Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0233C9D60038B01A9E48C1A3FBB4A9D9F6
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 07.07.2023 до 28.04.2038

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической
работе С.Н. Титов

ТЕОРИЯ МНОГООБРАЗИЙ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕРЫ

Программа учебной дисциплины модуля
«Содержательные аспекты современного математического образования»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки
44.04.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Методология математического образования
(очная форма обучения)

Составители: Цыганов А.В.,
профессор кафедры высшей математики,
Кувшинова А.В., доцент
кафедры высшей математики,
Голубков А.В., доцент
кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, от «26» мая 2023 г. № 5

Ульяновск, 2023

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория многообразий и общая теория меры» относится к дисциплинам модуля «Содержательные аспекты современного математического образования» Блока 1. *Дисциплины (модули)* части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Методология математического образования», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках математических дисциплин образовательных программ бакалавриата, а также дисциплины Б1.В.01.01. «Динамические системы», дисциплин по выбору Б1.В.01.ДВ.01.01/02/03 «Задачи оптимизации и их математические модели»/ «Вариационные методы и модели»/ «Теория принятия решений».

Результаты освоения дисциплины являются основой для научно-исследовательской работы магистрантов.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Актуальность включения дисциплины в ОПОП определяется следующими обстоятельствами:

- важной ролью общематематического понятия многообразия и связанных с ним понятий размерности и меры как в высшей, так и в элементарной математике, а также в общенаучном и общекультурном контексте;
- поэтапным характером формирования представлений о линиях и поверхностях, фигурах на плоскости и телах, об измерении и вычислении длин, площадей, объемов на различных этапах математического образования; неизбежным смешением в сознании магистрантов различных (и построенных на различном уровне строгости) подходов к введению соответствующих понятий;
- наличием различных вариантов построения теории меры в современной математике, активным использованием идей актуальных математических дисциплин при перестройке учебных курсов по теории меры и теории интеграла;
- значением теории меры для теории вероятностей, для спектральной теории операторов, для различных разделов физики, в частности, для исследований в области космологии;
- прикладным значением теории меры, необходимостью выявления связей между абстрактными конструкциями современной математики и ее приложениями.

Целями освоения дисциплины «*Теория многообразий и общая теория меры*» являются:

- систематизация и углубление представлений магистрантов о специфике математического знания, месте и роли математики в познании мира, о единстве математики в ее многообразии;
- продолжение формирования представлений о процессе математического исследования, его важнейших чертах, особенностях постановки проблемы и представления результатов;
- формирование понятийного аппарата в области геометрической и аналитической теории многообразий, в области теории меры, необходимого при проведении самостоятельных исследований;
- формирование умения работать с математическими объектами высокого уровня абстракции, развитие соответствующего типа мышления.

В соответствии с этим при преподавании дисциплины ставятся следующие **задачи**:

- рассмотрение конкретных вещественных многообразий (кривых, поверхностей и их многомерных аналогов) с точки зрения общей теории;
- систематизация и углубление знаний по теории интегрирования в многомерных пространствах;
- освоение языка современной абстрактной теории меры и теории интеграла, применяемого в областях, близких к научному направлению кафедры высшей математики;
- формирование умений, связанных с чтением учебной математической литературы достаточно высокого уровня сложности;
- формирование представлений о связи между различными разделами математики, умений, связанных с переводом задачи с одного математического языка на другой;
- формирование приемов мыслительной деятельности, связанных с обобщением (абстрагированием) и конкретизацией математических понятий, продолжение освоения языка абстрактной алгебры и соответствующего стиля рассуждений;
- формирование методической грамотности и умений анализировать различные варианты построения математической теории, проектировать на основе избранного варианта учебный процесс для конкретной целевой аудитории.

