Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«25» июня 2021г.

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Программа учебной дисциплины модуля
«Содержательные аспекты современного математического образования»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки
44.04.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Методология математического образования

(очная форма обучения)

Составители: Сибирёва А.Р.,
доцент кафедры высшей математики;
Фолиадова Е.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Задачи оптимизации и их математические модели» относится к дисциплинам модуля «Содержательные аспекты современного математического образования» Блока 1. Дисциплины (модули), части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы магистратуры по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Методология математического образования», очной формы обучения. Дисциплина является дисциплиной по выбору, альтернатива: «Вариационные методы и модели» или «Теория принятия решений»

Место дисциплины в структуре ООП и особенности содержания дисциплины определяются ее взаимодействием с иными дисциплинами блока 1. Основное внимание уделяется взаимосвязям различных математических дисциплин, изучающих кривые, поверхности, их многомерные и бесконечномерные обобщения. При этом изучение предлагается проводить на базе методов классического математического анализа, дифференциальной геометрии, функционального анализа и в некоторой степени общей топологии, алгебраической топологии, математической физики, что соответствует профилю аспирантуры при кафедре высшей математики. Содержательные линии дисциплины продолжают некоторые линии дисциплин бакалавариата «Алгебра», «Математический анализ», спецкурса «Элементы теории динамических систем и теории оптимизации» и др., «Линейные операторы и их приложения». В рамках данной дисциплины по выбору предполагается систематизация знаний, полученных магистрантами при изучении программ бакалавриата, прочное усвоение базовых идей дифференциального исчисления (вообще говоря, в банаховых пространствах), в частности, применительно к задачам классического вариационного исчисления.

Изучение соответствующих разделов может быть продолжено на более глубоком уровне в рамках дисциплин по выбору «Теория принятия решений», «Элементы математической экономики» и др.

Результаты освоения дисциплины являются основой для научно-исследовательской работы магистрантов.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Актуальность включения данного курса в ООП определяется важным местом экстремальных задач, в том числе бесконечномерных, в математическом естествознании, математической экономике и других приложениях математики, идейным богатством соответствующих разделов анализа, их существенной ролью для формирования «математического мировоззрения» магистранта.

Цели дисциплины. Целями освоения дисциплины «Задачи оптимизации и их математические модели» являются:

- систематизация и углубление представлений магистрантов о специфике математического знания, месте и роли математики в познании мира, о единстве математики в ее многообразии;
- продолжение формирования представлений о процессе математического исследования, его важнейших чертах, особенностях постановки проблемы и представления результатов;
- формирование понятийного аппарата в области теории экстремальных задач, классического вариационного исчисления и основ теории оптимального управления, необходимого при проведении самостоятельных исследований;
- формирование умения работать с математическими объектами высокого уровня абстракции, развитие соответствующего типа мышления.

В соответствии с этим при преподавании дисциплины ставятся следующие **задачи**:

- рассмотрение конкретных экстремальных задач, как конечномерных, так и бесконечномерных, с точки зрения общей теории;

- систематизация и углубление знаний по теории дифференцирования в многомерных пространствах;
- освоение языка современной теории операторов, применяемого в областях, близких к научному направлению кафедры высшей математики;
- формирование умений, связанных с чтением учебной математической литературы достаточно высокого уровня сложности;
- формирование представлений о связи между различными разделами математики, умений, связанных с переводом задачи с одного математического языка на другой;
- формирование приемов мыслительной деятельности, связанных с обобщением (абстрагированием) и конкретизацией математических понятий, продолжение освоения языка абстрактной алгебры и соответствующего стиля рассуждений.

В результате освоения программы магистрант должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

В результате освоения дисциплины «Задачи оптимизации и их математические модели» обучающийся должен:

знать

- современные подходы к построению теории экстремальных задач различного происхождения и структуры;
- основную терминологию математического анализа, вариационного исчисления, функционального анализа, теории оптимального управления, функционального анализа в областях, связанных с теорией экстремальных задач;
- конкретные примеры классических экстремальных задач и методы их решения;
- способы сведения операторных уравнений к решению вариационной задачи;

уметь

- строить модели задач оптимизации в изученных и близких к ним случаях;
- применять непрямые алгоритмы решения экстремальных задач, применять методы дифференциального исчисления к решению прикладных задач;
- использовать математический эксперимент и различные методы доказательства математических утверждений для исследования задач вариационных и теории оптимального управления;
- адаптировать известные приемы решения задач теории оптимизации к образовательному процессу;

владеть

- основами терминологии и символики математического анализа, функционального анализа, вариационного исчисления, навыками постановки задачи для исследования и формулирования результатов исследования;
- способами сведения вариационной задачи к решению алгебраического или дифференциального уравнения, уравнения к вариационной задаче;
- навыками чтения математического текста, способами осмысления и критического анализа научной информации;
- навыками совершенствования и развития своего научного потенциала, самообразования в области математики и ее преподавания.

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	Умеет	владеет
УК-1. Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе			

системного подхода, вырабатывать стратегию действий. ИУК 1.3. Рассматривает различные варианты решения проблемной ситуации на основе системного подхода, оценивает их преимущества и риски. ИУК 1.4. Грамотно, логично, аргументированно формулирует собственные суждения и оценки. Предлагает стратегию действий.	ОР-1. Приемы и методы выработки стратегии действий по разрешению проблемной ситуации. ОР-2 о существовании различных вариантов решения проблемной ситуации на основе системного подхода, методах оценки преимуществ и рисков как результатов принятого решения.	ОР-3 Грамотно, логично, аргументированно формулировать собственные суждения и оценки, вырабатывать стратегию действий	
ПК-2. Способен проектировать и реализовывать учебные программы математических дисциплин (модулей) для образовательных организаций разных уровней образования. ИПК 2.1. Знает содержание основных нормативных документов, регламентирующих математическое образование на разных уровнях; структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-	ОР-4. структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-методического обеспечения современного процесса обучения математике.	ОР-5. проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.	

