является развитие умения самостоятельной работы с математической литературой, курс «Геометрия» должен дать студентам знания, навыки и умения, необходимые для успешного изучения других разделов математики

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Геометрия» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11 Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем			

обучения) и в области образования ПК-11.1. Знает основные научные понятия и особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач.	ОР-1 Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области.		
ПК-13. Способен соотносить основные этапы развития предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) с ее актуальными задачами, методами и концептуальными подходами, тенденциями и перспективами ее современного развития.	ОР-3 Знает основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов		

ПК-13.1. Знает основные этапы исторического развития предметной области.			

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
1	3	108	18	30	-	33	экзамен
2	3	108	18	30	-	33	экзамен
3	4	144	24	40		53	экзамен
4	3	108	18	30		33	экзамен
Итого:	13	468	78	130	-	152	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
1 семестр				
Векторы и операции над ними	6	10		10
Метод координат на плоскости	6	14		13
Линии второго порядка	6	6		10
Итого по 1 семестру	**18**	**30**	**-**	**33**

2 семестр				
Метод координат в пространстве	4	10		6
Плоскости и прямые в пространстве	6	12		7
Поверхности второго порядка	4	4		6
Аффинные и евклидовы n-мерные пространства	2			7
Квадратичные формы и квадрики	2	4		7
Итого по 2 семестру	**18**	**30**	**-**	**33**
3 семестр				
Преобразования плоскости и пространства	6	10		11
Геометрические построения	6	10		11
Методы изображений	6	10		11
Проективная геометрия. Понятие проективного пространства. Основные факты проективной геометрии	6	10		20
Итого по 3 семестру	**24**	**40**	**-**	**53**
4 семестр				
Основные факты проективной геометрии	4			
Основания геометрии. Общие вопросы аксиоматики	4			11
Исторический обзор обоснования геометрии	4			11
Обоснование евклидовой геометрии по Вейлю	4			5
Измерение скалярных величин	2			6
Задачи по планиметрии		30		
Итого по 4 семестру	**18**	**30**	**-**	**33**
Всего по дисциплине:	**78**	**130**	**-**	**152**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса (1 семестр)

I. ВЕКТОРЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.

Скалярные и векторные величины в математике. Вектор. Длина и направление вектора. Коллинеарные и компланарные векторы. Равные векторы Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Координаты вектора относительно данного базиса и их свойства. Аксиомы векторного пространства Примеры векторных

пространств. Скалярное произведение векторов и его свойства. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии.

II. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ.
Аффинная система координат на плоскости. Деление отрезка в данном отношении. Простое отношение трех точек прямой.
Прямоугольная декартова система координат. Расстояние между двумя точками.
Полярные координаты Переход от полярных координат к декартовым и обратно.
Преобразование аффинной системы координат. Левые и правые системы координат. Ориентация плоскости. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат.
Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами. Примеры. Алгебраическая линия и ее порядок.
Прямая линия. Различные способы задания прямой. Общее уравнение прямой. Геометрический смысл коэффициентов при текущих координатах в общем уравнении прямой. Геометрический смысл знака трехчленаAx+By+C.
Взаимное расположение двух прямых. Признаки параллельности и перпендикулярности двух прямых Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Метод координат в решении задач школьного курса геометрии.

III. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА
Эллипс: определение, каноническое уравнение, свойства Гипербола: определение, каноническое уравнение, свойства. Асимптоты. Парабола: определение, каноническое уравнение, свойства Фокусы и директрисы линий второго порядка Общее уравнение линии второго порядка. Классификация линий второго порядка.

Краткое содержание курса (2 семестр)

I. МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ.
Аффинная система координат в пространстве. Деление отрезка в данном отношении.
Прямоугольная декартова система координат. Расстояние между двумя точками.
Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами. Примеры.
Векторное и смешанное произведение векторов. Вычисление площади треугольника и объема тетраэдра Условия коллинеарности двух векторов, компланарности трех векторов.

II. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ.
Различные способы задания плоскости. Общее уравнение плоскости. Геометрический смысл коэффициентов при текущих координатах в общем уравнении. Геометрический смысл знака многочлена Ax+By+Cz+-Д. Взаимное расположение двух, трех плоскостей. Признаки параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями.
Различные способы задания прямой. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью. Связка прямых и плоскостей.

III. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА
Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды Определения, канонические уравнения, свойства. Цилиндр и конус второго порядка Конические сечения.

IV. АФФИННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ N-МЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.
Аксиомы Вейля n-мерного аффинного вещественного пространства Аффинная система координат. Аффинные преобразования. Предмет аффинной геометрии.
Аксиомы n-мерного евклидова пространства Расстояние между двумя точками, угол между векторами. Ортогональность. Ортонормированные системы координат. Движения,

группа движений. Предмет евклидовой геометрии.Преобразование подобия. Группа подобий. Групповой подход к геометрии.

V. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КВАДРИКИ

Квадратичные формы Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции.

Квадрики в аффинном пространстве. Классификация квадрик. Квадрики в трехмерном евклидовом пространстве.

Краткое содержание курса (3 семестр)

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА.

Преобразования, примеры. Группа преобразований, подгруппа группы преобразований.

Движение плоскости. Примеры. Аналитическое выражение движения. Осевая симметрия, разложение движений в произведение осевых симметрии. Классификация движений плоскости. Группа движений плоскости и ее подгруппы

Преобразования подобия. Аналитическое выражение. Гомотетия. Подобие как произведение гомотетии на движение. Группа преобразований подобия плоскости и ее подгруппы.

Аффинные преобразования. Аналитическое выражение. Группа аффинных преобразований плоскости и ее подгруппы. Теоретико-групповой принцип построения геометрии.

Преобразования пространства.

II. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ.

Аксиоматика конструктивной геометрии. Основные построения и основные задачи. Методы решения задач на построение.

III. МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Параллельное проектирование. Изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции. Изображение окружности и сферы. Понятие о методе Монжа.

Аксонометрия. Теорема Польке-Шварца. Изображение прямых и плоскостей. Полные и неполные изображения, их применение при изучении стереометрии. Позиционные и метрические задачи.

IV. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПОНЯТИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА. ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Модели проективной плоскости и проективного пространства. Аксиомы проективной плоскости. Проективные координаты. Уравнение прямой на проективной плоскости. Принцип двойственности. Формы первой ступени. Теорема Дезарга. Проективные преобразования. Группа проективных преобразований. Предмет проективной геометрии.

Двойное (сложное) отношение и его инвариантность при проективных преобразованиях Гармоническая четверка точек. Построение четвертой гармонической. Проективные соответствия в формах первой ступени.

Краткое содержание курса(4 семестр)

I. ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Линии второго порядка на проективной плоскости. Канонические уравнения линий второго порядка в проективных координатах Проективная классификация линий второго порядка. Полюс и поляра Понятие о полярном соответствии.

Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой. Евклидова геометрия с проективной точки зрения.

II. ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИКИ

Понятие об аксиоматическом методе. Понятие об интерпретации (модели) системы аксиом. Непротиворечивость, независимость и полнота системы аксиом проективной геометрии.

III. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ОБОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика системы Евклида. Пятый постулат. Предложения, эквивалентные пятому постулату.

Предшественники и творцы неевклидовой геометрии (Саккери, Ламберт, Лежандр, Гаусс, Больяи, Н И. Лобачевский).

Аксиома Лобачевского. Основные факты геометрии Лобачевского. Система аксиом Гильберта (обзор).

IV. ОБОСНОВАНИЕ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО ВЕЙЛЮ

Непротиворечивость и полнота системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Определение прямых, плоскостей, лучей, отрезков, углов. Примеры доказательств некоторых теорем.

Аксиоматика школьного курса геометрии.

V. ИЗМЕРЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН

Длина отрезка, аксиомы. Теорема существования и единственности. Площадь многоугольника, аксиомы. Теорема существования и единственности. Равновеликость и равносоставленность. Теория объемов (обзор).

