УДК 51:656.7.084.1

ББК В1 + О580.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В УПРАВЛЕНИИ ВОЗДУШНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Глухов Владимир Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин Ульяновского института гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, Ульяновск, Россия, vp11111948@yandex.ru

Казаков Владимир Алексеевич, доцент, доцент кафедры управления воздушным движением и навигации Ульяновского института гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, Ульяновск, Россия, kafedra_uvd@list.ru

Синдяев Андрей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин Ульяновского института гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, Ульяновск, Россия, syndyaev@rambler.ru

Узкая Алина Сергеевна, курсант Ульяновского института гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, Ульяновск, Россия, alina662143@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с математическим моделированием времени полётов и траектории движения воздушных судов на пересекающихся маршрутах с учётом влияния ветра. Решается задача, позволяющая избежать столкновения воздушных судов.

Ключевые слова: математическая модель, воздушное судно (ВС), граф, столкновение, влияние ветра, путевая скорость, компьютерное моделирование.

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING IN AIR TRAFFIC CONTROL

Glukhov Vladimir Petrovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Natural Sciences at the

Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Air Marshal B.P. Bugaev, Ulyanovsk, Russia, vp11111948@yandex.ru

Kazakov Vladimir Alekseyevich, Associate Professor, Associate Professor of Department of Air Traffic Control and Navigation at the Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Air Marshal B.P. Bugaev, Ulyanovsk, Russia. kafedra_uvd@list.ru

Sindyaev Andrey Vasilievich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Natural Sciences at the Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Air Marshal B.P. Bugaev, Ulyanovsk, Russia, syndyaev@rambler.ru.

Uzkaya Alina Sergeyevna, a cadet of the Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Air Marshal B.P. Bugaev, Ulyanovsk, Russia, alina662143@mail.ru.

Abstract. The questions connected with mathematical modeling of time of flights and trajectory of movement of aircrafts on crossing routes taking into account influence of a wind are considered in this article. The problem of avoiding a collision of aircraft collision is being solved.

Keywords: mathematical model, aircraft, graph, collision, wind influence, ground speed, computer modeling.

Математическое моделирование играет очень важную роль в различных процессах, связанных с решением разнообразных проблем науки, производства, образования, а так же других сфер деятельности (см, например, [1]). В настоящее время трудно представить управление воздушным движением и навигацию летательных аппаратов без математического и компьютерного моделирования. Как было показано в статьях [2,3,4] применение графов позволяет смоделировать траекторию движения самолётов и с учётом времени полёта воздушных судов (ВС) позволяет избежать опасного сближения и столкновения при скорости ветра равной нулю. Но что произойдёт, если учесть влияние ветра на время движения ВС? Данная статья посвящена

математическому и компьютерному моделированию влияния ветра на столкновение ВС.

Используя математическую и компьютерную модели, рассмотренные в статьях [2,3,4] рассмотрим влияние ветра на столкновение ВС. Применяя навигационный треугольник скоростей и путевую скорость, решим уравнение, связанное со временем столкновения двух ВС. Всё полёты ВС будем рассматривать на одном эшелоне.

Пусть два ВС вылетают из определённых населённых пунктов, как показано на рис.1. с определённым временным интервалом. Первое ВС идёт по маршруту M_1 [1,2,3,5], а второе по маршруту M_2 [5,4,2,1]. При определённых временных параметрах они могут столкнуться в точке А, как было показано в статьях [2,3,4]. Чтобы этого избежать, необходимо выдерживать определённый временной интервал. Движение воздушных масс (ветер) оказывает существенное влияние на полёт ВС и может изменить временные параметры полёта.

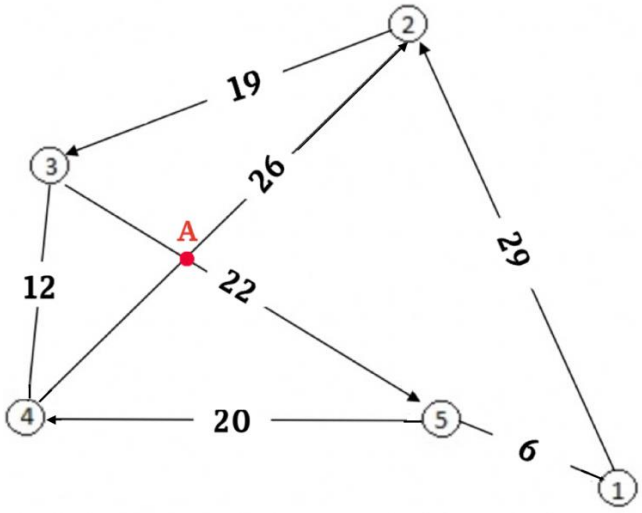

Рис.1. Граф полетов двух ВС

Обозначим скорость ВС, с которой оно двигается относительно воздушной массы V. Эта скорость будет называться воздушной скоростью. Скорость воздушных масс (скорость ветра) обозначим U. Путевая скорость $\vec{W}$ является векторной суммой воздушной скорости ВС и скорости ветра.