методического обеспечения современного процесса обучения математике. ИПК 2.2. Умеет проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.			

2.Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма итоговой аттестации
	Всего		Лекции, час	Лабораторные занятия, час	Практические занятия, час	Самостоятельная работа, час	
	Трудоемкость						
	Зачет. ед.	Часы					
2	4	144	4	-	32	81	**экзамен**
Итого:	4	144	4	-	32	81	27

3.Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.

№ п/п	Наименование разделов и тем (с разбивкой на модули)	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
1.	Предмет изучения теории оптимизации. История, методы, классификация задач теории оптимизации	2	-		2
2.	Задачи линейного программирования		-	6	10

3.	Матричные игры, их применение к решению оптимизационных задач		-	4	10
4.	Графы, их применение в решении оптимизационных задач		-	2	2
5.	Вариационное исчисление	2	-	8	25
6.	Численные методы решения вариационных задач		-	2	8
7.	Элементы оптимального управления		-	8	12
8.	Применение вариационных методов к исследованию нелинейных операторов		-	2	12
Итого		4	-	32	81

3.2.*Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины*

1. **Предмет изучения теории оптимизации. История, методы, классификация задач теории оптимизации.** Предмет изучения теории оптимизации. История возникновения и развития теории оптимизации. Классическая изопериметрическая задача, задача Дидоны, другие старинные экстремальные задачи в геометрии, вариационный принцип Ферма и принцип Гюйгенса – задача о преломлении света, зарождение вариационного исчисления – задача о брахистохроне, аэродинамическая задача Ньютона и др. Труды, Ферма, Эйлера, Лагранжа, Вейерштрасса и др. в области вариационного исчисления. Задачи линейного программирования в работах Л.В. Канторовича, М.К. Гавурина, Ф. Хичкока, Д. Данцига, Дж. Фон Неймана и др. Теория игр. Графы и экстремальные задачи. Функциональный анализ и экстремальные задачи. Задачи теории оптимального управления, труды Понтрягина. Нелинейный анализ и экстремальные задачи.
   Формализация экстремальных задач (основные определения, примеры). Классификация задач оптимизации, классификация методов оптимизации.

Интерактивные формы: Дискуссия о проблемах становления теории оптимизации.

2. **Задачи линейного программирования.** Общая задача линейного программирования (ЗЛП). Математические модели задач линейного программирования. Формы записи задач линейного программирования: общая, каноническая и стандартная. Графический метод решения задачи линейного программирования. Симплекс- метод решения задач линейного программирования. Метод Жордана – Гаусса - метод решения систем линейных уравнений. Симплексные таблицы. Нахождение начального опорного решения. Критерий оптимальности. Невырожденные ЗЛП, алгоритм их решения. Альтернативный оптимум, алгоритм нахождения всех оптимальных решений. Вырожденные ЗЛП, алгоритм их решения. Двойственные задачи. Постановка двойственной задачи. Основное неравенство двойственности. Критерий Канторовича. Теоремы двойственности. Двойственный симплекс-метод. Транспортная задача. Экономическая постановка и математическая модель транспортной задачи. Методы нахождения начального плана перевозок. Метод потенциалов решения транспортной задачи. Открытая модель транспортной задачи.

Интерактивные формы: Кейс-задача по составлению плана производства изделий из заданного количества сырья, который обеспечит максимальную стоимость готовой продукции. Работа в микрогруппах.
Кейс-задача об оптимизации грузопотоков древесины. Работа в микрогруппах.

3. **Матричные игры, их применение к решению оптимизационных задач.** Матричные игры, их применение к решению оптимизационных задач. Основные понятия теории матричных игр. Решение матричных игр в чистых стратегиях. Решение матричной игры в смешанных стратегиях. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования. Статистические игры.

Интерактивные формы: Кейс-задача с применением методов теории игр к разработке плана продажи товаров с учетом меняющейся конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Работа в микрогруппах.

4. **Графы, их применение в решении оптимизационных задач**. Графы, их применение в решении оптимизационных задач. Сетевое планирование. Понятие о сетевом графике, критическом пути и других параметрах сетевого графика. Минимизация продолжительности проекта за счет увеличения затрат. Минимизация стоимости проекта при заданной продолжительности

Интерактивные формы: Деловая игра «Сетевое планирование проекта».

5. **Вариационное исчисление.** Функциональные пространства. Операторы, функционалы, примеры. Дифференцируемые операторы и функционалы в банаховых пространствах: сильная (по Фреше) и слабая (по Гато) дифференцируемость. Производная Фреше и производная Гато. Соотношение между различными видами дифференцируемости. Дважды дифференцируемые функционалы и операторы. Формула Тейлора для дважды дифференцируемых операторов.
   Понятие локального экстремума функционала. Слабый и сильный экстремум. Теорема Ферма для функционалов. Достаточные условия экстремума функционала.
   Существование наибольшего (наименьшего) значения функционала на компакте. Наибольшие и наименьшие значения линейного функционала.
   Выпуклые функционалы и монотонные операторы. Достаточные условия минимума выпуклого функционала. Наибольшие и наименьшие значения выпуклого функционала.
   Функционалы классического вариационного исчисления и их дифференцируемость; вариация функционала. Основная лемма классического вариационного исчисления. Уравнение Эйлера как необходимое условие экстремума функционала. Экстремали в задаче с закрепленными концами. *Некоторые обобщения простейшей задачи вариационного исчисления.
   Некоторые формы достаточных условий экстремума в задачах классического вариационного исчисления. Поле экстремалей. Уравнение Якоби. Функции Вейерштрасса. Условия Лежандра. Достаточные условия слабого и сильного экстремума.
   Условные экстремумы функционала. Необходимое условие условного экстремума. Функционал Лагранжа. Изопериметрические задачи.
   Примеры классических задач вариационного исчисления (задача о кратчайшей линии, задача о брахистохроне, классическая изопериметрическая задача).