VI. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Линии и замечательные точки в треугольнике. Окружности. Метод вспомогательного элемента в решении задач.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа

студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

ОС-1. *Темы рефератов*

1. Общая теория поверхностей второго порядка.
2. Применение комплексных чисел в планиметрии.
3. Решение задач школьного курса геометрии аналитическими методами.
4. Геометрия на сфере.
5. Решение задач стереометрии в пространстве Лобачевского.
6. Планиметрия на плоскости Лобачевского.
7. Геометрия на сфере.

ОС-2. Самостоятельная работа

1. Даны вершины четырехугольника А(5,2), В(1,-3), С(-2,1), Д(2,6).

а) Доказать, что АВСД параллелограмм,

б) найти величину угла А,

в) Найти скалярное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{BД}$.

2. На сторонах АВ, ВС и АД квадрата АВСД выбраны соответственно точки М, Р и К так, что М - середина АВ, РС=2ВР, КА=2ДК. Найти угол между прямыми МС и РК.

3. Доказать, что прямая, проходящая через вершину А треугольника АВС и середину медианы ВД, делит сторону ВС в отношении l:2.

ОС-3. Контрольная работа №1

Задача 1. Даны вершины тетраэдра А(1,0,-2); В(2,1,-1); С(0,2,-3); Д(-1,-2,0). Вычислить: объем тетраэдра; координаты точки К, делящей отрезок АВ в отношении 2 : 3; площадь грани ДСА.

Задача 2. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(-5;9), В(7;0), С(5,14). Найти: а) уравнения сторон АВ и ВС; записать уравнение АВ «в отрезках», ВС – с угловым коэффициентом;

б) уравнение медианы BB_1 и центр тяжести треугольника;

в) уравнение высоты СД и ее длину;

г) координаты точки Р, симметричной точке А относительно СД;

д) угол В.

ОС-3. Контрольная работа №2

Задача 1. Даны вершины треугольной призмы A(1,-2,2), B(1,0,-1), C(0,1,2), A_1(-1,1,1)
Найти: а) уравнение плоскости основания ABC;
б) уравнение прямой AC;
в) уравнения высоты A_1H призмы;
г) длину высоты A_1H;
д) вычислить величину угла между ребром AA_1 и плоскостью основания ABC;
е) вычислить объем призмы;
ж) вычислить площадь основания ABC призмы.

Задача 2.
Определить взаимное расположение прямой ℓ $\{ x+y -2z-9 =0) \{ 2x+3y -z = 0\}$ и плоскостью α: $x - z + 11 = 0$. Вычислить расстояние от начала координат до прямой ℓ и плоскости α.

Задача 3. Доказать, что прямые ℓ: $(x - 1) / 1 = y / 3 = (z - 2) / 5$
и m: $\begin{cases} x = -3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases}$ скрещивающиеся и вычислить расстояние между ними.

ОС-2. Самостоятельная работа
вариант № 2

1. Построить отрезок, равный данному.
2. По данным отрезка a, в и с постройте отрезок, длина которого выражается следующей формулой: 1) $x = \sqrt{a b + a c^2 / b}$; 2) $x = \sqrt{c \cdot a^2 + 2 b^2 / a + b}$;
3) $x = \sqrt{a c / b \sqrt{2 a^2 + c^2}}$.
3. ГМТП, из которых заданный отрезок виден под прямым углом, => окружность, построенная на отрезке AB, как на диаметре.

ОС-3. Контрольная работа №3

1. Данный эллипс представляет параллельную проекцию окружности. Постройте проекции правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника, вписанных в окружность, приняв произвольно выбранную точку эллипса за одну из вершин многоугольника.
2. Треугольник ABC служит изображением равнобедренного треугольника $A_1B_1C_1$ у которого $A_1C_1 = B_1C_1$ и высота равна основанию. Постройте изображение:
   1) центра описанной окружности. 2) центра вписанной окружности.
3. Построить сечение правильной пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки M и P на боковых ребрах призмы, не принадлежащие одной грани, и точку K на боковой грани, не содержащей указанных ребер.
4. Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, заданной следом, не пересекающим основания призмы и точкой, лежащей в плоскости верхнего основания призмы.
5. Через точку M в основании шестиугольной пирамиды OABCДEH проведена плоскость, параллельная боковой грани OAH. Построить сечение пирамиды этой плоскостью (за точку M взять центроид треугольника ABH).
6. Построить сечение пятиугольной призмы $ABCДEA_0B_0C_0Д_0E_0$ плоскостью, проходящей через точку M на ребре $C_0Д_0$ а параллельно прямым C_0E_0 и A_0E_0.

7. Через точку M_0 на ребре A_0B_0 куба $A_0B_0C_0Д_0ABCД$ провести сечение перпендикулярно диагонали AC_0.
8. В кубе $A_0B_0C_0Д_0ABCД$ точка M середина ребра AA_0, точка P делит отрезок BB_0 в отношении 1:2 (считая от вершины B). Как выбрать точку K на ребре CC_0, чтобы в сечении куба плоскостью MPK получился: а) параллелограмм, б) ромб, в) прямоугольник, г) квадрат? Построить эти сечения.
9. Основанием пирамиды SABCД является квадрат, а ее ребро SA перпендикулярно плоскости основания и SA = AB. На ребрах SB и SC взяты соответственно точки K и L такие, что
10. SK : SB = 1 : 4 и SL : SC = 3 : 4. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую KL перпендикулярно плоскости SBC.
11. Дан прямой круговой конус. Задайте секущую плоскость так, чтобы в сечении конуса получился: а) эллипс, б) парабола, в) гипербола и построить эти сечения

ОС-2. Самостоятельная работа

1. Вычислить сложное отношение четырех коллинеарных точек прямой.
2. Вычислить сложное отношение четырех прямых пучка.
3. Построить четвертую гармоническую точку.
4. Определить элементы на конфигурации Дезарга.

ОС-3. Контрольная работа

1. Определить фигуры, двойственные трехвершиннику по большому и малому принципам двойственности.
2. Доказать теорему, двойственную по большому принципу двойственности теореме: через всякую прямую проходят по крайней мере две плоскости.
3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Построены отрезки MN и AN. Выполнить двойственное построение.
4. Сформулировать теорему, двойственную обратной теореме Дезарга в пространстве, и доказать ее.

ОС-3. Контрольная работа

1. Основание треугольника равно 20 см, медианы боковых сторон равны 18 см и 24 см. Найдите площадь треугольника.
2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AK. Известно, что AC = 2, площадь круга, описанного около треугольника HBK, равна $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между высотой и стороной BC.
3. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла ACB; DM и DP являются соответственно высотами треугольников ADC и BDC. AM = 4, BP = 9. Найдите AC и периметр треугольника ACD.
4. Две стороны треугольника равны a и b (a > b). Найдите третью сторону, если известно, что она равна соответствующей ей биссектрисе.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 1. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 12 с..
2. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 2. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 11 с..
3. Прокопьев Г.С., Салдаева Г.В. Методические указания и контрольная работа № 1 по теме «Геометрия на плоскости». Для студентов – заочников 1 курса физико-математического факультета.- Ульяновск, 1996. (Библиотека УлГПУ).
4. Прокопьев Г.С., Череватенко О.И. Методические рекомендации и контрольная работа № 2 по теме «Геометрия в пространстве». Для студентов – заочников 2 курса физико-математического факультета .- Ульяновск, 2010. (Библиотека УлГПУ).
5. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 3. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 112 с..
6. Куренева Т.Н. Методические указания и контрольная работа № 3 по теме «Методы изображений. Проективная геометрия». Для студентов – заочников 3 курса физико-математического факультета .- Ульяновск, 2004. (Библиотека УлГПУ).

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Защита реферата ОС-2 Самостоятельная работа ОС-3 Контрольная работа №1	ОР-1 Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные

		представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области. ОР-3 Знает основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-4 экзамен в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Геометрия».