В результате освоения программы магистрант должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция	Индикаторы достижения компетенции	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования компетенции)		
		теоретический	модельный	практический
ПК-4	**Способен разрабатывать методическое обеспечение предмета «математика», математических дисциплин (модулей) на разных уровнях обучения**			
	ИПК.4.1	**Знает: структуру и функции учебно-методического комплекса (УМК) по математике; требования к разработке компонентов УМК по математике; требования к использованию УМК в процессе обучения математике образовательных организациях соответствующих уровней образования; характеристики достижений обучающихся в контексте обучения математике (согласно ФГОС соответствующих уровней образования)**		
		Магистрант знает	Магистрант умеет	Магистрант владеет
		ОР-1: содержание разделов математики, связанных с понятиями многообразия и меры, на разных ступенях образования		
		ОР-2: основные классы и способы решения задач на касательные, задач на вычисление меры объектов, включая историю их становления		

	ИПК.4.2	**Умеет: разрабатывать элементы УМК по математике: дидактические материалы и раздаточные учебные материалы, задания и задачи; применять приемы ориентирования обучающихся в учебном материале, организации работы с математическим текстом, геометрическими чертежами, графиками, числовыми данными, вовлечения обучающихся в работу с УМК по моделированию и тестированию**		
		Магистрант знает	Магистрант умеет	Магистрант владеет
			ОР-3: выбирать адекватные уровню образования подходы к введению понятий и обоснованию результатов	ОР-4: навыками оформления и проверки решений задач элементарной и высшей математики, связанных с многообразиями и их мерой
ПК-5	**Способен осуществлять поиск, анализ и обработку научной информации в целях исследования проблем образования в предметной области направленности (профиля) магистратуры**			
	ИПК 5.1	**Знает: источники научной информации, необходимой для обновления содержания образования по дисциплинам (курсам) предметной области направленности (профиля) магистратуры и трансформации процесса обучения; методы работы с научной информацией; приемы дидактической обработки научной информации в целях ее трансформации в учебное содержание**		
		Магистрант знает	Магистрант умеет	Магистрант владеет
		ОР-5: литературные и сетевые источники, позволяющие сопоставлять подходы элементарной и высшей математики к общим понятиям		ОР-7: навыками восприятия математической информации высокого уровня абстракции, построения моделей-интерпретаций абстрактных конструкций
		ОР-6: приёмы структурирования информации для освоения математического содержания различного уровня абстракции		

	ИПК 5.2	**Умеет: вести поиск и анализ научной информации; осуществлять дидактическую обработку и адаптацию научных текстов в целях их перевода в учебные материалы**		
		Магистрант знает	Магистрант умеет	Магистрант владеет
			ОР-8: осваивать математическое содержание на новом уровне, находя и используя связи с известным материалом	ОР-10: навыками адаптации математического текста (популярная статья, учебник) в целях ознакомления обучающихся с его основной проблематикой
			ОР-9: выделять и сопоставлять основные подходы к построению базовых математических понятий, представлять их в компактной форме	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия					Форма промежуточной аттестации
	Всего	Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоятельная работа, час	
	Трудоемкость					

	Зач. ед.	Часы					
3	5	180	6	40	–	107	Экзамен
Итого:	5	180	6	40	–	107	27

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Отбор математического содержания дисциплины определяется необходимостью знакомства магистрантов с классическими и современными подходами к построению понятий многообразия, меры, интеграла, к решению базовых задач математики. Основное внимание уделяется взаимосвязям различных математических дисциплин, изучающих кривые, поверхности, их многомерные и бесконечномерные обобщения. При этом изучение предлагается проводить на базе методов классического математического анализа, дифференциальной геометрии, функционального анализа и в некоторой степени общей топологии, алгебраической топологии, математической физики, что соответствует профилю аспирантуры при кафедре высшей математики. Изучение соответствующих разделов может быть продолжено на более глубоком уровне в рамках учебного плана аспирантуры по направлению 01.06.01 *Математика. Механика,* профилю 01.01.01 *Вещественный, комплексный и функциональный анализ*.

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
3 семестр				
1. Элементарная теория многообразий размерности 1 и 2.		8	–	22
2. Топологические многообразия и гладкие структуры. Карты и атласы. Размерность и коразмерность.	2	6	–	15
3. Дифференциальные формы на многообразиях. Касательное расслоение. Связность	1	6		15
4. Интегрирование по многообразию. Формула Стокса	1	6		15
5. Основы абстрактной теории меры и интеграла	2	6		15
6. Величины и их меры в школьном курсе математики, в курсе высшей математики		8		25
Всего по дисциплине:	**6**	**40**	–	**107**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Тема 1. Элементарная теория многообразий размерности 1 и 2.