$$\vec{W} = \vec{V} + \vec{U} \quad (1)$$

На рис.2 видно, что под воздействием ветра ВС сносится в сторону от начального курса $\overrightarrow{AB}$ на угол α и для того, чтобы двигаться прежним курсом относительно Земли, ВС должно лететь под углом, который называется углом упреждения β. Из навигационного треугольника скоростей [5] легко показать, что

$$W = U \cdot cos\alpha + \sqrt{V^2 - U^2 \cdot sin^2 \alpha} \qquad (2)$$

Таким образом, на каждом участке маршрута скорость движения ВС относительно Земли может отличаться от воздушной скорости и вследствие этого, время движения ВС на каждом участке может изменяться по сравнению с движением без учёта ветра.

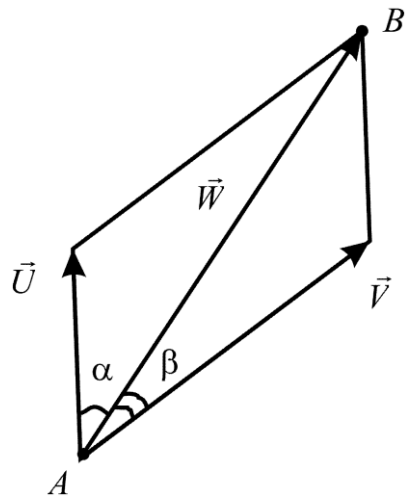

Рис.2. Векторная диаграмма скоростей

Рассмотрим ситуацию, когда одно ВС вылетает из пункта A, а другое из пункта B, причём одновременно. Первое ВС следует курсом $\overrightarrow{AC}$, а второе следует курсом $\overrightarrow{BC}$ (см. рис.3). Тогда столкновение наступит в случае равенства времён полётов до точки пересечения их курсов.

$$t_1 = t_2 \quad (3)$$

$$\text{где } t_1 = \frac{S_1}{V_1},\ t_2 = \frac{S_2}{V_2} \qquad (4)$$

Без учёта ветра, скорости обоих воздушных судов будут V_1 и V_2, соответственно S_1 и S_2 - длины путей, которые должны пройти оба ВС до

точки C. Предположим, для простоты $V_1 = V_2 = 300\,км/ч$, $S_1 = 60\,км$, $S_2 = 50\,км$. Тогда по формулам (4) время движения первого ВС $t_1 = 12\,мин$, а время движения второго ВС $t_2 = 10\,мин$. То есть столкновения не произойдёт, так как ВС прибудут в точку C в разное время.

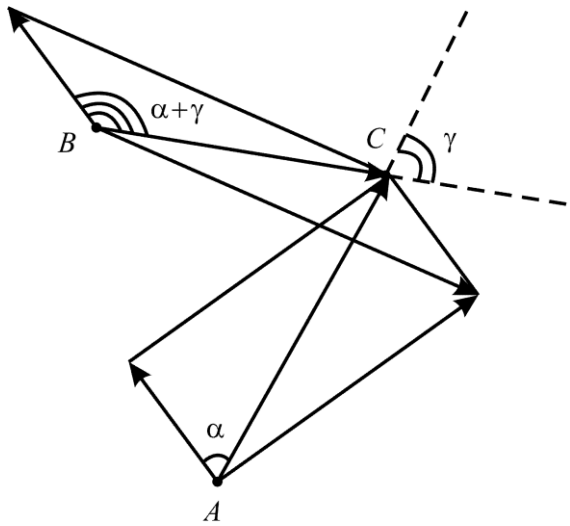

Рис.3. Столкновения двух ВС с учётом ветра

Теперь предположим, что дует ветер под углом α относительно маршрута первого ВС. А угол между маршрутами первого и второго ВС составляет угол γ (см. рис. 3). Тогда:

$$t_1 = \frac{S_1}{W_1},\ t_2 = \frac{S_2}{W_2} \quad (5)$$

где W_1 и W_2 - путевые скорости ВС.

Найдём такой угол α, при котором ВС столкнуться в точке C. В этом случае время полёта до точки C у обоих ВС будет одинаковым. Согласно формулам (5) и (6) получаем:

$$\frac{S_1}{U \cdot cos\alpha + \sqrt{V_1^2 - U^2 \cdot sin^2\alpha}} = \frac{S_2}{U \cdot cos(\alpha+\gamma) + \sqrt{V_2^2 - U^2 \cdot sin^2(\alpha+\gamma)}} \quad (6)$$

Решая данное тригонометрическое уравнение относительно α, можно найти угол, при котором произойдёт столкновение. Если уравнение не имеет решения, то при данных условиях столкновение не может произойти.

Рассмотрим для простоты случай, когда $\alpha + \gamma = 180^\circ$, $V_1 = V_2 = 300\,км/ч$, $S_1 = 60\,км$, $S_2 = 50\,км$, $U = 30\,км/ч$. Подставив в формулу (6) после преобразования получим:

$$180 \cdot cos\left(180^\circ\right) + 6\sqrt{300^2 - 30^2\, sin^2\left(180^\circ\right)} = 150 \cdot cos(\alpha) + 5\sqrt{300^2 - 30^2\, sin^2(\alpha)} \quad (7)$$

Откуда получаем $\alpha \approx 35{,}2^\circ$. То есть, при таком угле ветра, при данных условиях произойдёт столкновение.

Таким образом, зная угол направления ветра, скорости ВС, скорость ветра, расстояние до точки пересечения маршрутов можно рассчитать произойдёт ли столкновение ВС.

Компьютерная модель даёт возможность рассматривать процесс полёта ВС в их динамике.

Отобразим некоторые моменты полетов ВС, согласно рисунку 1:

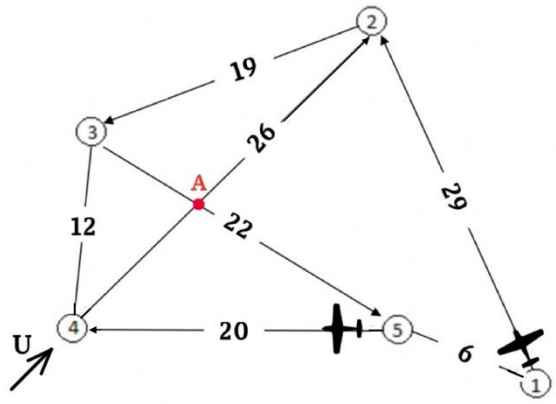

Рис. 4. Вылет из т.1 и т.5

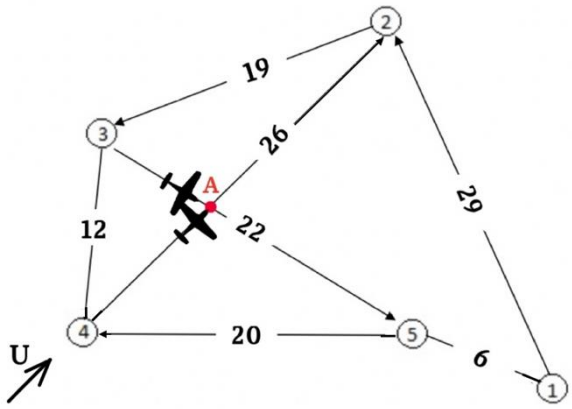

Рис.5. Столкновение ВС в т.А

Составим таблицу движения двух ВС по пересекающимся в точке А маршрутам. В каждой ячейке представлено время пролета 1 и 2 ВС соответствующих точек маршрута.

Таблица 1. Полет ВС с учетом ветра

ВС	**1**	**2**	**3**	**т. А**	**4**	**5**
1	00:00’	00:07’	00:11’	00:13’	-	~~00:16’~~

2	~~00:22'~~	~~00:16'~~	-	00:13’	00:11’	00:06’

Первое ВС вылетает из точки 1 в 00 часов 00 минут, затем пролетает точки 2, 3, и в 00 часов 13 минут оказывается в точке А.

Второе ВС вылетает из точки 5 в 00 часов 6 минут, затем пролетает точку 4 и в 00 часов 13 минут оказывается в точке А.

Исходя из этого, время пролета ВС следующих точек маршрута учитывать не представляется возможным, так как полет ВС заканчивается столкновением в точке А.

Таким образом, найденные критерии безопасности позволяют организовать полеты и их управление таким образом, чтобы избежать столкновения ВС.

Литература

1. Глухов В.П., Глухова Н.В., Евстигнеев Д.А., Кузнецова И.В. Математическое моделирование биологических процессов как реализация межпредметных связей на уроках математики и биологии: Учебно-методическое пособие.- Ульяновск: УИПКПРО, 2004.-28с.
2. Акимова А.А, Глухов В.П., Узкая А.С. Межпредметные связи как средство повышения качества образования: математика и управление воздушным движением // Электронный научный журнал УлГПУ «НАУКА ONLINE», 2019, № 2 (7). С. 33-44.
3. Акимова А.А, Узкая А.С. Теория графов в управлении воздушным движением // Материалы Международной молодёжной научной конференции «XXIV Туполевские чтения (школа молодых учёных)», 2019. Том 5, С. 86-89.
4. Акимова А.А, Глухов В.П., Узкая А.С. Математика и её использование в организации учебных полётов // Научный вестник УИ ГА, 2020, № 11. С. 60-64.

5. В.Я. Мамаев, А.Н. Синяков, К.К. Петров, Д.А. Горбунов. Воздушная навигация и элементы самолётовождения: Учеб. пособие / СПбГУАП. СПб., 2002. 256 с.