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-4 Экзамен в форме устного собеседования по вопросам
Перечень вопросов к экзамену (1 семестр)

1. Понятие вектора, длина вектора, коллинеарные, равные векторы. Перенос вектора в данную точку.
2. Линейные операции над векторами, их свойства. Понятие векторного пространства.
3. Линейная зависимость вектора. Теоремы о линейной зависимости векторов.
4. Геометрический смысл линейной зависимости векторов.
5. Координаты вектора. О единственности разложения вектора по данному базису.
6. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения.
7. Применение векторов к решению задач школьного курса математики.
8. Аффинная система координат на плоскости. Простейшие задачи аналитической геометрии.
9. Прямоугольная декартова система координат на плоскости. Расстояние между двумя точками.
10. Полярная система координат на плоскости. Связь полярных и прямоугольных декартовых координат.
11. Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами. Примеры. О классификации плоских линий.
12. Прямая линия. Уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.
13. Уравнения прямой, заданной двумя точками.

14. Общее уравнение прямой. Исследование общего уравнения прямой.
15. Геометрический смысл коэффициентов при текущих координатах в общем уравнении прямой.
16. Геометрический смысл знакм трехчлена Ах +Ву +С.
17. Взаимное расположение двух прямых.
18. Расстояние от точки до прямой.
19. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
20. Эллипс. Вывод канонического уравнения эллипса.
21. Эллипс. Свойства эллипса.
22. Гипербола. Вывод канонического уравнения гиперболы.
23. Гипербола. Свойства гиперболы.
24. Парабола. Вывод канонического уравнения параболы. Свойства параболы.
25. Директрисы эллипса и гиперболы.
26. Уравнения линий второго порядка в полярных координатах.
27. Общее уравнение линии второго порядка и приведение его к каноническому виду.
28. Классификация линий второго порядка.
29. Построение линии второго порядка по общему уравнению.

Перечень вопросов к экзамену (2 семестр)

1. Аффинная и прямоугольная системы координат в пространстве.
2. Решение простейших задач в координатах.
3. Преобразование аффинной системы координат.
4. Векторное произведение векторов и его свойства.
5. Смешанное произведение векторов и его свойства.
6. Вывод уравнений плоскости при различных способах задания.
7. Общее уравнение плоскости.
8. Условие параллельности вектора и плоскости.
9. Исследование расположения плоскости относительно системы координат.
10. Геометрический смысл коэффициентов А, В, С в общем уравнении плоскости.
11. Геометрический смысл знака многочлена Ах+ Ву+ Сz+ D.
12. Взаимное расположение двух и трех плоскостей.
13. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями.
14. Различные способы задания прямой в пространстве.
15. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
16. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
17. Метрические задачи теории прямой и плоскости в пространстве.
18. Эллипсоид. Определение, свойства.
19. Однополостный гиперболоид. Определение, свойства.
20. Двуполостный гиперболоид. Определение, свойства.
21. Эллиптический параболоид. Определение, свойства.
22. Гиперболический параболоид. Определение, свойства.
23. Цилиндрические поверхности второго порядка.
24. Конические поверхности. Конические сечения.
25. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.
26. Поверхности вращения. Поверхности вращения второго порядка.
27. Система аксиом Вейля n- мерного аффинного пространства.
28. к- мерные плоскости.
29. Аксиомы n- мерного евклидова пространства.
30. Ортонормированные системы координат.
31. Квадратичная форма. Ее матричное представление.
32. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

33. Закон инерции квадратичных форм.
34. Понятие квадрики в аффинном пространстве. Пересечение квадрики с прямой. Асимптотические направления.
35. Центр квадрики.
36. Упрощение уравнения квадрики.
37. Аффинная классификация квадрик.

Перечень вопросов к экзамену (3 семестр)

1. Отображение и преобразование множеств. Группа преобразований множества. Подгруппа группы преобразований.
2. Движение плоскости, определение. Примеры движений: перенос, поворот, симметрия.
3. Движение плоскости. Свойства движений общего вида.
4. Аналитическое выражение движений. Классификация движений.
5. О разложении движений в произведении осевых симметрий.
6. Преобразование гомотетии.
7. Преобразование подобия. Теорема о разложении подобия. Аналитическое выражение подобия. Группа преобразований подобия.
8. Аффинные преобразования плоскости. Аналитическое выражение. Частные виды аффинных преобразований.
9. Группа переносов пространства.
10. Вращение пространства вокруг оси, вокруг точки.
11. Аксиоматика конструктивной геометрии. Основные построения и основные задачи.
12. Схема решения задачи на построение. Методы решения задач на построение.
13. Основные замечательные множества точек на плоскости. Построение их циркулем и линейкой. Метод пресечения множеств.
14. Метод геометрических преобразований.
15. Алгебраический метод решения задач на построение.
16. Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой, примеры.
17. Параллельное проектирование и его свойства.
18. Изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.
19. Основы метода Монжа. Изображение точек, прямых и плоскостей. Решение позиционных задач.
20. Аксонометрические проекции. Теорема Польке-Шварца.
21. Полные и неполные изображения. Решение основных позиционных задач на полном изображении.

Перечень вопросов к экзамену (4 семестр)

1. Перспективное соответствие между плоскостью и связкой. Особые лучи и особая плоскость связки.
2. Расширенная плоскость. Несобственные элементы.
3. Свойства проективной прямой и проективной плоскости.
4. Аксиомы проективного пространства.
5. Проективные координаты.
6. Прямая на проективной плоскости. Координаты прямой.
7. Принципы двойственности (малый и большой) формы первой ступени.
8. Теорема Дезарга.
9. Перспективные и проективные отображения в формах первой ступени. Определениепроективности по Понселе.
10. Сложное отношение 4-х элементов в формах первой ступени (рядах и пучках).

11. Инвариантность сложного отношения при проектированиях и сечениях. Определение проективности по Штейнеру.
12. Гармонические четверки элементов в формах первой ступени. Четырехвершинник и его гармонические свойства.
13. Свойства проективных отображений в формах первой ступени.
14. Построение проективного соответствия в рядах.
15. Построение проективного соответствия в пучках.
16. Теорема Штейнера.
17. Теорема Паскаля. Построение точек линии второго порядка на основе теоремы Паскаля.
18. Линии второго порядка на проективной плоскости. Пересечение линии 2-го порядка с прямой.
19. Касательная к линии второго порядка.
20. Проективная классификация линий второго порядка.
21. Полюсы и поляры теоремы о свойствах полюсов и поляр.
22. Преобразование координат. Проективные преобразования. Предмет проективной геометрии.
23. Полярное преобразование. Автополярные фигуры.
24. Понятие об аксиоматическом методе. Понятие об интерпретации (модели) системы аксиом.
25. Требования, предъявляемые к системе аксиом: непротиворечивость, независимость, полнота.
26. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика «Начал».
27. Проблема пятого постулата.
28. Н.И. Лобачевский и его геометрия. Аксиома Лобачевского.
29. Система аксиом Гильберта.
30. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского.
31. Непротиворечивость геометрии Лобачевского. Независимость пятого постулата от остальных аксиом Гильберта.
32. Аксиоматика Вейля евклидовой геометрии.
33. Непротиворечивость системы аксиом Вейля.
34. Полнота системы аксиом Вейля трехмерного пространства.
35. Определение прямых, лучей, отрезков, плоскостей, углов. Доказательство некоторых теорем планиметрии и стереометрии.
36. Определение длины отрезка. Теорема существования и единственности.
37. Понятие площади многоугольника. Теорема существования и единственности.
38. Равновеликость и равносоставленность многоугольников. Теорема Бояи-Гервина.
39. Теория объемов (обзор).

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
1, 2, 4 семестры	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла max	236 баллов max	300 баллов max

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
3 семестр	Разбалловка по видам работ	12 х 1= 12баллов	20 х 1=20 баллов	272 балла	96 баллов
	Суммарный макс. балл	12 баллов max	32 балла max	304 балла max	400 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 1, 2 и 4 семестров

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 3 семестра

Оценка	**Баллы (4 ЗЕ)**
«отлично»	361-400
«хорошо»	281-360
«удовлетворительно»	201-280
«неудовлетворительно»	200 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на

самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий (1 семестр)

Занятие 1.

Тема: Понятие вектора. Коллинеарные векторы. Равные векторы. Линейные операции над векторами.