Кривые на плоскости, в трехмерном пространстве: параметризованная кривая (путь), эквивалентные пути, простые пути, гладкие пути, регулярные пути, (жорданова)

кривая как класс эквивалентности; множества на плоскости, заданные уравнениями, простая точка множества, неособая точка множества, простая линия; длина кривой, натуральный параметр, кривизна кривой; нормаль плоской кривой, сопровождающий базис Френе плоской кривой, главная нормаль пространственной кривой, соприкасающаяся плоскость, бинормаль, нормальная плоскость, спрямляющая плоскость, сопровождающий базис Френе, кручение пространственной кривой. Поверхности в трехмерном пространстве: параметризованная поверхность, (гладкие регулярные простые) параметризации, эквивалентные параметризации, координаты на поверхности, диффеоморфизмы и замена координат, элементарные поверхности как классы эквивалентности; касательная плоскость элементарной поверхности, касательные векторы; гладкие отображения элементарных поверхностей и их дифференциалы, диффеоморфизмы элементарных поверхностей, дифференциал диффеоморфизма как изоморфизм касательных пространств; первая квадратичная форма поверхности и метрический тензор, длина кривой на поверхности, угол между кривыми на поверхности; площадь поверхности и первая квадратичная форма; вектор нормали к элементарной поверхности и сопровождающий базис поверхности; вторая квадратичная форма поверхности, главные кривизны, полная и средняя кривизна; коэффициенты связности (символы Кристоффеля); графики в трехмерном пространстве, неявное задание поверхности.

Тема 2. Топологические многообразия и гладкие структуры. Карты и атласы. Размерность и коразмерность. Касательные пространства. Гладкие отображения многообразий.

Карты в произвольном множестве, носитель карты, локальные координаты; согласованные карты, функции перехода; атлас на множестве, максимальные атласы, гладкие структуры, гладкие многообразия, топологические многообразия, аналитические многообразия. Теорема о неявной функции, теорема о системе неявных функций и гладкие многообразия. Размерность и коразмерность многообразия. Векторные и тензорные поля на многообразии. Траектории векторного поля. Дифференциальные уравнения на многообразии.

Касательный вектор многообразия. Касательное пространство в заданной точке. Гладкие отображения многообразий и их дифференциалы. Кокасательное пространство, градиент, производная по вектору.

Тема 3. Дифференциальные формы на многообразиях. Касательное расслоение. Связность.

Параллельный перенос вектора вдоль пути. Касательное расслоение гладкого многообразия. Понятие аффинной связности. Коэффициенты аффинной связности и примеры вычисления символов Кристоффеля. Перенос векторных и тензорных полей с помощью диффеоморфизмов с одного многообразия на другое. Дифференцирования. Производная Ли тензорного поля по векторному полю. Линейные дифференциальные формы (ковекторные поля) на многообразии. Дифференциальные формы на многообразии и линейные операции над ними. Внешнее умножение дифференциальных форм. Перенос дифференциальных форм посредством отображения многообразий. Внешнее дифференцирование дифференциальных форм. Точные и замкнутые дифференциальные формы, связь между классами точных и замкнутых дифференциальных форм на заданном многообразии.

Тема 4. Интегрирование по многообразию. Формула Стокса.

Множества (жордановой) меры нуль в пространстве R^n. Интеграл (Римана) по кубируемой области пространства R^n. Нуль-множества и кубируемые множества на многообразии.

Области с регулярной границей. Ориентация края ориентированного многообразия. Интеграл от дифференциальной формы по границе многообразия. Формула Стокса (для дифференциальных форм произвольной степени). Формулы Стокса в R^3, Остроградского-Гаусса, Грина, Ньютона-Лейбница как частные случаи общей формулы Стокса.

Тема 5. Основы абстрактной теории меры и интеграла.