Интерактивные формы: Мозговой штурм «Необходимое условие экстремума функционала; достаточные условия экстремума функционала». Работа в микрогруппах (решение задач классического вариационного исчисления).

6. **Численные методы решения вариационных задач. М**етоды Эйлера, Ритца, Галеркина. Примеры применения численных методов к решению классических задач, например, к решению задачи о колебаниях струны.

Интерактивная форма: Доклады «Методы Эйлера, Ритца, Галеркина». Дискуссия – обсуждение докладов. Решение задач.

7. **Элементы оптимального управления.** Задача Лагранжа и оптимальное управление – постановка задачи. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа. Условия стационарности. Постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.

Избранные задачи оптимального управления: задача о быстродействии, аэродинамическая задача Ньютона.

Интерактивная форма: работа в микрогруппах (решение задач оптимального управления). Доклады «Задача о быстродействии», «Аэродинамическая задача Ньютона».

8. ***Применение вариационных методов к исследованию нелинейных операторов.** Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Потенциальные операторы, условия потенциальности в интегральной и дифференциальной формах. Экстремумы функционалов и операторные уравнения. Монотонные операторы и выпуклые функционалы. Теоремы существования критических точек. Минимизирующие последовательности и методы их построения. Условный экстремум. Точки бифуркации. Применение методов вариационного исчисления к исследованию собственных чисел и собственных векторов нелинейных операторов.

Интерактивная форма: работа в микрогруппах (построение уравнения разветвления, одномерный случай).

4.Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Общий объем самостоятельной работы магистрантов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную (81ч.) самостоятельную работу в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется преимущественно в малых группах, с использованием технологий взаимообучения. Дидактические материалы для организации работы разрабатываются самими магистрантами в ходе внеаудиторной самостоятельной работы (обмен заданиями между малыми группами).

Внеаудиторная самостоятельная работа нацелена на диагностику и совершенствование умений магистрантов осваивать теоретические и прикладные разделы математики. Эта деятельность включает также разработку консультационных материалов по отдельным темам, решение задач, в том числе исследовательского характера. Соответствующие источники указаны в разделе 6, выбор осуществляет преподаватель.

Перечень рассматриваемых ресурсов пополняют в ходе освоения дисциплины сами магистранты, т.е. комплект дидактических материалов окончательно формируется уже в ходе реализации программы (что соответствует системно-деятельностному подходу к организации образования).

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся

ОС-1 Кейс-задача

Составить оптимальный план производства изделий двух видов А и В, обеспечивающий максимальную стоимость их реализации, если на изготовление единицы изделия А требуется затратить a_1=2 кг сырья первого типа, a_2=3 кг сырья второго типа и a_3=1 кг сырья третьего типа. Для единицы изделия В требуется b_1=1 кг сырья первого типа, b_2=4 кг сырья второго типа и b_3=3 кг сырья третьего типа. Производство обеспечено сырьем каждого типа в количестве 400 кг, 900 кг, 600 кг соответственно. Стоимость единицы изделия А составляет 60 руб., а единицы изделия В- 40 руб. Решить задачу симплекс-методом.

Критерии оценки:

Умение формально записать математическую модель – 3 балла; знание теоретических основ – симплекс-метода – 3 балла; умение реализовать на практике алгоритм симплекс-метода – 3 балла; проведение вычислений, заполнение симлекс-таблиц – 3 балла, анализ результатов, выводы – 1 балл. Итого: 13 баллов.

ОС-2 Кейс-задача

Методом наименьших потенциалов найти оптимальный план перевозок, при котором суммарная стоимость всех перевозок – наименьшая, если груз находится у трех поставщиков в количествах 12 , 8 и 10 единиц, который необходимо доставить потребителям в количествах 6, 9 , 15 единиц, причем стоимость транспортировки единицы продукции от i-го поставщика в пункт потребления j задана матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Критерии оценки:

Умение формально записать математическую модель – 3 балла; знание теоретических основ метода наименьших потенциалов – 3 балла; умение реализовать на практике соответствующий алгоритм – 3 балла; проведение вычислений, заполнение таблиц – 3 балла, анализ результатов, выводы – 1 балл. Итого: 13 баллов.

ОС-3 **Кейс-задача**

1. Найти цену игры, заданной платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2.Найти седловую точку матрицы $H = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}$

3. Решить матричную игру, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти смешанные стратегии, выбрать оптимальную.

4. Свести матричную игру к задаче линейного программирования. Симплекс-методом найти решение игры, определяемой платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Статистические игры. Известна платежная матрица статистической игры: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Составить матрицу рисков.

6. Найти оптимальное решение статистической игры, заданной платежной матрицей $\begin{pmatrix} -12 & 8 & 14 \\ 19 & -11 & -10 \\ 17 & -9 & 13 \end{pmatrix}$, применяя критерий Байеса, считая, что вероятности состояний природы известны и равновероятны.

Критерии оценки:

Умение формально записать математическую модель – 3 балла; знание теоретических основ – 3 балла; умение реализовать на практике соответствующие алгоритмы – 3 балла; проведение вычислений по алгоритму – 3 балла, анализ результатов, выводы – 1 балл. Итого: 13 баллов.