1. Понятие вектора, нулевого вектора; определения равных, коллинеарных, противоположных, компланарных векторов. Длина вектора.
2. Операция сложения векторов: определение суммы векторов; свойства операции сложения.
3. Вычитание векторов.
4. Умножение вектора на число: определение, свойства операции.

Решить задачи: [3] № 1, 5, 6, 19, 24.

Занятие 2,3.

Тема: Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Координаты вектора в относительно данного базиса и их свойства.

1. Линейная комбинация векторов. Тривиальная линейная комбинация векторов.
2. Определения линейно независимой и линейно зависимой систем векторов.
3. Достаточные условия линейной зависимости векторов.
4. Теоремы о линейной зависимости двух, трех, четырех векторов.
5. Определение векторного пространства.
6. Определение базиса векторного пространства. Размерность пространства.
7. Определение координат вектора в базисе. Свойства координат.

Решить задачи: [3]27, 29, 61, 63, 69, 95 (а), 99 (а), 104 (устно),

Занятие 4.

Тема: Скалярное произведение векторов. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии.

1. Скалярное произведение векторов: определение, свойства (коммутативность, ассоциативность относительно умножения на число. дистрибутивность. необходимое и достаточное условия равенства нулю скалярного произведения, скалярный квадрат, вычисление через координаты векторов). Обоснование свойств.

Решить задачи: [3] 105, 116, 124.

Занятие 5, 6.

Тема: Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости в аффинной и прямоугольной декартовой системах координат.

1. Определение и задание аффинной системы координат на плоскости и в пространстве.
2. Радиус-вектор точки. Координаты точки.
3. Простейшие задачи, решаемые в аффинной системе координат (координаты вектора, соединяющего две точки; деление отрезка в заданном отношении).
4. Прямоугольная система координат.
5. Простейшие задачи, решаемые в прямоугольной системе координат (знать обоснования).
6. Применение метода координат к решению задач школьного курса геометрии.

Решить задачи: [3] № 203, 208, 215, 225, 989 (а), 990 (а).

Занятие 7.

Тема: Самостоятельная работа «Векторная алгебра. Метод координат на прямой и на плоскости.

Примерный вариант самостоятельной работы

Задача 1. Точка М – середина стороны ВС параллелограмма АВСД. Полагая АМ = а, АС = b, выразить вектор ВД через векторы а и b.

Задача 2. Даны векторы а(1, λ, -3) и b(λ, 4, μ). Установить при каких λ, μ векторы а и b: а) коллинеарны; б) противоположно направлены.

Задача 3. Даны вершины тетраэдра А(1,0,-2); В(2,1,-1); С(0,2,-3); Д(-1,-2,0). Вычислить: объем тетраэдра; координаты точки К, делящей отрезок АВ в отношении 2 : 3; площадь грани ДСА.

Занятие 8, 9, 10.

Тема: Прямая линия. Различные способы задания прямой. Общее уравнение прямой.

1. Вывод уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.
2. Вывод уравнения прямой, заданной двумя точками.
3. Вывод уравнения прямой, заданной точкой и перпендикулярным вектором. Нормальный вектор прямой.
4. Общее уравнение прямой.
5. Уравнение прямой «в отрезках».
6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
7. Расположение прямой в системе координат в зависимости от равенства нулю коэффициентов в общем уравнении прямой.

Решить задачи: [3] № 369 – 372 (устно), 373 (а, в, г, д, ж), 375, 376, 390, 392 (а, б, в, д, ж), 395 (а, б), 402.

Занятие 11.

Тема: Геометрический смысл знака многочлена Ах + Ву + С. Параллельность и перпендикулярность двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Метод координат в решении задач школьного курса геометрии.

1. Условия пересечения, совпадения, параллельности двух прямых (с обоснованием).
2. Геометрический смысл знака многочлена $A_x + B_y + C$.
3. Определение угла между двумя прямыми. Вывод формулы.
4. Расстояние от точки до прямой (вывод формулы).

Решить задачи: [3] № 418 – 419 (устно), 420, 446, 479 (а), 482, 484, 487, 496.

Занятие 12.

Тема: Контрольная работа «Метод координат на прямой и на плоскости. Прямая на плоскости.

Примерный вариант контрольной работы

Задача 1. Даны вершины тетраэдра А(1,0,-2); В(2,1,-1); С(0,2,-3); Д(-1,-2,0). Вычислить: объем тетраэдра; координаты точки К, делящей отрезок АВ в отношении 2 : 3; площадь грани ДСА.

Задача 2. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(-5;9), В(7;0), С(5,14). Найти: а) уравнения сторон АВ и ВС; записать уравнение АВ «в отрезках», ВС – с угловым коэффициентом;

б) уравнение медианы BB_1 и центр тяжести треугольника;

в) уравнение высоты СД и ее длину;

г) координаты точки Р, симметричной точке А относительно СД;

д) угол В.

Занятие 13, 14, 15.

Тема: Эллипс, гипербола, парабола. Фокусы и директрисы линий второго порядка.

Вывод уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.

1. Определение эллипса, его свойства.
2. Определение гиперболы, ее свойства.
3. Определение параболы, ее свойства.
4. Фокусы и директрисы линий второго.

Решить задачи: [3] №.764, 756, 796(а, г), 797(а), 823, 831(а).

Планы практических занятий (2 семестр)

Занятие 1.

Тема: Аффинная и прямоугольная системы координат в пространстве. Деление отрезка в данном отношении. Расстояние между двумя точками.

1. Определение и задание аффинной системы координат в пространстве.
2. Радиус-вектор точки. Координаты точки.
3. Простейшие задачи, решаемые в аффинной системе координат (координаты вектора, соединяющего две точки; деление отрезка в заданном отношении).
4. Прямоугольная система координат.
5. Простейшие задачи, решаемые в прямоугольной системе координат (знать обоснования).
6. Ориентация плоскости, ориентация пространства.
7. Формулы преобразования координат.
8. Определение фигуры, уравнение (неравенство) фигуры.
9. Применение метода координат к решению задач школьного курса геометрии.

Решить задачи: [3] № 203, 208, 215, 225, 989 (а), 990 (а), 1001.

Занятие 2, 3.

Тема: Применение метода координат к решению задач школьного курса стереометрии.

1. Простейшие задачи, решаемые в аффинной системе координат (координаты вектора, соединяющего две точки; деление отрезка в заданном отношении).
2. Простейшие задачи, решаемые в прямоугольной системе координат (знать обоснования).
3. Применение метода координат к решению задач школьного курса стереометрии.

Решить задачи: [3] № 1047, 1048, 1049.

Занятие 4,5.

Тема: Векторное и смешанное произведение векторов.

1. Определение ориентированного трехмерного пространства.
2. Определение векторного произведения двух векторов.

3. Геометрический смысл модуля векторного произведения.
4. Формула для вычисления векторного произведения через координаты множителей.
5. Свойства векторного произведения: антикоммутативность относительно скалярного множителя, дистрибутивность относительно сложения, условие коллинеарности векторов (доказательства свойств).
6. Вычисление площади треугольника с помощью векторного произведения (вывод формулы площади).
7. Определение смешанного произведения трех векторов.
8. Геометрический смысл смешанного произведения (с обоснованием).
9. Формула для вычисления смешанного произведения (знать вывод).
10. Свойства смешанного произведения с обоснованием их:
    a. инвариантность относительно циклической перестановки;
    b. изменение знака при перестановке двух множителей;
    c. ассоциативность относительно скалярного множителя;
    d. дистрибутивность относительно сложения.

5. Формула необходимого и достаточного условий компланарностии трех векторов (с обоснованием).
6. Вычисление объема параллелепипеда, тетраэдра с помощью смешанного произведения (вывод формулы объема тетраэдра).

Решить задачи: [3] № 1012 (а, б), 1036, 1019, 1022, 1023 (б), 1025 (б), 1031 (а), 1035.

Занятие 6.
Тема: Самостоятельная работа.

Занятие 7, 8.
Тема: Различные способы задания плоскости. Общее уравнение плоскости. Геометрический смысл знака многочлена Ax + By + Cz + D.