Кольцо множеств, конечно-аддитивные и счетно-аддитивные функции множеств.

Решетки, булевы алгебры, представления булевых алгебр в виде алгебр подмножеств. Конечно-аддитивные меры на алгебре подмножеств и порожденные ими внешние меры. Множества меры нуль, измеримые множества. Счетно-аддитивные меры, продолжение меры. Мера Лебега как продолжение меры с алгебры борелевских множеств.

Функции, измеримые относительно заданной пары мер. Свойства измеримых функций.

Интеграл Лебега как (однозначно определенный) функционал на классе измеримых функций. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Пространства суммируемых по Лебегу функций.

Тема 6. Величины и их меры в школьном курсе математики, в курсе высшей математики.

Величины и их меры в математике: исторический обзор. Изучение понятия площади в школьном курсе математики. Изучение понятия объема в школьном курсе математики. Площадь криволинейной трапеции как задача, приводящая к понятию определенного интеграла (школьный курс математики, курс высшей математики). Различные подходы к введению понятия интеграла Римана; связь между задачами дифференцирования и интегрирования в теории Римана. Определение квадрируемых фигур, кубируемых тел, спрямляемых кривых, квадрируемых поверхностей в курсе математического анализа.

Множества, не измеримые по Жордану, понятие о дробной размерности.

Применение интегрального исчисления к вычислению площадей и объемов в школьном курсе математики, в курсе высшей математики. Физические приложения определенного интеграла (школьный курс математики, курс высшей математики). Различные подходы к введению понятия меры Лебега и интеграла Лебега; связь между задачами дифференцирования и интегрирования в теории Лебега.

Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной

программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным докладам (мини-выступлениям);
- подготовка к защите реферата;
- подготовка к групповому обсуждению по темам;
- подготовка стендовых докладов и постеров;
- разработка проектов.

4. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами **текущего оценивания** являются: самостоятельная работа (доклад), контрольная работа, тест по теоретическим вопросам дисциплины. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

ОС-1. Самостоятельная работа

Примерный перечень тем докладов.

«Некоторые классы гладких многообразий»:

1. Некоторые замечательные кривые на плоскости.
2. Некоторые замечательные кривые в пространстве.
3. Кривые нулевой кривизны, постоянной кривизны, нулевого кручения, постоянного кручения.
4. Локальный портрет регулярной кривой в сопровождающем базисе Френе.
5. Некоторые замечательные кривые на сфере.
6. Некоторые замечательные поверхности в трехмерном пространстве.
7. Многомерные аналоги шаров, сфер, цилиндров, конусов и их свойства.
8. Лист Мебиуса и его параметризация.
9. Группа унимодальных матриц как аналитическое многообразие.
10. Группа ортогональных матриц как аналитическое многообразие.
11. Группа унитарных матриц как аналитическое многообразие.

«Некоторые проблемы теории меры и интеграла»:

1. Интеграционные методы в трудах Архимеда.
2. Проблема обоснования интегрального исчисления до Б.Римана.
3. Третья проблема Гильберта и ее решение.
4. Классическая изопериметрическая задача, классическая изопифанная задача и их обобщения.
5. Проблема продолжения меры с полукольца на кольцо.
6. Различные способы введения понятия интеграла Римана.
7. Различные способы введения понятия интеграла Лебега.
8. Различные способы введения понятия интеграла Стилтьеса.
9. Интеграл Бохнера от операторнозначных функций. Основы функционального исчисления операторов.
10. Основные понятия теории операторных мер. Спектральное разложение некоторых классов операторов.
11. Дифференцирование и интегрирование как взаимно обратные операции (в теории Римана, в теории Лебега).
12. Возможность предельного перехода под знаком интеграла (в теории Римана, в теории Лебега).
13. Сведение кратных интегралов к повторным (в теории Римана, в теории Лебега).
14. Считающие меры (меры на нульмерных многообразиях) и их применение.

ОС-2. Контрольная работа

Примерный вариант контрольного задания.

1. Найти выражение для гауссовой кривизны поверхности, заданной параметрически.
2. Решить задачу на приложения интегрального исчисления к вычислению геометрических и физических величин.
3. Решить задачу повышенного уровня школьного курса математики (КИМ ЕГЭ, олимпиады и т.п.).

ОС-3. Тест

Тест по основным понятиям дисциплины, примерный вариант вопросов представлен в ФОС.

№ п/п	Средства оценивания, используемые для текущего оценивания индикатора формирования компетенции	Показатели формирования компетенции (образовательные результаты)									
		ОР-1	ОР-2	ОР-3	ОР-4	ОР-5	ОР-6	ОР-7	ОР-8	ОР-9	ОР-10
		ПК-4				ПК-5					
		ИПК 4.1		ИПК 4.2		ИПК 5.1			ИПК 5.2		
1.	ОС-1 Самостоятельная работа					+	+			+	+
2.	ОС-2 Контрольная работа	+	+		+			+			
3.	ОС-3 Тест	+	+	+					+		
Промежуточная аттестация	ОС-4. Экзамен в форме собеседования по билету.										

Промежуточная аттестация (экзамен) проводится в форме собеседования по билету.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-4. Программа экзамена по дисциплине

1. Понятие топологического многообразия. Карты и атласы. Многообразие с краем. Размерность многообразия и размерность его края.
2. Понятие гладкого многообразия. Диффеморфизмы гладких многообразий.
3. Касательные векторы и касательные пространства.
4. Пути на многообразии. Перенос вектора вдоль пути. Понятие о связности.
5. Теорема о неявной функции, теорема о системе неявных функций и гладкие многообразия. Размерность и коразмерность.
6. Важнейшие примеры гладких многообразий: кривые и поверхности в трехмерном пространстве.
7. Важнейшие примеры гладких многообразий: группы матриц.
8. Основные понятия тензорного анализа.
9. Дифференциальные формы на многообразии и линейные операции над ними. Внешнее умножение дифференциальных форм.
10. Перенос дифференциальных форм посредством отображения многообразий.
11. Внешнее дифференцирование дифференциальных форм. Точные и замкнутые дифференциальные формы, связь между классами точных и замкнутых дифференциальных форм на заданном многообразии.
12. Плотность. Интеграл плотности по области в n-мерном пространстве (n-кратный интеграл).
13. Ориентируемые многообразия, ориентация. Примеры ориентируемых и неориентируемых многообразий. Ориентация многообразия и ориентация его края.
14. Определение интеграла по ориентированному многообразию (поверхностного интеграла от дифференциальной формы степени m по поверхности размерности m в в n-мерном пространстве) с помощью переноса форм. Случаи криволинейных и поверхностных интегралов в трехмерном пространстве.

15. Интеграл по многообразию и интеграл по его краю. Общая формула Стокса и ее частные случаи.
16. Кольцо множеств, конечно-аддитивные и счетно-аддитивные функции множеств. Понятие меры, понятие счетно-аддитивной меры.
17. Кольцо многоугольников, кольцо многогранников и меры на них.
18. Борелевские алгебры множеств и меры на них.
19. Конструкция лебегова продолжения меры (один из вариантов по выбору магистранта).
20. Сигма-конечные меры. Последовательности измеримых множеств и предельный переход.
21. Измеримые функции и их свойства. Сходимость по мере и сходимость почти всюду.
22. Конструкция интеграла Лебега (один из вариантов по выбору магистранта).
23. Прямые произведения мер, кратные интегралы и теорема Фубини.
24. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы магистранта

№ п/п	**Вид деятельности** (3 семестр)	**Максимальное количество баллов**
1.	Посещение лекционных занятий	3
2.	Посещение практических занятий	20
3.	Работа на занятиях и самостоятельная внеаудиторная работа, всего	417
в том числе:	ОС-1. Самостоятельная работа ОС-2. Контрольная работа ОС-3. Тест	150 167 100
4.	ОС-4. Экзамен по билетам	60
Итого	5 зачетных единиц	500

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

По итогам освоения дисциплины «Теория многообразий и общая теория меры», которая изучается в 3 семестре и трудоёмкость которой составляет 5 ЗЕ, магистрант набирает определённое количество баллов, которое соответствует результату «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно» согласно следующей таблице:

Итоговое количество баллов	**Итоговая отметка**
0-250	неудовлетворительно
251-350	удовлетворительно
351-450	хорошо
451-500	отлично

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично

фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Занятие № 1. Кривые на плоскости.
Занятие № 2. Кривые в трехмерном пространстве.
Занятие № 3. Поверхности в трехмерном пространстве.
Занятие № 4. Квадратичные формы поверхности.
Занятие № 5. Карты и атласы.
Занятие № 6. Касательные пространства.
Занятие № 7. Гладкие отображения многообразий.
Занятие № 8. Дифференциальные формы на многообразиях.
Занятие № 9. Касательное расслоение.
Занятие № 10. Связность.
Занятие № 11. Интегрирование по многообразию.
Занятие № 12. Формула Стокса.
Занятие № 13. Частные случаи общей формулы Стокса.
Занятие № 14. Меры множеств.
Занятие № 15. Измеримые функции и их свойства.
Занятие № 16. Интеграл Лебега.
Занятие № 17. Изучение понятия площади и объема (школьный курс математики, курс высшей математики).
Занятие № 18. Различные подходы к введению понятия интеграла Римана.
Занятие № 19. Множества, не измеримые по Жордану, понятие о дробной размерности.
Занятие № 20. Различные подходы к введению понятий меры и интеграла Лебега.

Содержание практических занятий приведено в разделе 3.

6. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Быкова, О.Н. Теория функций действительного переменного : Учебное пособие. – Москва ; Москва : ООО "КУРС" : ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2016. – 196 с. URL: http://znanium.com/go.php?id=543159
2. Звонкин, А. К. Графы на поверхностях и их приложения / А.К. Звонкин; С.К. Ландо. – Москва : МЦНМО, 2010. – 480 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63250
3. Примаков, Д. А. Геометрия и топология. – Москва : Московская финансово-промышленная академия (МФПА), 2011. – 272 с. URL: http://znanium.com/go.php?id=451172

Дополнительная литература

1. Асташова, И. В. Геометрия и топология : учебно-методический комплекс / И.В. Асташова; В.А. Никишкин. – Москва : Евразийский открытый институт, 2011. – 258 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90953
2. Матвеев С.В. Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий / С.В. Матвеев. – Москва : МЦНМО, 2007. – 454 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63262
3. Арнольд, В. И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд; А.Н. Варченко; С.М. Гусейн-Заде. – Москва : МЦНМО, 2009. – 672 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62956
4. Прасолов, В. В. Элементы теории гомологий / В.В. Прасолов. – Москва : МЦНМО, 2006. – 449 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63246

Интернет-ресурсы

- Мир математических уравнений. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm
- Softline. http://exponenta.ru/
- Сайт Московского центра непрерывного математического образования. https://www.mccme.ru
- Математические этюды. http://www.etudes.ru
- Математическая составляющая. http://book.etudes.ru
- Общероссийский математический портал. http://www.mathnet.ru
- Единое окно доступа к образовательным ресурсам. http://window.edu.ru/

Лист согласования рабочей программы
учебной дисциплины (практики)

Направление подготовки: 44.04.01 Педагогическое образование
Профиль: Методология математического образования
Рабочая программа теория многообразий и общая теория меры
Составитель: А.В. Цыганов – Ульяновск: УлГПУ, 2023.

Программа составлена с учетом федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, профиль подготовки «Методология математического образования» утверждённого Министерством образования и науки Российской Федерации, и в соответствии с учебным планом.

Составители _____ А.В. Цыганов (подпись)

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) одобрена на заседании кафедры высшей математики «23» мая 2023г., протокол № 10
Заведующий кафедрой
_____ И.В. Столярова 23.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) согласована с библиотекой
Сотрудник библиотеки
_____ Ю.Б. Марсакова 22.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Программа рассмотрена и одобрена на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования "26" мая 2023 г., протокол № 5
Председатель ученого совета факультета физико-математического и технологического образования
_____ Е.М. Громова 26.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*