ОС-4 Кейс-задача

Оптимизация проекта по времени при ограничении на стоимость работ.

1. Условия проекта заданы в следующей таблице:

Операция	Нормальный режим		Максимальный режим	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. руб.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. руб.
0,1	30	20	25	30
1,2	60	40	45	60
1,3	50	30	40	4
1,4	30	70	20	100
2,4	90	60	70	70
3,4	80	25	65	35
4,5	20	20	17	25
Итого	360	265	282	360

Построить сетевой граф, найти минимально возможный критический путь и стоимость работ до сжатия.

2. Исследовать график «затраты – продолжительность», оценить максимально интенсивный режим участков.
3. Выбрать участки критических путей с наименьшим наклоном кривой «затраты – продолжительность». Произвести сжатие, вводя максимальный интенсивный режим работы на некоторых участках.
4. Оценить стоимость работ после сжатия, сравнить время и стоимость работ до и после сжатия.

Критерии оценки:

Умение формально записать математическую модель – 3 балла; знание теоретических основ – 3 балла; умение реализовать на практике соответствующие алгоритмы – 3 балла; проведение вычислений по алгоритму – 3 балла, анализ результатов, выводы – 1 балл. Итого: 13 баллов.

ОС-5 Кейс-задача

Оптимизация стоимости проекта при заданной продолжительности. Выполнение всякой работы связано с затратами. В ряде случаев ускоренное выполнение работы связано с увеличением затрат (авралы, срочные поставки и т.п.) и затраты являются функцией от времени выполнения, которую выберем в виде: $C_{ij}=-A_{ij}\,T_{ij}+B_{ij}$.

Обозначим через D_{ij} минимальное необходимое время выполнения работы i - j, а через T_j - момент наступления j - го события, то продолжительность работы i - j равна T_j - T_i и возникает задача: минимизировать функцию

$$Z = \sum_{(ij)} [\,-A_{ij}(T_j - T_i\,) + B_{ij}]$$

при условиях $T_j - T_i$ □ D_{ij} при всех (i j); $T_0 = 0$, $T_{вых} = T$.

Пусть для рассмотренного выше сетевого графика заданы параметры стоимости и продолжительности работ:

Работа	Продол жител.	Работа	Продол жител.
0-1	2	2-4	7
0-2	1	3-4	6
0-3	5	3-5	2
1-3	2	4-7	4
1-5	6	5-6	2
1-6	5	5-7	7
2-3	2	6-7	4

$i-j$	A_{ij}	B_{ij}	D_{ij}	$i-j$	A_{ij}	B_{ij}	D_{ij}	$i-j$	A_{ij}	B_{ij}	D_{ij}
0-1	10	100	2	2-4	4	140	7	5-6	5	50	2
0-2	3	40	1	3-4	2	90	6	4-7	9	180	4
0-3	5	150	5	1-5	1	80	6	5-7	5	140	7
1-3	2	70	2	3-5	5	120	2	6-7	9	200	4
2-3	6	170	2	1-6	2	60	5				

и предельное время T = 25. Произвести поиск оптимального по стоимости безрезервного плана, т.е. плана, в котором стоимость снижается удлинением выполнения работ до предельного допустимого времени.

1. Создать математическую модель для задачи оптимизации с ограничениями.
2. Записать двойственную задачу.
3. Произвести математическую обработку данных проекта. Составить таблицу для обработки симплекс-методом.
4. Симплекс-метод в применении к решению задачи об оптимизации стоимости проекта при заданной продолжительности.
5. Анализ результатов.

Критерии оценки:

Умение формально записать математическую модель – 3 балла; знание теоретических основ – 3 балла; умение реализовать на практике соответствующие алгоритмы – 3 балла; проведение вычислений по алгоритму – 3 балла, анализ результатов, выводы – 1 балл. Итого: 13 баллов.

ОС-6 Комплект заданий для контрольной работы

Структура контрольной работы № 1

1. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом (10 баллов).
2. Решить транспортную задачу, используя метод потенциалов (10 баллов).
3. Найти оптимальное решение и цену игры, заданной платежной матрицей. Найти смешанные оптимальные стратегии и цену игры, заданной платежной матрицей (10 баллов).
4. Произвести оптимизацию проекта по времени при ограничении на стоимость работ. Построить сетевой граф, найти критический путь и стоимость работ до и после сжатия (10 баллов).

Вариант 1.

1. (10 баллов) Найти наибольшее значение целевой функции f. Решить задачу линейного программирования симплексным методом.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, (j = 1,2,3,4,5) \end{cases}$$

$$f = 5x_1 + 4x_2 - x_4$$

2. (10 баллов) В резерве железнодорожных станций находятся a_i соответственно вагонов. Составьте оптимальный план перегона этих вагонов к пунктам погрузки пиломатериалов, если пункту B_j требуется b_j вагонов, причем транспортные расходы должны быть наименьшими. Стоимость перегона одного вагона со станций A_i в пункты B_j заданы матрицей C.

$$a_1 = 50 \qquad b_1 = 40$$
$$a_2 = 80 \qquad b_2 = 60$$
$$a_3 = 45 \qquad b_3 = 80$$

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 9 \\ 8 & 6 & 12 \\ 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

3. (10 баллов) Найти смешанные оптимальные стратегии и цену игры, заданной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (10 баллов) Оптимизация проекта по времени при ограничении на стоимость работ. Условия проекта заданы в следующей таблице:

Операция	Нормальный режим		Максимальный режим	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. руб.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. руб.
0,1	30	20	25	30
1,2	60	40	45	60
1,3	50	30	40	4
1,4	30	70	20	100
2,4	90	60	70	70
3,4	80	25	65	35
4,5	20	20	17	25
Итого	360	265	282	360

Построить сетевой граф, найти критический путь и стоимость работ до сжатия. Произвести оптимизацию по времени. Оценить стоимость работ после сжатия.

Вариант 2.

1. (10 баллов) Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов. На изготовление единицы изделия А требуется затратить сырья каждого вида a1, a2, a3 кг соответственно, а для единицы изделия В – b1, b2, b3 кг соответственно. Производство обеспечено сырьем каждого вида в количестве p1, p2, p3 кг соответственно. Стоимость единицы изделия А составляет α рублей, а единицы изделия В – β рублей. Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную стоимость готовой продукции. Решите задачу симплекс-методом.

$$a_1 = 2, b_1 = 5, p_1 = 432$$

$$a_2 = 3, b_2 = 4, p_2 = 424$$

$$a_3 = 5, b_3 = 3, p_3 = 582$$

$$\alpha = 34 \quad \beta = 50$$

2. (10 баллов) Для строительства нескольких лесовозных дорог используется гравий из трех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны a_i... Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны b_j. Найти оптимальный план перевозок гравия, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными. Стоимость перевозки одной единицы гравия с i-го карьера к j-ой дороге задана матрицей С.

$$a_1 = 75 \qquad b_1 = 20 \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$
$$a_2 = 40 \qquad b_2 = 45$$
$$a_3 = 35 \qquad b_3 = 30$$

3. (10 баллов) Найти оптимальное решение и цену игры, заданной платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. (10 баллов) Оптимизация проекта по времени при ограничении на стоимость работ. Условия проекта заданы в следующей таблице:

Операция	Нормальный режим		Максимальный режим	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. руб.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. руб.
0,1	10	30	5	40
1,2	30	50	20	70
1,3	50	30	40	4
1,4	30	70	20	100
2,4	40	60	30	70
3,4	70	25	40	35
4,5	20	20	15	25
Итого	360	265	282	360

Построить сетевой граф, найти критический путь и стоимость работ до сжатия. Произвести оптимизацию по времени. Оценить стоимость работ после сжатия.

Критерии оценки:

Каждая задача оценена в 10 баллов.

- от 1 до 3 баллов за задачу выставляется, если студент верно записал математическую модель задачи;
- от 4 до 5 баллов выставляется, если студент верно записал математическую модель задачи и показал знание алгоритмов решения задачи;
- от 6 до 7 баллов выставляется, если студент продемонстрировал знание теоретических основ и алгоритмов решения задачи, применил их, но допущены ошибки в вычислениях;
- от 8 до 10 баллов за задачу выставляется, если студент продемонстрировал знание теоретических основ и алгоритмов решения задачи, применил их, получил верный результат.

Итого: 40 баллов.

ОС-7 Комплект заданий для контрольной работы №2

Исследовать на экстремум функционалы:

$$v[y(x)] = \int_0^2 (xy' + y'^2)\,dx; \quad y(0) = 1; \quad y(2) = 0.$$

$$v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\,dx; \quad a > 0; \quad y(0) = 0; \quad y(a) = 0.$$

$$v[y(x)] = \int_1^2 y'(1 + x^2y')\,dx; \quad y(1) = 3; \quad y(2) = 5.$$

$$v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2y')\,dx; \quad y(-1) = y(2) = 1.$$

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2 - y'^2 + 8y)\,dx; \quad y(0) = -1; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$v[y(x)] = \int_1^2 (x^2y'^2 + 12y^2)\,dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 8.$$

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x})\,dx; \quad y(0) = \frac{1}{3}; \quad y(1) = \frac{1}{3}e^2.$$

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2 + 6y\sin 2x)\,dx; \quad y(0) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$v[y(x)] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}\,dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 4.$$

$$v[y(x)] = \int_1^3 (12xy + y'^2)\,dx; \quad y(1) = 0; \quad y(3) = 26.$$

Критерии оценки:

Студенту для самостоятельной работы выдаются 2 задачи из предлагаемого набора. Каждая задача оценена в 20 баллов.

- от 1 до 5 баллов за задачу выставляется, если студент записал необходимые условия экстремума;
- от 6 до 9 баллов выставляется, если студент записал необходимые условия экстремума и показал знание алгоритмов решения задачи;
- от 10 до 16 баллов выставляется, если студент продемонстрировал знание теоретических основ и алгоритмов решения задачи, применил их, применены достаточные условия экстремума, но допущены ошибки в вычислениях;
- от 16 до 20 баллов за задачу выставляется, если студент продемонстрировал знание теоретических основ и алгоритмов решения задачи, применил их, получил верный результат.

Итого: 40 баллов.

ОС-8 Темы рефератов, докладов, сообщений

1. Задачи линейного программирования во внеклассной работе со школьниками.
2. Задачи сетевого планирования – школьникам.
3. Взаимосвязь задач вариационного исчисления и экстремальных задач школьного курса.
4. Изопериметрическая задача – школьникам.
5. Графы, их применение в решении оптимизационных задач. Сетевое планирование. Понятие о сетевом графике, критическом пути и других параметрах сетевого графика.
6. Минимизация продолжительности проекта за счет увеличения затрат.
7. Минимизация стоимости проекта при заданной продолжительности.
8. Задачи вариационного исчисления с подвижной границей.
9. Задачи классического вариационного исчисления для функционалов, зависящих от нескольких функций.
10. Задачи классического вариационного исчисления для функционалов, зависящих от производных высших порядков.
11. Задачи классического вариационного исчисления для функционалов, зависящих от частных производных.
12. Задачи классического вариационного исчисления с угловыми точками.
13. Задача о брахистохроне.
14. Задача геометрической оптики.
15. Задача о наименьшей поверхности вращения.
16. Вывод уравнения свободных колебаний струны на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона.
17. Вывод дифференциальных уравнений движения системы материальных точек под воздействием некоторых сил на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона.
18. Метод Эйлера.
19. Метод Ритца.
20. Метод Галеркина.
21. Применение метода Галеркина к решению уравнения свободных колебаний струны.
22. Элементы выпуклого анализа.
23. Аэродинамическая задача Ньютона как задача оптимального управления.
24. Задача о быстродействии как задача оптимального управления.

Критерии оценки:

Умение описать прикладную проблему, требующую создания математической модели – 2 балла; умение формально записать математическую модель – 2 балла; умение описать метод

работы с данной моделью – 3 балла; математическая грамотность и умение работать с теоретическим материалом –3 балла; наглядность и раскрытие темы – 3 балла. Итого: 13 баллов.

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика процедуры оценивания компетенций	Представление оценочного средства в фонде
1.	Контрольная работа	Контрольная работа выполняется в письменной форме. Регламент – 2ч.	Образцы контрольных работ
2.	Доклад, устное сообщение (мини-выступление)	Доклад - продукт самостоятельной работы обучающегося, представляющий собой публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной учебно-исследовательской или научной темы. Тематика докладов выдается на первых семинарских занятиях, выбор темы осуществляется студентом самостоятельно. Подготовка осуществляется во внеаудиторное время. На подготовку дается одна-две недели. За неделю до выступления студент должен согласовать с преподавателем план выступления. Регламент – 3-5 мин. на выступление. В оценивании результатов наравне с преподавателем принимают участие студенты группы.	Темы докладов
4.	Защита реферата	Реферат соответствует теме, выдержана структура реферата, изучено 85-100 % источников, выводы четко сформулированы	Темы рефератов
5.	Экзамен в форме устного собеседования по вопросам, решение задач	Проводится в заданный срок, согласно графику учебного процесса. При выставлении оценки учитывается уровень приобретенных компетенций студента. Компонент «знать» оценивается теоретическими вопросами по содержанию дисциплины, компоненты «уметь» и «владеть» - с помощью задач.	Комплект примерных вопросов к экзамену.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Сибирева А.Р.Вариационные проблемы и методы: методические указания. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. –32 с.
2. Сибирева А.Р. Задачи оптимизации и их математические модели: методические указания.– Ульяновск: УлГПУ, 2017. –32 с.
3. Сибирева А.Р. Математические методы в проектной деятельности: методические указания. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. –30 с.

5.Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Цель проведения аттестации – диагностика сформированности запланированных образовательных результатов. Для проверки освоения программы дисциплины «Линейные операторы и их приложения» используются технологии формирующего оценивания (текущая аттестация) и суммативного оценивания (промежуточная аттестация в форме экзамена, завершающая изучение дисциплины). Оценочными средствами текущего оценивания являются: выступление с мини-докладом, участие в работе микрогруппы, в коллективном исследовании. Контроль формирования компетенций ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Кейс-задача. ОС-2 Кейс-задача. ОС-3 Кейс-задача. ОС-4 Кейс-задача. ОС-5 Кейс-задача. ОС-6 Контрольная работа № 1. ОС-7 Контрольная работа № 2. ОС-8 Доклады.	ОР-1. Знает приемы и методы выработки стратегии действий по разрешению проблемной ситуации. ОР-2 Знает о существовании различных вариантов решения проблемной ситуации на основе системного подхода, методах оценки преимуществ и рисков как результатов принятого решения. ОР-3 умеет грамотно, логично, аргументированно формулировать собственные суждения и оценки, вырабатывать стратегию действий. ОР-4. знает структуру учебных и рабочих программ и требования к их проектированию и реализации; виды учебно-методического обеспечения современного процесса обучения математике. ОР-5 умеет проектировать учебные и рабочие программы математических дисциплин, в т.ч. элективных, программы внеурочной деятельности.
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-9 Экзамен в форме устного собеседования	

Промежуточная аттестация (экзамен) проводится в форме участия в учебной конференции (публичная презентация самостоятельно разработанного дидактического материала по одному из вопросов математической экономики (выбор темы осуществляется магистрантами по согласованию с преподавателем).

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-9 Примерные вопросы к экзамену

1. Предмет изучения теории оптимизации. История возникновения и развития теории оптимизации.
2. Формализация экстремальных задач (основные определения, примеры).

3. Классификация задач оптимизации, классификация методов оптимизации.
4. Общая задача линейного программирования (ЗЛП). Математические модели задач линейного программирования. Формы записи задач линейного программирования: общая, каноническая и стандартная.
5. Графический метод решения задачи линейного программирования.
6. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Метод Жордана – Гаусса - метод решения систем линейных уравнений. Симплексные таблицы. Нахождение начального опорного решения. Критерий оптимальности. Невырожденные ЗЛП, алгоритм их решения. Альтернативный оптимум, алгоритм нахождения всех оптимальных решений.
7. Двойственные задачи. Постановка двойственной задачи. Основное неравенство двойственности. Критерий Канторовича. Теоремы двойственности. Двойственный симплекс-метод.
8. Транспортная задача. Экономическая постановка и математическая модель транспортной задачи. Методы нахождения начального плана перевозок.
9. Метод потенциалов решения транспортной задачи. Открытая модель транспортной задачи.
10. Матричные игры, их применение к решению оптимизационных задач. Основные понятия теории матричных игр.
11. Решение матричных игр в чистых стратегиях. Решение матричной игры в смешанных стратегиях.
12. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования. Статистические игры.
13. Графы, их применение в решении оптимизационных задач. Сетевое планирование. Понятие о сетевом графике, критическом пути и других параметрах сетевого графика.
14. Минимизация продолжительности проекта за счет увеличения затрат.
15. Минимизация стоимости проекта при заданной продолжительности
16. Функциональные пространства. Операторы, функционалы, примеры.
17. Понятие локального экстремума функционала. Слабый и сильный экстремум. Теорема Ферма для функционалов.
18. Функционалы классического вариационного исчисления и их дифференцируемость; вариация функционала. Основная лемма классического вариационного исчисления.
19. Уравнение Эйлера как необходимое условие экстремума функционала. Экстремали в задаче с закрепленными концами.
20. Условные экстремумы функционала. Необходимое условие условного экстремума. Функционал Лагранжа. Изопериметрические задачи.
21. Примеры классических задач вариационного исчисления (задача о наименьшей поверхности вращения).
22. Примеры классических задач вариационного исчисления (задача о брахистохроне).

Критерии оценивания знаний студентов на экзамене

№ п/п	**Вид деятельности**	**Максимальное количество баллов**	
Теоретическая часть экзаменационного билета		Вопрос 1	Вопрос 2
1.	Формулировка необходимых определений, утверждений, свойств	6	6
2.	Доказательства основных утверждений	10	10
3.	Примеры, иллюстрирующие основные положения теории	4	4
4.	Ответы на уточняющие или дополнительные вопросы	4	4
Всего		24	24
Практическая часть экзаменационного билета		Задача 1	Задача 2

5.	Демонстрация понимания условия задачи, владения терминологией, использованной в задаче	4	4
6.	Демонстрация знания подходов к решению задачи, владения соответствующей теорией	6	6
7.	Реализация плана решения задачи с полными пояснениями	14	14
Всего		24	24

7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенции.

Краткая характеристика процедуры реализации текущего и промежуточного контроля для оценки компетенций обучающихся представлена в таблице.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и лабораторных занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ МАГИСТРАНТА

№ п/п	Вид деятельности	Максимальное количество баллов
1.	Посещение лекционных занятий	2
2.	Посещение практических занятий	32
3.	Работа на занятиях:	208
4.	Контрольная работа	40×2
6.	Экзамен	96
Итого:	4 зачетные единицы	400

Формирование балльно-рейтинговой оценки

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
2 семестр	Разбалловка по видам работ	1 х 2=2 балла	16х 1= 16 баллов	286 баллов	96 баллов
	Суммарный макс. балл	2 балла Max	16 баллов max	304 балла max	400 баллов max

Итоговое количество баллов	Итоговая отметка
0-200	неудовлетворительно
201-280	удовлетворительно
281-360	хорошо
361-400	отлично

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические рекомендации преподавателю

В рамках курса подготовки магистров «Задачи оптимизации и их математические модели» предполагается обобщающее изучение разделов математического анализа (в широком смысле) и его приложений, связанных с решением экстремальных задач.

Вводная лекция призвана показать многообразие типов экстремальных задач и методов их решения. Л. Эйлер сказал: «В мире не происходит ничего, где не виден был бы смысл какого-нибудь минимума или максимума». Содержание курса призвано продемонстрировать это богатство. Рассматриваются задачи линейного программирования, теории игр и теории графов, проводится связь с изученными темами курса алгебры, подчеркивается практическая значимость и практическая направленность соответствующих задач. Вариационное исчисление предлагается изучать на основе общей теоремы Ферма для функционалов в банаховом пространстве; техника классического вариационного исчисления рассматривается на обязательном уровне для простейшей задачи с закрепленными концами и для изопериметрических задач, остальные типы задач (для функционалов, зависящих от нескольких функций, от производных высших порядков, от функций с угловыми точками и др.) изучаются по желанию магистрантов и в зависимости от направления их самостоятельных исследований. Рассматриваются некоторые прямые методы решения вариационных задач, проводится связь с курсом «Численные методы». Рассматривается связь задач теории оптимального управления с задачами вариационного исчисления. Предполагается лишь первоначальное знакомство с методами исследования нелинейных объектов; причем существенно как сопоставление концепций различных математических дисциплин и выделение единых абстрактных подходов к построению соответствующих понятий, так и рассмотрение конкретных примеров применения этих концепций к частным и достаточно наглядным объектам (таким, например, как классические вариационные задачи и простейшие динамические системы). Общие вопросы, связанные со свойствами нелинейных операторов и основными теоремами дифференциального исчисления в банаховых пространствах, предлагается вынести в большой степени на самостоятельное изучение.

Основное время, отведенное на аудиторные занятия, предлагается посвятить формированию у будущих магистров умений, связанных с математическими исследованиями (в частности, с «переводом» проблем с одного математического языка на другой), в естественной связи с актуализацией и расширением понятийного аппарата, необходимого для их проведения. На занятиях по дисциплине «Задачи оптимизации и их математические модели» демонстрируются фрагменты методики, направленной на формирование культуры осмысленного учения и начальных исследовательских навыков в области математики.

Обсуждение вопросов на аудиторных (практических/ семинарских) занятиях не должно сводиться к общим формулировкам, предлагается тесно связывать абстрактные построения с решением конкретных задач. Среди этих задач должны быть, в частности, доступные (по постановке проблемы, а иногда – и по методам решения) школьникам, достаточное внимание должно быть уделено их связям с общей логической линией курса. Предлагается привлекать внимание к соотношению внешней мотивации и внутренней логики развития математических объектов, к положительным и отрицательным сторонам многоступенчатого абстрагирования, к методическим аспектам изучения абстрактных понятий, ср. программы предшествующих дисциплин магистратуры, в частности, дисциплины «Методология и методы научного исследования».

На лекциях предполагается изложение ключевых нетривиальных теорем курса, демонстрация их связей с приложениями в различных разделах математики. Самостоятельное изучение теоретического материала студентами предполагает чтение разнообразной математической литературы, прежде всего современных учебных пособий.

На практических занятиях по каждому разделу программы предполагается активная работа студентов с теоретическим материалом, как известным им из математических курсов бакалавриата, так и новым (соотношение этих частей может быть различным в зависимости от профиля полученного образования). Одной из задач этих занятий является освоение студентами языков математического и функционального анализа, абстрактной алгебры, геометрии, топологии и др. дисциплин, необходимых для дальнейшего обучения в

магистратуре и написания магистерской диссертации. На практических занятиях также решаются типовые задачи соответствующих разделов, в частности, вариационного исчисления, что способствует, в частности, повторению курса дифференциальных уравнений. Часть задач, поставленных на занятии, может после начального этапа совместного обсуждения быть предложена как домашнее задание, по некоторым из них целесообразно затем заслушивать краткие сообщения студентов. Как преподавателю, так и студентам во время их сообщений рекомендуется применять проблемный стиль изложения материала, ставить вопросы перед аудиторией, в том числе для последующего обдумывания, предусматривать время для ответа на вопросы слушателей. Часть занятий, в том числе по циклам задач, которые могут использоваться в работе со школьниками, предлагается провести в интерактивной форме.

Контрольные задания по дисциплине «Задачи оптимизации и их математические модели» состоит из домашней и аудиторной частей; последняя может включать задания тестового характера (проверка владения понятийным аппаратом и базовыми алгоритмами) и задания на установление истинности утверждений, формулирование результатов, контроль правильности рассуждений и пр. – т.е. мини-исследование. Формой рубежного контроля по дисциплине является экзамен.

Методические рекомендации студенту

Успешное освоение курса требует активной деятельности на практических занятиях и во внеаудиторное время, систематического выполнения домашних заданий, самостоятельной работы с математической литературой, как учебной, так и научной. Магистрант может выбрать необходимый для него уровень овладения учебным материалом дисциплины с углублением либо в вопросы классического вариационного исчисления, либо в задачи теории оптимизации и др. в зависимости от его научных интересов и тематики самостоятельной исследовательской работы. В любом случае необходимо обратить особое внимание на освоение языка абстрактной алгебры и функционального анализа, необходимого для дальнейшего продвижения. Желательно проработать глоссарий дисциплины и убедиться в четком понимании смысла содержащихся в нем терминов.

Порядок расположения тем в курсе не случаен, поскольку каждая последующая тема основана на понимании некоторых сведений из предыдущих. Аналогичная зависимость существует и в порядке изложения внутри каждой темы. Именно поэтому темы курса следует изучать строго в той последовательности, в какой они приведены в рабочей учебной программе.

При изучении каждой темы следует

– внимательно прочитать текст лекции (раздела учебника);
– разобрать приведенные примеры решения задач;
– доказать все утверждения с пометкой «доказать самостоятельно»,
– постараться воспроизвести основные определения и формулировки теорем (свойств),
– сравнить полученные результаты с лекционным материалом, в случае возникновения расхождений проанализировать их (в чём состоят ошибки, какие примеры могли бы подойти под ошибочное определение, но не подходят под настоящее, какие объекты пришлось бы исключить, если бы было принято ошибочное определение, к каким последствиям могла бы привести неправильно сформулированная теорема и т.п.);
– решить практические задания.

Изучение каждой темы завершается выполнением соответствующего задания из контрольной работы.

При рассмотрении разделов дисциплины, предусмотренных для самостоятельного изучения, а также разделов, пропущенных по уважительным причинам, вначале нужно ознакомиться с программой дисциплины по данному разделу. Руководствуясь программой, необходимо приступить к последовательному и глубокому усвоению материала, изложенного в рекомендуемой литературе. При этом следует составлять краткий конспект материала по основным положениям, вынесенным в программу.

Для проверки знаний после изучения каждой темы рекомендуется ответить на вопросы для самопроверки, имея в виду, что они не исчерпывают всего программного материала. В процессе усвоения учебного материала дисциплины выполняется индивидуальное задание.

Формой рубежного контроля по дисциплине является экзамен.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература

1. Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации: теория. Примеры. Задачи : учебное пособие / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – 3-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2011. – 408 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=67227
2. Тихомиров, В.М. Оптимальное управление [Электронный ресурс] / В.М. Тихомиров, В.М. Алексеев, С.В. Фомин. - М. : Физматлит, 2007. - 192 с. – Режим доступа: URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=67593

Дополнительная литература

1. Васильева, А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс] / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов. - М: Физматлит, 2005. - 214 с. – Режим доступа: URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68123
2. Оптимальное управление [Электронный ресурс] / под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. - М: МЦНМО, 2008. - 320 с. – Режим доступа: URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63270
3. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации. Практический курс [Электронный ресурс]: учебное пособие с мультимедиа сопровождением / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М.: Логос, 2011. – 424 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=469213

Интернет-ресурсы

1. Мир математических уравнений. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm
2. Softline. http://exponenta.ru/
3. Популярные лекции по математике. http://ilib.mccme.ru/plm
4. Школьникам, студентам, аспирантам. http://ph4s.ru/
5. Прикладная математика. http://primat.org
6. Учебно-методическая литература для студентов. http://studfiles.ru/
7. Сайт издательства «Венец» УЛГТУ. http://venec.ulstu.ru/lib/
8. МГТУ ГА. http://vm.mstuca.ru/posobia/posobia.htm
9. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. http://window.edu.ru/