1. Вывод уравнения плоскости, заданной точкой и двумя направляющими векторами.
2. Вывод уравнения плоскости, заданной тремя точками.
3. Параметрические уравнения плоскости.
4. Вывод уравнения плоскости, заданной точкой и перепендикулярным вектором. Нормальный вектор плоскости.
5. Общее уравнение плоскости.
6. Уравнение плоскости «в отрезках».
7. Геометрический смысл коэффициентов в общем уравнении плоскости.
8. Расположение плоскости в системе координат в зависимости от равенства нулю коэффициентов в общем уравнении плоскости.
9. Геометрический смысл знака многочлена $A_x + B_y + C_z + D$.

Решить задачи: [3] № 1059 (а), 1060 (а), 1075 (а), 1065 (устно), 1066, 1079.

Занятие 9.
Тема: Взаимное расположение 2-х и 3-х плоскостей. Признаки параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Метрические задачи теории плоскости.

1. Условия пересечения, совпадения, параллельности двух плоскостей (с обновлением).
2. Определение угла между плоскостями. Вывод формулы для вычисления угла.
3. Вывод формулы для вычисления расстояния от точки до плоскости.
4. Формула для расстояния между параллельными плоскостями.

Решить задачи: [3] № 1103, 1106, 11083 (устно), 1084 (а, в), 1087, 1089, 1196.

Занятие 10, 11.

Тема: Различные способы задания прямой.

1. Вывод уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.
2. Параметрические, канонические уравнения прямой.
3. Вывод уравнения прямой, заданной двумя точками.
4. Уравнение прямой, заданной двумя плоскостями. Общее уравнение прямой.
5. Переход от общего уравнения прямой к параметрическим или каноническим уравнениям.
6. Исследование взаимного расположения двух прямых. Обоснование условий, определяющих прямые скрещивающиеся. пересекающиеся, параллельные, совпадающие..

Решить задачи: [3] № 1133 (а, б, в), 1135, 1140 (а, б, в), 1141, 1143 (а).

1. **Занятие 12, 13, 14.**

Тема: Позиционные и метрические задачи на прямую и плоскость.

1. Как могут располагаться прямая и плоскость в пространстве, как исследовать то, если прямая и плоскость заданы уравнениями?
2. Определение угла между прямой и плоскостью. Вывод формулы для вычисления угла между прямой и плоскостью.
3. Определение угла между двумя прямыми. Вывод формулы для вычисления угла между прямыми.
4. Вывод формулы для вычисления расстояния от точки до прямой.

Решить задачи: [3] № 1136 (устно), 1144, 1146, 1149, 1150, 1157, 1161, 1165, 1168.

Занятие 15.

Тема: Примерный вариант контрольной работы.

Задача 1. Даны вершины треугольной призмы A(1,-2,2), B(1,0,-1), C(0,1,2), A_1(-1,1,1)

Найти: а) уравнение плоскости основания ABC;

б) уравнение прямой AC;

в) уравнения высоты A_1H призмы;

г) длину высоты A_1H;

д) вычислить величину угла между ребром AA_1 и плоскостью основания ABC;

е) вычислить объем призмы;

ж) вычислить площадь основания ABC призмы.

Задача 2.

Определить взаимное расположение прямой ℓ $\begin{cases} x+y-2z-9=0 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$ и плоскостью α: $x - z + 11 = 0$. Вычислить расстояние от начала координат до прямой ℓ и плоскости α.

Задача 3. Доказать, что прямые ℓ: $(x - 1) / 1 = y / 3 = (z - 2) / 5$

и m: $\begin{cases} x = -3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases}$ скрещивающиеся и вычислить расстояние между ними.

Планы практических занятий (3 семестр)

Занятие 1,2. Преобразования плоскости. Движения. Движения первого и второго рода. Формулы движений. Применение к решению задач.

1. Существует ли: параллельный перенос, поворот, симметрия, - отображающие: а) прямую на себя;

   б) пару параллельных прямых на себя;

в) один отрезок на другой отрезок;
г) луч на сонаправленный с ним;
д) пару пересекающихся прямых на себя;
е) точку А на точку В.

2. Параллельный перенос задан парой соответствующих точек М(1;-3) и М´(7;0). Записать формулы параллельного переноса и найти образ прямой 2х +3у-2=0.

3. Параллельный перенос задан формулами х' = х + 2, у' = у – 8. На прямой ℓ: 2х – 3у – 7 = 0. Найти точку, которая при данном переносе попадает на прямую m: 7х – у + 5 = 0.

4. Даны два равных непараллельных отрезка АВ, А'В' и прямая ℓ. Построить образ прямой ℓ при повороте, переводящим точки А и В соответственно в точки А' и В'.

5. На прямых ℓ: х+2у-8=0 и m: 5х-3у+1=0. Найдите точки, симметричные относительно начала координат.

6. Даны две различные точки В, В' и прямая ℓ. Построить образ прямой ℓ при осевой симметрии. для которой точки В, В' являются соответствующими.

7. Найти координаты образа точки А (1, 1) при скользящей симметрии, при которой точка О (0, 0)и В (1, 2), переходящие соответственно в точки О' (2, 5) и В' (4, 4).

8. Составить формулы движения первого рода, при котором прямая х - у= 0 является образом прямой х - у - 4 = 0, а точка А (2, 0) – инвариантна.

9. Выяснить, какие из данных формул являются формулами движений. Определить вид движения.

а) х' = ¾ х – 4/5у + 1 б) х' = 2 х + у + 1 в) х' = - х + 2
у' = 4/5х + 3/5у - 1 у' = х + 2 у' = - у - 4

7. В трапеции АВСД точки О и М середины отрезков АС и СД соответственно. Построить образ Δ ВСМ при композиции преобразований $S_{AB}° T_{BA} ° Z_O$.

Занятие 3. Преобразования плоскости. Подобие и гомотетия.

1. Существует ли гомотетия, отображающая: а) одну из двух пересекающихся (параллельных) прямых на другую; б) луч в ему сонаправленный (противоположно направленный); в) окружность на неравную ей окружность.
2. Каким преобразованием является произведение двух гомотетий с общим центром (с различными центрами)?
3. Какое из данных преобразований является подобием:
   $x'=3x-4y+1$ $x'=8x+y+3$
   $y'=4x+3y-2$ $y'=x+8y-3$
4. Найти координаты образа точки А (2;-4) при гомотетии с центром С (1;-8) и коэффициентом к = - 3.
5. Найти центр и коэффициент гомотетии отображающего точки А(-2;1), В(2;-1) соответственно в точки А'(6;5), В'(6,11).
6. АВСД – трапеция, М и К – середины отрезков СД и ВД соответственно, О- точка пересечения диагоналей. Построить образ четырехугольника КМСО при композиции преобразований $S_{AB}° R^{60}{}_{A}° T_{CB} ° H^{2}{}_{D}$.
7. Доказать, что если A_1,B_1,C_1 – середины сторон треугольника АВС, то треугольник АВС гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$.
8. В АВСД точки $A_1,B_1,C_1,Д_1$ – центры тяжести треугольников ВСД, СДА, ДАВ, АВС соответственно. Найти площадь четырехугольника $A_1B_1C_1Д_1$, если $S_{ABCД}$=Р.
9. Доказать, что точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения продолжения боковых сторон лежат на прямой, проходящей через середины оснований трапеции.

Занятие 4,5. Построения циркулем и линейкой.

1. На плоскости нарисована окружность, но центр ее не отмечен. Постройте его.
2. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

3. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.
4. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.
5. Проведите касательную к окружности, проходящую через данную точку вне окружности.
6. Проведите общую касательную к двум данным окружностям.
7. Дан отрезок длины a и натуральное число n. Построить отрезок длины .
8. Дан отрезок длины a и натуральные числа m и n. Построить отрезок длины m/n a.
9. Даны отрезки с длинами a, b, c. Построить отрезок, длина которого равна ab/c.
10. Даны отрезки с длинами a и b. Построить отрезок длины .
11. Дан угол. Внутри угла найти точку, находящуюся на заданных расстояниях от сторон угла.
12. Построить треугольник по стороне, опущенной на нее высоте и радиусу описанной окружности. Сколько получится треугольников?
13. В данном треугольнике провести прямую, параллельную основанию так, чтобы сумма отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием, была равна основанию.
14. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Провести прямую, пересекающую отрезок AC в точке X, а отрезок BC — в точке Y таким образом, что AX = XY = YB.

Занятие 6,7. Построение двусторонней линейкой.

1. Постройте центр данной окружности с помощью двусторонней линейки, если известно, что ширина линейки меньше диаметра окружности.
2. Даны угол AOB, прямая l и точка P на ней. С помощью одной двусторонней линейки проведите через точку P прямые, образующие с прямой l угол, равный углу AOB.
3. Даны отрезок AB, непараллельная ему прямая l и точка M на ней. С помощью одной двусторонней линейки постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса AB с центром M.
4. Даны прямая l и отрезок OA, параллельный l. С помощью одной двусторонней линейки постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса OA с центром O.
5. Даны отрезки O_1A_1 и O_2A_2. С помощью одной двусторонней линейки постройте радикальную ось окружностей радиуса O_1A_1 и O_2A_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно.
6. Выполните построения с помощью линейки с двумя параллельными краями (двусторонней линейки) без циркуля.
   а) Постройте биссектрису данного угла AOB.
   б) Дан острый угол AOB. Постройте угол BOC, биссектрисой которого является луч OA.
7. С помощью одной двусторонней линейки восставьте перпендикуляр к данной прямой l в данной точке A.
8. С помощью одной двусторонней линейки:
   а) через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой;
   б) постройте середину данного отрезка.
9. Дана линейка постоянной ширины (т.е. с параллельными краями) и без делений. Постройте биссектрису данного угла.
10. Разделите данный отрезок пополам с помощью линейки с параллельными краями и без делений.

Занятие 8. Построение линейкой с эталоном длины.

1. Соединить две точки прямою и найти точку пересечения двух прямых в случае, если эти прямые непараллельны.
2. Отложить данный отрезок на данной прямой от некоторой точки.
3. Данный угол отложить при данной прямой или построить прямую, пересекающую данную прямую под данным углом.
4. Через данную точку провести параллельную к данной прямой .
5. К данной прямой провести перпендикуляр.

Занятие 9. Построения одним циркулем.

1. Разделите окружность с данным центром на 6 равных частей, пользуясь только циркулем.
2. Пользуясь только циркулем, удвойте данный отрезок, т.е. постройте для данных точек A и B такую точку C, чтобы точки A, B, C лежали на одной прямой (B между A и C) и AC = 2AB.
3. Построить отрезок, в 2^n раз меньший данного отрезка (разделить данный отрезок AB на 2, 4, ..., 2^n равных частей).
4. (первая основная операция). На прямой, заданной двумя точками A и B, построить одну или несколько точек.
5. От дайной точки C отложить отрезок равный и параллельный данному отрезку AB.
6. (третья основная операция). Найти точки пересечения двух данных окружностей (O, |MB|) и (O, |CD|).

Занятие 10. Восстановление треугольника по серединному перпендикуляру одной из его сторон, прямой, содержащей высоту, и точке.

1. Восстановить треугольник, если даны вершина треугольника, прямая, содержащая высоту, и прямая, содержащая серединный перпендикуляр. (рассмотреть все случаи).
2. Восстановить треугольник, если даны инцентр треугольника, прямая, содержащая высоту, и прямая, содержащая серединный перпендикуляр.
3. Восстановить треугольник, если даны основание биссектрисы треугольника, прямая, содержащая высоту, и прямая, содержащая серединный перпендикуляр. (рассмотреть все случаи).

Занятие 11, 12. Параллельное проектирование. Изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.

Цель: Основные факты параллельной геометрии; изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.

1. Постройте параллельную проекцию равностороннего треугольника. В нем изобразите:
   а) среднюю линию;
   б) радиус вписанной окружности;
   в) радиус описанной окружности.

2. Дано изображение ромба. Найдите изображение его высоты, если острый угол ромба равен 60°.

3. Дано изображение треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около данного треугольника.

4. Дано изображение равнобедренного треугольника, в котором боковая сторона в два раза больше его основания. Постройте изображения всех его замечательных точек.

5. Постройте параллельную проекцию фигуры, являющуюся объединением квадрата и равностороннего треугольника, имеющих общую сторону.

6. Постройте изображение окружности с заданным радиусом.

Домашнее задание.
1. Постройте параллельную проекцию квадрата. В нем изобразите:
   а) радиус вписанной окружности;
   б) Радиус описанной окружности;
   в) перпендикуляр, проведенный из вершины А на прямую DM, где М – середина стороны АВ.

2.Дано изображение треугольника АВС, одна сторона АВ которого равна 10см., а другая сторона АС – 8см. Постройте изображение биссектрисы данного треугольника, проведенной из вершины А.

3. Постройте параллельную проекцию квадрата, вписанного в правильный треугольник.

Занятие 13, 14. Полные и неполные изображения. Позиционные задачи. Построение сечений.

Цель: Понятие полного и неполного изображения, методы построений сечений.

1. Дана проектирующая плоскость и прямая общего положения. Найти точку пересечения прямой с данной плоскостью.
2. Построить сечение правильной пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки М и Р на боковых ребрах призмы, не принадлежащие одной грани, и точку К на боковой грани, не содержащей указанных ребер.
3. Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, заданной следом, не пересекающим основания призмы и точкой, лежащей в плоскости верхнего основания призмы.

Домашнее задание.
1. Через точку М в основании шестиугольной пирамиды ОАВСДЕН проведена плоскость, параллельная боковой грани ОАН. Построить сечение пирамиды этой плоскостью (за точку М взять центроид треугольника АВН).
2. Построить сечение пятиугольной призмы АВСДЕА0В0С0Д0Е0 плоскостью, проходящей через точку М на ребре С0Д0 а параллельно прямым С0Е0 и А0Е0

Занятие 15. Контрольная работа.

Занятие 16. Проективные, перспективные отображения. Принципы двойственности.

Цель: Понятия проективного и перспективного отображений, их основные свойства. Принципы двойственности, применение принципов двойственности при доказательствах основных фактов геометрии.
1. Определить фигуры, двойственные трехвершиннику по большому и малому принципам двойственности.
2. Доказать теорему, двойственную по большому принципу двойственности теореме: через всякую прямую проходят по крайней мере две плоскости.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Построены отрезки MN и AN. Выполнить двойственное построение.
4. Сформулировать теорему, двойственную обратной теореме Дезарга в пространстве, и доказать ее.

Домашнее задание.
1. Какая фигура двойственно треугольнику по малому принципу двойственности?
2. Доказать предложение, двойственное данному: существуют четыре плоскости, не принадлежащие как одной прямой, так и одной точке.
3. Сформулировать задачу, двойственную данной (по малому принципу двойственности) и решить ее: даны треугольник ABC и три точки A0, B0, C0, лежащие на одной прямой s. Построить треугольник A1B1C1 так, чтобы его вершины A1, B1 и C1 лежали соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC, а его стороны B1C1, C1A1 и A1B1 проходили через точки A0, B0 и C0.

Занятие 17. Сложное отношение, гармонизм, проективное соответствие форм первой ступени.

Цель: Понятие сложного отношения четырех элементов в формах первой ступени, свойства, гармонизм, задание и построение проективного соответствия в формах первой ступени.
1. Даны точки прямолинейного ряда A(2; -3), B(3; -1), C(4; 1), Д(5, 3). Вычислить значения сложного отношения этих точек, соответствующие всевозможным их перестановкам.
2. Построение полного четырехвершинника.
3.На одной прямой заданы три различные точки A, B, C. Построить точки:
1) $Д_1$: (AB,$СД_1$) = -1;
2) $Д_2$: (AC,$ВД_2$) = -1;
3) $Д_3$: (BC,$АД_3$) = -1.
4. Ряд l (A(0; 0), B(6; 0), C(12;0),...) проективен ряду l_1(A_1(0; 10), B_1(15; -5), C_1(5; 5),...). Для точки D(8; 0) ряда l построить соответствующую ей точку D_1 ряда l_1.

Домашнее задание.
1. Даны три точки оси Ox: A(0), B(5), C(10).
   а) на оси Ox найти точку D, чтобы (AB, CD) = 4;
   б) построить точку E, чтобы CE $\overset{h}{—}$ AB.

2. Ряд l (A(-2; 0), B(0; 0), C(4; 0),...) $\underset{\wedge}{—}$ l_1 (A_1(-1; 5), B_1(1; 5), C_1(3; 5),...). Для точки D(-4; 0) ряда l построить ей соответствующую D_1 ряда l_1.

Занятие 18. Теоремы Дезарга.
Цель: Применение основной теоремы проективной геометрии для решения задач.
1. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. $AA' \cap BB' \cap CC' = S$.

2. В евклидовой плоскости в четырехугольник вписана трапеция, параллельные стороны которой || его диагонали. Доказать, что непараллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали.

3. В треугольнике ABC из его вершин проведены прямые, пересекающиеся в одной точке S; $A'=AS \cap BC$, $B'=BS \cap AC$, $C'=CS \cap AB$. Доказать, что точки $BC \cap B'C'$, $AC \cap A'C'$, $AB \cap A'B'$ лежат на одной прямой.

4. В конфигурации Дезарга одну из точек выбрать за дезаргову точку. Найти в этой конфигурации вершины дезарговых треугольников и дезаргову прямую.

5. Сформулировать в терминах евклидовой геометрии теорему Дезарга для случая:

1) ()S? - несобственная (), дезаргова прямая S - собственная.
Формулировка теоремы Дезарга: Если прямые проходящие через соответствующие вершины двух треугольников параллельны, то точки пересечения соответствующих сторон лежат на одной прямой.
2) ()S собственная, прямая S? - несобственная.

6. Даны прямые a и b, пересекающиеся в точке S, которая лежит за пределами чертежа. Дана точка C не лежащая ни на одной из данных прямых. Построить прямую SC.

Домашнее задание.

1. Даны две точки P и Q и не проходящая через них прямая c. построить точку $PQ \cap c$, не проводя PQ.

2. На евклидовой плоскости даны две параллельные прямые $a \| b$ и точка C, им не принадлежащая. Через точку C провести прямую, параллельную a и b.

3. Трапеция ABCD пересечена прямыми p и q, параллельными основанию AB, $p \cap AD=M$, $p \cap AC=P$, $q \cap BD=N$, $q \cap BC=Q$. Доказать, что точка $MN \cap PQ$ лежит на прямой AB. Требуется доказать, что $MN \cap PQ \cap AB=K$.

Занятие 19. Сложное отношение, гармонизм.

Цель: Понятие сложного отношения четырех элементов в формах первой ступени, свойства, гармонизм, задание и построение проективного соответствия в формах первой ступени.

1. Даны точки прямолинейного ряда A(2; -3), B(3; -1), C(4; 1), Д(5, 3). Вычислить значения сложного отношения этих точек, соответствующие всевозможным их перестановкам.
2. Построение полного четырехвершинника.
3.На одной прямой заданы три различные точки A, B, C. Построить точки:
1) $Д_1$: $(AB,CД_1) = -1$;
2) $Д_2$: $(AC,BД_2) = -1$;
3) $Д_3$: $(BC,AД_3) = -1$.
4. Ряд l (A(0; 0), B(6; 0), C(12;0),...) проективен ряду l_1(A_1(0; 10), B_1(15; -5), C_1(5; 5),...). Для точки D(8; 0) ряда l построить соответствующую ей точку D_1 ряда l_1.

Домашнее задание.

1. Даны три точки оси Ox: A(0), B(5), C(10).
   а) на оси Ox найти точку D, чтобы (AB, CD) = 4;
   б) построить точку E, чтобы $CE \overset{h}{—} AB$.

2. Ряд l (A(-2; 0), B(0; 0), C(4; 0),...) $\underset{\wedge}{—}$ l_1 (A_1(-1; 5), B_1(1; 5), C_1(3; 5),...). Для точки D(-4; 0) ряда l построить ей соответствующую D_1 ряда l_1.

Занятие 20. Контрольная работа

Планы практических занятий (4 семестр)

Занятие 1, 2. Треугольники. Сумма углов треугольника. Замечательные точки и линии треугольника. Теорема Пифагора. Признаки равенства треугольников.

На занятии систематизируются знания учащихся о треугольниках и его высотах, его медианах, учащиеся формулируют и доказывают теоремы о точке пересечения медиан, о подобии треугольников, выводят формулу нахождения медианы треугольника, если известны его стороны, формулируют и доказывают теоремы о точке пересечения высот, о подобии треугольников, образованных высотой, опущенной и вершины прямого угла данного треугольника; выводят формулу нахождения высоты треугольника, если известны его стороны; знакомятся с минимальным свойством треугольника.

Теорема. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
Замечание: В случае тупоугольного треугольника основания его высот находятся на продолжениях сторон, прилежащих к тупому углу:
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется ортоцентром.
Определение 2. Треугольник, образованный основаниями высот треугольника, называется ортоцентрическим.
Задания:

1. Доказать, что для произвольного треугольника ABC верно равенство: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$, где r - радиус вписанной в треугольник окружности.

2. Пусть O, Q, M и H – соответственно центры описанной, вписанной окружностей, точка пересечения медиан и точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что если две любые из этих точек совпадают, то этот треугольник – равносторонний.

3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B_1 и C_1, для которых $\angle AB_1C = = \angle AC_1B = 90°$. Доказать, что $AB_1 = AC_1$.
(Зарубежные математические олимпиады: Нью-Йорк, 76).

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется центроидом.

1. Длина медианы треугольника выражается формулой
$m_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}}$,
где a, b, c – длины сторон треугольника.

2. Для всякого треугольника выполняется соотношение:
$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

4. m_a, m_b и m_c – медианы треугольника. Докажите, что если $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{27R^2}{4}$, то треугольник равносторонний, где R – радиус описанной окружности.

Теорема. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется инцентром.

5. Пусть l_a, l_b, l_c – биссектрисы треугольника, p – его полупериметр. Докажите, что если
$l^2_a + l^2_b + l^2_c = p^2$, то треугольник равносторонний.

6. Дан ΔABC. Биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 его внутренних углов пересекаются в точке O. Известно, что треугольники AOB_1 и AOC_1 симметричны относительно прямой AO, треугольники A_1OB и BOC_1 – относительно BO, а треугольники A_1OC и B_1OC – относительно OC. Доказать, что ΔABC – равносторонний.

Домашнее задание.
1. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B и C , для которых AB C = = AC B = . Доказать, что AB = AC .
2. Треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника. (Всероссийская олимпиада, 1964г.(Москва)).
3. Пусть m_a, m_b, m_c – медианы треугольника, а h_a, h_b, h_c – его высоты. Докажите, что если $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} = 3$, то треугольник равносторонний.

Занятие 3. Параллелограмм. Трапеция.

1. На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника ABCD отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что AM = CP, BN = DQ, BM = DP, NC = QA. Докажите, что ABCD и MNPQ — параллелограммы.

2. Пусть M — середина стороны BC параллелограмма ABCD. В каком отношении отрезок AM делит диагональ BD?

3. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60o. Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие через середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.

4. Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

5. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 41, высота равна 40 и средняя линия равна 45. Найдите основания.

6. Середину более длинной боковой стороны прямоугольной трапеции соединили с вершинами трапеции. При этом трапеция разделилась на три равнобедренных треугольника. Найдите величину острого угла трапеции.

Домашнее задание.
1. Два различных параллелограмма ABCD и A1B1C1D1 с соответственно параллельными сторонами вписаны в четырехугольник PQRS (точки A и A1 лежат на стороне PQ, B и B1- на QR и т. д.). Докажите, что диагонали четырехугольника параллельны сторонам параллелограммов.

2. В трапеции ABCD с основаниями AB = a и CD = b проведён отрезок A1B1, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции проведён отрезок A2B2, тоже соединяющий середины диагоналей, и так далее. Может ли в последовательности длин отрезков AB, A1B1, A2B2,... какое-то число встретиться дважды? Является ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей)? Стремится ли она к какому-нибудь пределу?

3. Основания трапеции равны a и b (a > b). Отрезки, соединяющие середину большего основания с концами меньшего основания, пересекают диагонали трапеции в точках M и N. Найдите MN.

Занятие 4, 5. Четырехугольники.

1. Угол между сторонами AB и CD четырехугольника ABCD равен j. Докажите, что AD2 = AB2 + BC2 + CD2 – 2(AB · BCcos B + BC · CDcos C + CD · ABcos j).

2. Середины M и N диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника ABCD не совпадают. Прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках M1 и N1. Докажите, что если MM1 = NN1, то AD||BC.

3. Четырёхугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Найдите EF, если BC = 1.

4. Докажите, что если для вписанного четырехугольника ABCD выполнено равенство CD = AD + BC, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.

5. Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

6. Четырёхугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвёртого треугольника. Найдите площадь данного четырёхугольника.

Домашнее задание.

1. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что AB > BC > KC, BK = 4 + , а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найдите DC.

2. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что BC > AB > KC, KC = 6 + , а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 22 и 11. Найдите DC.

3. В трапеции основания равны a и b, диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен A. Найдите площадь трапеции.

Занятие 6, 7, 8. Окружность. Углы связанные с окружностью. Вписанный и описанный четырехугольник.

Основные сведения

1. Угол ABC, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют вписанным в окружность. Пусть O — центр окружности. Тогда
PABC = 1
2 PAOC,
если точки B и O лежат по одну сторону от AC, и PABC = 180° – 1
2 PAOC,
если точки B и O лежат по разные стороны от AC. Важнейшим и наиболее часто используемым следствием этого факта является то, что величины углов, опирающихся на равные хорды, либо равны, либо составляют в сумме 180°.

2. Величина угла между хордой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, равна половине угловой величины дуги AB.

3. Угловые величины дуг, заключенных между параллельными хордами, равны.

4. Как уже говорилось, величины углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме 180°. Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введем понятие «ориентированный угол между прямыми». Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD (обозначение: P(AB,CD)) будем называть величину угла. на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на n · 180°, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме 180° или, что по нашему соглашению то же самое, 0°).
Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:
а) P(AB,BC) = – P(BC,AB);
б) P(AB,CD) + P(CD,EF) = P(AB,EF);
в) точки A,B,C,D, не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда P(AB,BC) = P(AD,DC) (для доказательства этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки B и D лежат по одну сторону от AC; точки B и D лежат по разные стороны от AC).

ЗАДАЧИ
1.а) Из точки A, лежащей вне окружности, выходят лучи AB и AC, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла BAC равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

б) Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла BAC равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричного ему относительно вершины A.

2.Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC1 и PB1 на прямые AB и AC. Докажите, что PC1AP = PC1B1P.

1.Докажите, что если центр вписанной в четырехугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей, то этот четырехугольник- ромб.

2.Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. Докажите, что PAOB + PCOD = 180°.

3.Докажите, что если существует окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника ABCD, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника перпендикулярны.

4.Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Домашнее задание.

1Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

2.Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. В треугольнике AOB проведены высоты AA1 и BB1, а в треугольнике COD- высоты CC1 и DD1. Докажите, что точки A1,B1,C1 и D1 лежат на одной прямой.

3. Углы при основании AD трапеции ABCD равны 2a и 2b. Докажите, что трапеция описанная тогда и только тогда, когда BC/AD = tg atg b.

Занятие 9, 10, 11. Подобные фигуры.

1. В треугольнике ABC на средней линии DE, параллельной AB, как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Найдите MN, если BC = a, AC = b, AB = c.

2. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S1, S2, S3. Найдите площадь данного треугольника.

3. В равнобедренный треугольник ABC (AB = BC) вписана окружность радиуса 3. Прямая l касается этой окружности и параллельна прямой AC. Расстояние от точки B до прямой l равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC.

4. В трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. На продолжениях боковых сторон AB и DC за меньшее основание BC отложены отрезки BM и CN так, что получается новая трапеция BMNC, подобная трапеции ABCD. Найдите площадь трапеции ABCD, если площадь трапеции AMND равна P, а сумма углов CAD и BDA равна 60o.

5. Через точку A общей хорды BC пересекающихся окружностей проведена прямая, пересекающая окружности в таких точках D и E соответственно, что прямая BD касается одной окружности, а прямая BE — другой. Продолжение хорды CD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найдите отношение BD : BE, если AD = 8 и AE = 2. Сравните площади треугольников BDE и BDF.

6. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если BC = 4, а AK = 6.

Домашнее задание.

1. В выпуклом четырёхугольнике ABCD известно, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD. Докажите, что ABCD — трапеция или параллелограмм.
2. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH, а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что треугольники MNC и ABC подобны.
3. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что его можно разрезать на два равных треугольника.

Занятие 12, 13, 14. Площадь фигур.

1. Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найдите угол CBD, если площади треугольников DCM и ACB относятся как 1:4.

2. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

3. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника ABCD и пересекает сторону DC в единственной точке F и сторону BC в единственной точке E. Найдите площадь трапеции AFCB, если AB = 32, AD = 40 и BE = 1.

4. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

5. Два прямоугольника положены на плоскость так, что их границы имеют восемь точек пересечения. Эти точки соединены через одну. Доказать, что площадь полученного четырёхугольника не изменится при поступательном перемещении одного из прямоугольников.

6. На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника построены квадраты, расположенные вне треугольника. Вычислить площадь шестиугольника, вершины которого совпадают с теми вершинами квадратов, которые не принадлежат данному треугольнику. Длина гипотенузы c и сумма длин катетов s известны.

Домашнее задание.
1. Докажите, что площадь треугольника можно выразить по формуле S = (p - a)ra, где ra — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны, равной a, p — полупериметр треугольника.
2. В трапецию ABCD с основаниями BC и AD и боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром O. Найдите площадь трапеции, если угол DAB прямой, OC = 2, OD = 4.

3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в семь раз меньше площади четырёхугольника ABDE. Найдите хорду DE и радиус окружности, если AB = 4 и C = 45°.

Занятие 15 Контрольная работа.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Атанасян Л. С. Геометрия: в 2 ч.: учеб. пособие для физ. - мат. фак. пед. вузов / Л. С. Атанасян, Базылев, В. Т.; В. Т. Базылев. - 2-е изд., стер. - М.: КноРус, 2011. - Часть 1. - 396 с.: ил. - Список лит.: с. 391. (Библиотека УлГПУ).
2. Атанасян Л. С. Геометрия: в 2 ч.: учеб. пособие для физ. - мат. фак. пед. вузов / Л. С. Атанасян, Базылев, В. Т.; В. Т. Базылев. - 2-е изд., стер. - М.: КноРус, 2011. - Часть 2. - 422 с.: ил. - Список лит.: с. 417. (Библиотека УлГПУ).
3. Атанасян, С. Л. Сборник задач по геометрии : [в 2 ч.]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. вузов. Ч. 1. - М. : ЭКСМО, 2007. – 333. (Библиотека УлГПУ).
4. Атанасян, С. Л. Сборник задач по геометрии : [в 2 ч.]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. вузов. Ч. 2 - М. : ЭКСМО, 2008. (Библиотека УлГПУ).
5. Остыловский, А. Н. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. Н. Остыловский. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. - 92 с. - ISBN 978-5-7638-2196-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/443221
6. Ефимов Н.В. Высшая геометрия: учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, - 2011. - 585 с. (http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=544579)

Дополнительная литература

1. Атанасян С.Л., Базылев В.Т. Геометрия Ч. 1. – М.: Просвещение, 1986 – 335с. (Библиотека УлГПУ).
2. Атанасян С.Л., Базылев В.Т. Геометрия Ч. 2. – М.: Просвещение, 1987 – 351с. (Библиотека УлГПУ).
3. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. - 2-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с. (http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=515990)

Интернет-ресурсы

– http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал