Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет Физико-математического и технологического образования
Кафедра Высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«25» июня 2021 г.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Программа учебной дисциплины
модуля «Предметно-деятельностный (по отраслям»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям),

направленность (профиль) образовательной программы
Сервис и эксплуатация автомобильного транспорта

(очная форма обучения)

Составитель: Глухова Н.В.,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования,
протокол от «21» июня 2021 г. № 7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

–

Дисциплина «Экономико-математические модели в оптимизации производственной деятельности» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) модуля «Предметно-деятельностный (по отраслям)» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям), направленность (профиль) образовательной программы «сервис и эксплуатация автомобильного транспорта», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин Высшая математика, Методика профессионального обучения, Информационные технологии в профессионально-педагогической деятельности .

Результаты изучения дисциплины являются основой для прохождения практик Преддипломная, Научно-исследовательская работа и прохождения государственной итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины подготовка учителя к преподаванию профессиональных предметов, подготовка к оптимальному использованию материальных и трудовых ресурсов.

Задачей освоения дисциплины является формирование умений решать оптимизационные профессиональные задачи, планирования времени, подготовки уроков с оптимальным использованием ресурсов.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	умеет	Владеет
ПКО-2. Способен разрабатывать, обновлять программное и учебно-методическое обеспечение учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик и планировать занятия **ПКО-2.2.** Умеет: разрабатывать программную документацию по учебы предметам, курсам, дисциплинам (модулям), практикам;		ОР-1. Умеет: разрабатывать конспекты уроков, планировать занятия по преподаваемым учебным предметам, и курсам, дисциплинам (модулям),	

разрабатывать учебно-методическое обеспечение учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик; планировать занятия по преподаваемым учебным предметам, и курсам, дисциплинам (модулям), практикам; анализировать проведение учебных занятий и организацию самостоятельной работы обучающихся, вносить коррективы в рабочую программу, план изучения учебного предмета, курса, дисциплины (модуля), образовательные технологии, задания для самостоятельной работы, собственную профессиональную деятельность.		практикам ОР-2. Разрабатывать учебно-методическое обеспечение учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, рационально и экономично распределять имеющиеся материальные и временные ресурсы, рационально планировать собственную профессиональную деятельность.	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
7	3	108	18	30	-	33	экзамен (27)
Итого:	3	108	18	30	-	33	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
7 семестр				
Задачи на оптимизацию использования ресурсов	2	4	-	10
Линейное программирование в оптимизации деятельности	6	10	-	20
Динамическое программирование в оптимизации деятельности	6	8	-	20
Методы составления расписаний и сменных графиков	4	8	-	17
Всего по дисциплине:	**18**	**30**	**-**	**67**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

1. Задачи на оптимизацию использования ресурсов

Примеры экономических задач на оптимизацию с ограничениями в виде равенств и неравенств. Построение математической модели и определение целевой функции. Интерактивная форма – урок дискуссия. Транспортная задача, задача об оптимальном назначении. Задача рационального использования ресурсов. Линейное и нелинейное программирование.

2. Линейное программирование в оптимизации деятельности

Графические методы решения экономических задач. Анализ моделей на чувствительность.

Графоаналитический метод решения задач линейного программирования. Анализ чувствительности модели к изменениям ограничений. Теневые стоимости. Графический метод решения задач дискретного программирования. Интерактивная форма: решение задач линейного программирования с помощью компьютерных программ. Симплекс-метод в оптимизации.

3. Динамическое программирование в оптимизации деятельности

Цели и задачи динамического программирования. Основные этапы решения методом динамического программирования. Идея обратной прогонки, принцип оптимальности Беллмана. Примеры применения динамического программирования к задаче о нахождении кратчайшего пути, об оптимальном инвестировании. Урок – деловая игра. Принятие решения об оптимальном инвестировании.

4. Методы составления расписаний и сменных графиков.

Логические и комбинаторные приемы в составлении расписаний. Сетевые модели.

Критический путь и резервы времени. Ранние и поздние сроки начала выполнения работ.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:
- подготовки к устным докладам;
- подготовка к защите проекта;
- решение задач по дисиплине.

ОС-1. Самостоятельная работа

Составьте математическую модель задачи (максимально 12 баллов)

Вариант 1.

В фирме работает 120 сотрудников высшей квалификации и 180 неквалифицированных сотрудников. Фирма выполняет 3 проекта, на первый из которых требуется 70 работников, на второй 140, на третий 90. Первый проект не требует высокой квалификации, поэтому при выполнении данного заказа рабочему любой квалификации нам потребуется оплатить 40 рабочих часов. Второй и третий проект квалифицированные рабочие выполнят гораздо быстрее, чем неквалифицированные: при выполнении второго проекта нам придётся оплачивать 25 часов каждому квалифицированному рабочему и 90

часов – неквалифицированному. При выполнении третьего проекта нам придётся оплачивать 30 часов каждому квалифицированному и 70 часов каждому неквалифицированному рабочему. Составить оптимальный план назначений, позволяющий минимизировать расходы на зарплату, если зарплата квалифицированного рабочего составляет 200 рублей в час, а неквалифицированного – 100 рублей в час. Сколько составят минимальные расходы на зарплату при выполнении данных проектов?

ОС-2. Групповое интерактивное задание.

Студенты разбиваются на микрогруппы по 3-4 человека в зависимости от количества студентов в группе, и получают задание разработать план-конспект просветительского или развлекательного мероприятия по тематике динамического программирования (максимально 12 баллов)

Примерные темы:

1. Динамическое программирование в решении кадровых задач
2. Динамическое программирование в инвестировании
3. Динамическое программирование в задаче о замене оборудования
4. Динамическое программирование в задаче о загрузке транспортного средства

- Составлен план-конспект мероприятия, включающий задачу динамического программирования по теме (8 баллов)
- Самостоятельно найден дополнительный материал по теме, составлена презентация (дополнительно 1-4 баллов)

ОС-3. Контрольная работа

Примерный вариант:

1. В таблице указан доход, который приносят предприятия при инвестировании в них сумм, указанных в левом столбце:

Объём капиталовложений (тыс. руб.)	Доход (тыс. руб.)		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
25	11	15	13
50	32	29	38
75	43	38	48
100	64	57	62

Имеется капитал в 100 тысяч рублей. Составьте оптимальный план распределения капиталовложений между тремя предприятиями, при котором будет достигнут максимальный доход

2. В организации социальной помощи работает 120 сотрудников высшей квалификации и 180 неквалифицированных сотрудников. Фирма выполняет 3 проекта, на первый из которых требуется 70 работников, на второй 140, на третий 90. Первый проект не требует высокой квалификации, поэтому при выполнении данного заказа рабочему любой квалификации нам потребуется оплатить 40 рабочих часов. Второй и третий проект квалифицированные рабочие выполнят гораздо быстрее, чем неквалифицированные: при выполнении второго проекта нам придётся оплачивать 25 часов каждому квалифицированному рабочему и 90 часов – неквалифицированному. При выполнении третьего проекта нам придётся оплачивать 30 часов каждому квалифицированному и 70 часов каждому неквалифицированному рабочему. Составить оптимальный план назначений, позволяющий минимизировать расходы на зарплату, если зарплата квалифицированного рабочего составляет 200 рублей в час, а неквалифицированного – 100 рублей в час. Сколько составят минимальные расходы на зарплату при выполнении данных проектов?

ОС-4. Индивидуальное творческое задание

Разработать программу урока по оптимизации ресурсов.

Примерные темы

1. Задачи нелинейного программирования в управлении персоналом
2. Квадратичное программирование. Понятие о квадратичных и билинейных формах.
3. Положительно-определённые квадратичные формы, угловые миноры и способ Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Определение максимумов и минимумов с помощью матриц Якоби.
4. Линейные операторы в экономике
5. Применение собственных значений к оценке рентабельности производства
6. Методы динамического программирования в решении задачи о замене оборудования
7. Сетевое планирование и составление расписаний.
8. Теория игр в управлении кадрами.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Линейное программирование в управлении персоналом: учебное пособие для направления подготовки бакалавров 080400.62. – Ульяновск, УлГПУ, 2013. – 70 с.
2. Исследование операций и математические модели в экономике. Лабораторные работы для студентов специальности «Управление персоналом»: учебно-методическое пособие / составитель Н.В. Глухова. – Ульяновск: УлГПУ, 2009. – 44 с.
3. Глухова Н.В. Методы оптимизации использования трудовых ресурсов. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 50 с.
4. Глухова Н.В. Теория принятия решений: учебное пособие. / Глухова Н.В. – Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 48 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,**	Образовательные

п/п	используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2. Интерактивное задание. Деловая игра. ОС-3. Контрольная работа ОС-4. Индивидуальное творческое задание	ОР-1. Умеет: разрабатывать конспекты уроков, планировать занятия по преподаваемым учебным предметам, и курсам, дисциплинам (модулям), практикам ОР-2. Разрабатывать учебно-методическое обеспечение учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, рационально и экономично распределять имеющиеся материальные и временные ресурсы, рационально планировать собственную профессиональную деятельность.
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-5. Экзамен в форме устного собеседования по вопросам	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-5 Экзамен в форме устного собеседования по вопросам
Перечень вопросов к экзамену

1. Построение математических моделей при решении экономических задач. Определение целевой функции.
2. Задача оптимизации использования сырья.
3. Транспортная задача и методы её решения.
4. Графический метод решения задач оптимизации.
5. Симплекс-метод при решении задач оптимизации.
6. Метод искусственного базиса в решении линейных задач оптимизации.
7. Дробно-линейное программирование.
8. Квадратичное программирование. Теорема Куна-Таккера.
9. Способ Якоби в квадратичном программировании
10. Метод множителей Лагранжа в квадратичном программировании.
11. Задача минимизации рисков как задача квадратичного программирования.
12. Экономические и управленческие задачи, требующие целочисленности решений.
13. Полностью и частично целочисленные задачи.
14. Метод Гомори (отсекающих плоскостей).
15. Метод ветвей и границ.
16. Цели и задачи динамического программирования.
17. Основные этапы решения методом динамического программирования. Идея

обратной прогонки.
18. Принцип оптимальности Беллмана в динамическом программировании.
19. Применение динамического программирования к задаче о нахождении кратчайшего пути.
20. Применение динамического программирования к задаче об оптимальном инвестировании.
21. Применение линейных операторов к анализу рентабельности. Модель Леонтьева.
22. Балансовые уравнения и собственные векторы.
23. Оптимизация по нескольким критериям. Метод Парето.
24. Линейные операторы в решении многокритериальных задач.
25. Иерархии и приоритеты.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
7 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

ЗАНЯТИЕ № 1. Задачи линейного программирования (ЗЛП)

1. Составить математические модели следующих задач линейного программирования.

1.1. Фирма выпускает два вида продукта в день. Производственный процесс составляет 430 минут в день (5 десятиминутных перерывов при восьми часовом рабочем дне). Для изготовления единицы продукта первого вида требуется одна минута, а единицы второго – две минуты. Продукции первого вида требуется не более 300 единиц в день, а второго – не более 230 единиц в день. Реализация единицы продукции первого вида приносит 2 доллара чистой прибыли, а второго – 3 доллара. Каков оптимальный производства, максимизирующий прибыль, чему равна максимальная прибыль?

1.2. В первой передаче имеется 18 минут рекламного времени, а во второй – 12 минут. Фирма имеет рекламные ролики трёх видов, и на основании анализа рынка считает, что 13 минут времени должно быть отведено для демонстрации роликов, рассчитанных на домохозяек, 7 минут – для демонстрации роликов, рассчитанных на молодёжь, и 10 минут – для демонстрации роликов, рассчитанных на бизнесменов. Известны рейтинги передач: первую передачу смотрят среди всех домохозяек 60 %, среди молодёжи – 50 %, среди бизнесменов – 30 %; для второй передачи соответствующие рейтинги составляют 40, 70 и 20 %. Распределите время показа рекламных роликов между передачами с целью максимизации времени просмотра целевой аудиторией.

Ответ: Ролик для домохозяек все 13 минут показывать в первой передаче, ролик для молодёжи –все 7 минут во второй передаче. Ролик для бизнесменов показывать по 5 минут в каждой передаче.

1.3. Фирма может выполнять работы двух типов. Для выполнения одного заказа первого типа требуется один инженер, 16 рабочих и 9 технологов, а для выполнения одного заказа второго типа – 2 инженера, 6 рабочих и 7 технологов. Выполнение одного заказа первого типа приносит чистую прибыль в 5 тыс. руб., а второго – в 7 тыс. руб. Фирма дала объявление о найме на работу и получила 15 заявлений от инженера, 96 – от рабочих, 69 – от технологов. Какое количество заказов первого и второго типа требуется взять фирме для максимизации прибыли? Какое количество сотрудников следует нанять? Чему равна максимально возможная прибыль?

1.4. (Д/з) На заводе есть два корпуса и три пункта аварийной эвакуации. Время на переход из первого корпуса к первому пункту эвакуации составляет 3 минуты, ко второму – 4 минуты, к третьему 2,5 минуты. Для второго корпуса соответствующие временные затраты составляют 4,5 минуты, 6,5 минут и 3,5 минуты. В первом корпусе работают 600 человек, во втором – 900. Первый пункт может принять 600 человек, второй – 500 человек, третий – 400 человек. Составить оптимальный план эвакуации, минимизирующий суммарное время, необходимое, чтобы все сотрудники добрались до пунктов эвакуации

Ответ: 200 сотрудников из первого корпуса направляются в первый пункт, 400 направляются в третий пункт, из второго корпуса 400 человек направляется в первый пункт и 500 во второй.

1.5 (Д/з) Фирма выпускает два вида изделий. Для изготовления одного изделия первого вида требуется 2 кг металла, а второго вида – 4 кг металла. Изделие первого вида может быть продано по цене 30 тыс. рублей за единицу, а второго – по цене 20 тысяч рублей за единицу, причём первого изделия можно реализовать не более 40 единиц, а второго не более 20. Всего имеется 100 кг металла. Каков оптимальный план производства, максимизирующий доход от продажи данных изделий, чему равна максимальная прибыль доход?

Ответ: 40 изделий первого вида и 5 изделий второго вида принесут доход в 1 мил.300 тыс. рублей.

ЗАНЯТИЕ № 2. Переход в системах ограничений от равенств к неравенствам и обратно

№ 1. Приведите систему ограничений ЗЛП ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) к системе ограничений в виде равенств:

а) $-2x_1 + x_2 \leq 1$;
$-x_1 + x_2 \leq 2$
$3x_1 + x_2 \leq 8$
$-2x_1 + 3x_2 \geq -9$
$4x_1 + 3x_2 \geq 0$.

б) $2x_1 - x_2 + x_3 = 2$
$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$
$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1$;

в) (д/з) $0 \leq 2x_1 + x_2 \leq 1$
$-x_1 + 3x_2 \leq 2$
$-x_1 + x_2 \geq -4$;

г) (д/з) $x_1 \leq 1$
$x_2 \leq 2$
$x_1 + x_2 \leq 3$
$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 0$.

№ 2. Приведите систему ограничений ЗЛП ($x_i \geq 0$) к системе ограничений в виде равенств:

а) $\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 - x_6 = 1 \\ x_2 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 - 3x_6 = 3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ Отв. $2 + x_2 \geq 0$, $3 + x_2 - 2x_4 \geq 0$.

в) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$ Отв. $7x_2 - 4x_3 - 2x_4 \geq 0$, $-9x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 0$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 14x_4 = 0 \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ Отв. $\frac{3}{2}x_2 + \frac{11}{8}x_4 \geq 0$, $-\frac{9}{4}x_4 \geq 0$

ЗАНЯТИЕ № 3. Решение задач линейного программирования графическим методом

1. Найти максимальное и минимальное значение целевой функции F при заданной системе ограничений графоаналитическим методом. Указать значения x_1, x_2, … ($x_i \geq 0$) при которых достигаются максимальное и минимальное значение.

а) $F = x_1 + 3x_2$

Система ограничений:

$x_1 + 4x_2 \geq 4$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_2 \leq 2$.

Ответ: Максимум 10 в точке (4, 2), минимум 3 в точке (0, 1).

б) $F = x_2 - x_1$

Система ограничений:

$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$

$x_1 - 2x_2 - x_4 = 2$

$x_1 + x_2 + x_5 = 5$.

Ответ: минимум (- 2) в точке (2, 0, 0, 0, 3). Максимум 5 в точке (0, 5, 9, 12, 0).

в) (д/з) $F = 4x_1 + x_3$

Система ограничений:

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$3x_1 - x_2 - x_4 = 0$

$2x_2 - x_1 \geq 0$.

Ответ: минимум 4 в точке (0, 0, 4, 0 или (1, 3, 0, 0). Максимум 28/3 в точке (8/3, 4/3, 0, 20/3).

г) (д/з) $F = 2x_1 + 3x_2$

Система ограничений:

$x_2 - 2x_1 + 3 \geq 0$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$2x_2 - x_1 \geq 0$.

Ответ: минимум 14/3 в точке (4/3, 2/3). Максимум 7 в точке (2, 1).

д) $F = x_1 + 2x_2$

Система ограничений:

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 - 2x_2 \leq 1$

Ответ: минимум 0 в точке (0, 0). Максимума не существует.

е) $F = x_1 - x_2$

Система ограничений:

$1 \leq x_1 + x_2 \leq 2$

$2 \leq x_1 - 2x_2 \leq 3$

$1 \leq 2x_1 - x_2 \leq 2$.

Ответ: система ограничений противоречива.

ЗАНЯТИЕ № 4. Решение практических задач графическим методом

Решить задачи 1.1. – 1.5 графоаналитическим методом. Проанализировать задачи на степень чувствительности к изменениям ограничений.

ЗАНЯТИЕ № 5. **Симплексный метод решения ЗЛП**

1. Найти минимум целевой функции F при заданной системе ограничений симплекс-методом. Указать значения переменных x_1, x_2, … ($x_i \geq 0$) при которых достигается минимальное значение.

а) $F = x_1 - x_3$
Система ограничений:
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + 3x_2 + x_4 = 2.$
Отв. Минимум 3, в точке (0, 1, 3, 0).
б) $F = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$
Система ограничений:
$x_1 + x_4 + 6x_6 = 9$
$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2$
$x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6$
Отв. Минимум (-5), в точке (0, 5, 1.5, 0, 0, 1.5).
в) (д/з)$F = 5x_1 - 10x_2$
Система ограничений:
$-2x_1 + x_2 \le 1$
$-x_1 + x_2 \le 2$
$3x_1 + x_2 \le 8$
$-2x_1 + 3x_2 \ge -9.$
Отв. Минимум – 27,5 в точке (1.5, 3.5).
г) (д/з) $F = x_1 - x_2 - 4x_3 + 5$
Система ограничений:
$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 6$
$2x_1 + x_2 - x_3 \le 8.$
Отв. Минимум – 15 в точке (0, 0, 5) или (0, 3, 2).
д) $F = 3 + 4x_1 + 5x_2 - x_3$
$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 4$
$3x_2 - 2x_1 + x_3 \le 5$
$2x_1 - 3x_2 \le 3$
Отв. Минимум 1, (0, 0, 2, 0, 3, 9).
е) $F = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 + x_3 = 10$
$2x_1 - x_3 + x_4 \le 5.$
Отв. Минимум не существует.
2. Найти максимум целевой функции F при заданной системе ограничений симплекс-методом. Указать значения переменных x_1, x_2, … ($x_i \ge 0$) при которых достигается максимальное значение.
а) $F = x_1 + x_2$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 \le 1;$
$x_2 - x_3 \le 1$
$x_1 + x_3 \le 2.$
Отв. Максимум 3 в точке (2, 1, 0).
б) $F = 2x_1 - x_3 + x_4$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 10$
$x_1 - x_3 + 2x_4 \le 8$. Отв. Максимального значения нет.

***ЗАНЯТИЕ № 6.* Симплексный метод решения ЗЛП**

Руководство завода завозит новую аппаратуру в два филиала A_1 и A_2. В первый филиал требуется 6 агрегатов, во второй – 9. Вес каждого агрегата 3 тонны. Для перевозки фирма

может воспользоваться 3-тонными грузовикам трёх небольших транспортных фирм B_1, B_2 и B_3, первые две из которых располагают 6 грузовиками, а третья – 4 грузовиками. Доставку требуется осуществить в кратчайшие сроки (то есть использовать грузовики одной и той же фирмы дважды не разрешается). Стоимости перегона каждого грузовика в каждый из филиалов (в тысячах рублей) фирмы определяют следующим образом:

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	4	2,5
A_2	4,5	6,5	3,5

Составьте для руководства завода оптимальный план перевозок и заказов транспортным фирмам. Определите наименьшую возможную суммарную стоимость перевозок.

Ответ: Арендовать 6 грузовиков первой фирмы, один из которых направить в первый филиал и 5 во второй, 5 грузовиков второй фирмы (все направить в первый филиал) и 4 грузовика третьей фирмы (все направить во втророй филиал). Минимальные расходы 54, 5 тыс. рубл.

4. Для обеспечения автономного отопления 4 гостиниц используются 3 пункта, поставляющих топливо. Потребности гостиниц в топливе, возможности пунктов поставки топлива (в тоннах) и стоимости (с учётом доставки) одной тонны топлива в каждую гостиницу из соответствующих пунктов поставки (в тысячах рублей) приведены в таблице:

	Гостиница 1	Гостиница 2	Гостиница 3	Гостиница 4	Возможности пунктов поставки топлива
Пункт 1	0,3	0,4	0,5	0,3	900
Пункт 2	0,5	0,4	0.7	0,8	300
Пункт 3	0,4	0,3	0,5	0,4	600
Потребности гостиниц в топливе	350	450	400	500	

Сформулируйте задачу линейного программирования, которую необходимо решить для выбора оптимального плана снабжения отделений топливом.

5. Завод выпускает две модели автомобилей: одну – более дорогую, а вторую – более дешёвую. На заводе работает 1000 неквалифицированных рабочих и 900 квалифицированных, каждому из которых оплачивается 40 рабочих часов в неделю. Изготовление одной дорогой модели требует 30 часов неквалифицированного и 50 часов квалифицированного труда. Изготовление одной более дешёвой модели требует 40 часов неквалифицированного и 20 часов квалифицированного труда. Затраты на сырьё и комплектующие составляют 500 долларов на одну дешёвую модель и 1500 долларов на одну более дорогую. Суммарные затраты завода на сырьё и комплектующие не должны превышать 900 тыс. долларов в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку автомобилей могут забирать не более 210 автомобилей в день и работают 5 дней в неделю. Одна модель (более дорогая) приносит заводу 1000 долларов чистой прибыли, а вторая – 500 долларов. Какой объём недельного выпуска моделей каждого типа можно порекомендовать заводу?

Ответ: выпускать 375 моделей первого типа и 675 моделей второго типа. Макс. Прибыль 712500 долларов.

6. В некотором машинном центре производятся два типа изделий, причём на производство изделия первого типа затрачивается 10 минут рабочего времени, а на единицу второго – 12 минут. Суммарное рабочее время машинного центра составляет 2500 минут в день (работы могут осуществляться параллельно на нескольких отдельных машинах). Возможно превышение этого рабочего времени, но в этом случае за каждую дополнительную минуту придётся доплачивать 50 центов. В один рабочий день допустимо производить от 150 до 200 единиц изделий первого типа, но не более 45 единиц второго типа. Доход от продажи единицы первого типа составляет 6 долларов, а второго типа – 7.5 долларов. Составьте

оптимальный дневной план выпуска изделий. Что произойдёт, если стоимость за дополнительную минуту возрастёт до 1.5 долларов?
Ответ: выпускать 200 изделий первого типа и 45 изделий второго типа, использую 40 минут дополнительного рабочего времени (на 4 единицы второго типа). Если стоимость дополнительной минуты увеличивается, то дополнительное время не использовать. Производить 196 изделий первого и 45 изделий второго типа.

.

***ЗАНЯТИЕ № 7.* Двойственные задачи линейного программирования**

Составьте двойственную задачу для задачи:

а) $\Phi = -y_1 - 2y_2 - 3y_3 \to \max$
$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 - 3y_3 \leq 1 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \leq -1 \end{cases}$$

а) $\Phi = 3y_1 + 2y_2 \to \min$
$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,$
$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_2 \geq 14 \\ 4y_1 + 5y_2 \geq 20 \end{cases}$$

в) $\Phi = 5y_1 + 4y_2 \to \max$
$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,$
$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 \leq 24 \\ 3y_1 + 4y_2 \leq 24 \end{cases}$$

Решите задачи с применением двойственного симплекс-метода.
Ответ: а) Максимум –11/5, $y_1 = 0$, $y_2 = 0.8$, $y_3 = 0.2$; б) минимум 86/9, $y_1 = 7/27$, $y_2 = 8{,}27$, в) 216/7, $y_1 = 8/7$, y_2
Фирма имеет два филиала в Москве (работает 10000 человек) и Санкт-Петербурге (5000 человек). Фирма получает заказы на выполнение трёх проектов (П1, П2, П3) в различных городах. На проект П1 требуется 4000 человек, на П2 – 8000 человек, на П3 – 3000 человек. Стоимость проезда одного человека до каждого из городов, в которых необходимо выполнять проекты, от Москвы и Санкт-Петербурга (в тыс. руб.) приведена в таблице:

Пункт отправления /назначения	П1	П2	П3
Москва	3	3	2
Санкт-Петербург	6	5	1

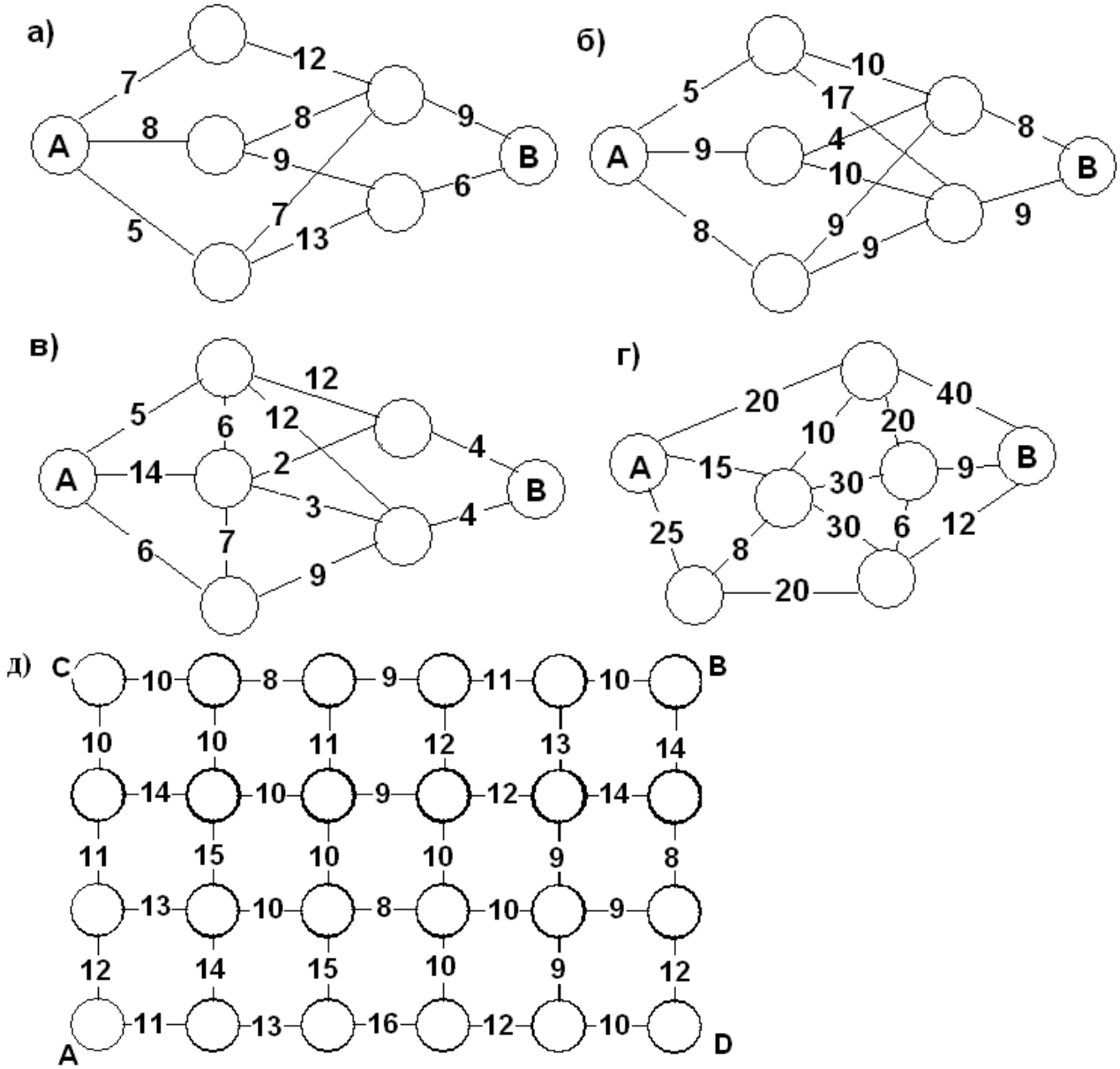
Составьте оптимальный план назначения сотрудников, минимизирующий стоимость проезда.
Ответ: На первый проект отправляется 4000 сотрудников из Москвы, остальные 6000 сотрудников из Москвы направляются на второй проект, также на второй проект направляются 2000 человек из Санкт-Петербурга, остальные 3000 направляются на третий проект. Минимальные расходы составят 43 млн. рублей.= 1/7.
На заводе работают 70 сотрудников 1 квалификации и 130 – второй. Имеется 4 вида работ, которую могут выполнять все сотрудники, однако производительность их труда различна. Чистая прибыль, которую может получить завод от использования сотрудника данной квалификации при выполнении каждого вида работ (в тысячах рублей), а также общее количество сотрудников, необходимых для выполнения работ каждого вида, приведены в таблице:

Работы	Р1	Р2	Р3	Р4
1 квалификация	3	7	5	2
2 квалификация	5	3	4	7
Требуется (человек)	40	60	30	70

Составьте оптимальный план назначений, максимизирующий прибыль.
Ответ: Максимальная прибыль 1240 тыс., на первый вид работы – 40 человек 2 квалификации, на второй вид работы – 60 человек первой квалификации, на третий – 10 человек первой и 20 человек второй квалификации, на четвёртый – 70 человек второй квалификации.

ЗАНЯТИЕ № 8. Общая характеристика методов динамического программирования

1. Дана транспортная схема (расстояния между соседними узлами указаны числами в км).



Найдите длину кратчайшего маршрута от пункта А до пункта В.

2. Пусть на схеме указано количество достопримечательностей на данном маршруте. Составьте экскурсионный маршрут от А до В максимизирующий количество достопримечательностей, встречающихся по дороге.

ЗАНЯТИЕ № 9 Задача о найме сезонных рабочих

1. Потребности фирмы в сезонных рабочих представлены в таблице:

Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь
7	10	8	12	6	10

Реклама о найме обходится в 15 тыс.рублей в месяц, зарплата рабочему – 10 тыс. рублей в месяц. При увольнении выплачивается компенсация 5 тыс. рублей. Составить оптимальный план найма.

2. Некоторая туристическая фирма оценивает потребности в гидах следующим образом: на май месяц – 5 человек, на июнь – 6 человек, на июль – 8 человек, на август – 4 человека, на сентябрь 6 человек. Содержание избытка рабочей силы обходится фирме в 300 $ в месяц за каждого лишнего человека, а наём рабочих на протяжении месяца обходится в 400 $ в месяц (за объявление о найме) плюс 200 $ в месяц за человека (на обучение). Составьте оптимальный план найма рабочих, позволяющий минимизировать расходы по найму.

3. (д/з) Подрядчик оценивает минимальные потребности в рабочей силе на каждую из 5 следующих недель: а) 5, 7, 8, 4 и 6 рабочих соответственно. Содержание избытка рабочей силы обходится в 300 долларов в неделю, а наём рабочих на протяжении недели обходится в 400 $ (за объявление о найме) плюс 200 $ за каждого рабочего в неделю. Составьте оптимальный план найма рабочих, позволяющий минимизировать расходы по найму.

б) решить ту же задачу, если потребности в рабочей силе составят 6, 5, 3, 6 и 8.

ЗАНЯТИЕ №10. Задача об оптимальном распределении сотрудников по проектам

В таблице указан доход, который приносят предприятия при инвестировании в них сумм, указанных в левом столбце. Составьте оптимальный план распределения капиталовложений между тремя предприятиями, при котором будет достигнут максимальный доход.

а) Имеется капитал 10 тыс. долларов

Объём капиталовложений (тыс. долларов)	Доход (тыс. руб.)				
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4	Предприятие 5
1	1,5	2,1	1,6	1,3	1,4
2	3,1	3,5	3,1	3,6	3,2
3	6,4	6,2	6,3	6,4	6,3
4	8,0	7,8	7,4	7,4	8,0
5	9,5	9,5	9,6	9,2	9,5
6	11,8	12,9	11,7	11,5	13
7	11,8	12,9	11,7	11,5	13,5
8	11,8	12,9	11,7	11,5	13,5

б) Имеется капитал в 400 тысяч рублей.

Объём капиталовложений (тыс. руб.)	Доход (тыс. руб.)		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
100	71	75	81
200	157	168	162
300	246	243	243
400	324	322	321

Ответ. вложить 200 тыс. во второе и 200 тыс. в третье. Прибыль 330 тыс.

7. Пусть в фирме работает n сотрудников равной квалификации. каждому из которых (либо нескольким одновременно) можно поручить выполнение некоторых видов работ (заказов). Доходность от выполнения заказа меняется, в зависимости от того, сколько сотрудников одновременно задействовано в его выполнении. Эти изменения не линейны и заданы с помощью таблиц (то, что начиная с некоторого количества доходность перестаёт возрастать означает, что выполнение данного заказа не требует столь большого количества сотрудников). Составьте оптимальный план распределения сотрудников, при котором обеспечен максимальный доход:

а) Общее количество сотрудников равно n = 10

Количество	Доход (тыс. руб.)

сотрудников	Заказ 1	Заказ 2	Заказ 3	Заказ 4	Заказ 5
1	0,5	0,1	0,6	0,3	1,0
2	1,0	0,5	1,1	0,6	1,2
3	1,4	1,2	1,2	1,3	1,3
4	2,0	1,8	1,4	1,4	1,3
5	2,5	2,5	1,6	1,5	1,3
6	2,8	2,9	1,7	1,5	1,3
7	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
8	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
9	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
10	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3

б) Общее количество сотрудников равно n = 40

Количество сотрудников	Доход (тыс. руб.)		
	Заказ 1	Заказ 2	Заказ 3
10	35	20	22
20	69	75	71
30	132	120	145
40	167	158	150

ЗАНЯТИЕ № 11. Выступление с докладами по темам рефератов

ЗАНЯТИЕ № 12. Составление расписаний. Логические и комбинаторные методы Деловая игра. ОС-2.

ЗАНЯТИЕ № 13. Сетевые методы и модели

I Задача минимизации дерева расстояний

Дана сеть. Требуется определить минимальную суммарную длину ветвей, связывающих все вершины сети.

Алгоритм решения.

п.1 Выбрать произвольно узел сети. Соединить его с узлом, имеющим минимальную вершину ветви до выбранного узла.

п.2 Выбрать следующий узел, имеющий ветвь с минимальной величиной до уже соединенных узлов. В случае равенства расстояний выбрать произвольно один из узлов.

п.3 Если все узлы соединены, то задача решена. В противном случаи перейти к п.2

II Задача кратчайшего расстояния.

Дана сеть. Найти путь от начального узла к конечному, имеющий наименьшую общую продолжительность.

Алгоритм решения.

п.1 Определяем начальный узел как элемент постоянного множества и приписываем ему величину $U_1 = 0$.

Определяем элементы соседнего множества как вершины, достижимые из постоянного множества.

п.2 Определяем величину $U_j = U_i + C_{ij}$,

где U_i –величина узла постоянного множества; C_{ij} –величина ветви $i \longrightarrow j$.

Находим узел с минимальным U_j.

п.3 Присоединяем узел j к величине постоянного множества. Сохраняем ветвь $i \longrightarrow j$ и вычеркиваем остальные ветви, соединяющие узлы постоянного множества.

п.4 Определяем соседнее множества, которое можно достигнуть из вершин постоянного множества. Если такое множество определить нельзя, то задача решена. В противном случае переходим к п.2.

ЗАНЯТИЕ № 14. Сетевые методы и модели

<u>III Задача максимального потока в сети.</u>

Дана сеть, каждая ветвь которой имеет определенную пропускную способность C_{ij} в прямом и обратном направлении. В общем случае $C_{ij} \neq C_{ji}$.
Требуется определить максимально возможный поток в этой сети из начального узла в конечный.

Алгоритм решения.

п.1 Определим произвольный путь от истока к стоку. Если такой путь определить нельзя,

то задача решена.

п.2 В выбранном пути определяем ветвь с минимальной пропускной способностью.

Обозначим ее через С.

п.3 Уменьшаем пропускные способности ветвей выбранного пути на величину С в прямом направлении и увеличим пропускные способности ветвей выдранного пути в обратном направлении на величину С. Переходим к п.1.

<u>IV Метод критического пути.</u>

Дана сеть, которая представляет собой изображение комплекса взаимосвязанных работ. Ветви представляют собой работы, величина ветви- длительность работы. Вершины называются событиями и являются моментом завершения всех робот, входящих в вершину и начало всех работ, выходящих из вершины. Найти минимальный срок завершения комплекса работ.

Для решения задачи вводятся параметры событий и работ.

1. Ранний срок наступления события j: показывает самый ранний (ожидаемый) срок наступления события и вычисляется по формуле:

$$ET_j = \max\{ET_i + t_{ij}\},$$

где ET_j- ранний срок наступления события предшествующего события j, t_{ij} – время выполнения работы $i \longrightarrow j$, $ET_1=0$.

2. Поздний срок наступления i – это самый поздний срок, в который может наступить событие j для того, чтобы не сорвался срок выполнения всего комплекса работ. Находится по формуле:

$$LT_i = \min\{LT_j - t_{ij}\},$$

где LT_i-поздний срок наступления события j, следующего за событием I

$$LT_{кон} = ET_{нач.}$$

3. Критический срок – это минимальный срок, за который будет выполнен весь комплекс работ. Он определяется критическими работами –работами, требующими наибольших затрат времени. Критические работы определяются критическими событиями i, для которых

$$ET_i = LT_i$$

Такие события на сети отличаются контрастным цветом, а также отличаются все работы, связывающие эти события. Критический срок $t_{кр}=ET_{кон}=LT_{кон}$

ЗАНЯТИЕ № 15. Контрольная работа

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Соколов Г.А. Линейные целочисленные задачи оптимизации : учеб. пособие. — М.: ИНФРА-М, 2017. — 132 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=514697)
2. Ващекин, А. Н. Математические методы и модели в экономике : учебное пособие / А. Н. Ващекин, В. Ю. Квачко, Е. В. Царькова ; под. ред. Е. В. Царьковой. – М.: РГУП, 2019. - 158 с. - - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1194065.
3. Рыков В.В. Основы теории массового обслуживания (Основной курс: марковские модели, методы марковизации) : учебное пособие / В.В. Рыков, Д.В. Козырев. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 223 с. (Режим доступа. - URL: https://znanium.com/catalog/product/129032)
4. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций : учебник / АС. Шапкин, В. А. Шапкин. – М. : Дашков и К°, 2019. – 398 с. – Режим доступа: . – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573373

Дополнительная литература

1. Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н. Методы оптимальных решений. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 384 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=521453)
2. Малугин В. А. Количественный анализ в экономике и менеджменте: Учебник / Малугин В.А., Фадеева Л.Н. - М.:НИЦ ИНФРА-М, НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 615 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=558504)
3. Шапкин, А. С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию: учебное пособие / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – М : Дашков и К°, 2020. – 432 с. – Режим доступа: URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573151

4. Высшая математика для экономистов : учебник / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; ред. Н. Ш. Кремер.. – М.: Юнити, 2015. – 482 с. : – Режим доступа: – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114541
5. Белько И.В., Морозова И.М., Криштапович Е.А. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование: Учебное пособие. – М.: НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. – 299 с. Режим доступа: (http://znanium.com/bookread2.php?book=542521)

Интернет-ресурсы

- Электронная библиотека http://lib.mexmat.ru/books/75829 (свободный доступ)
- Электронная библиотека http://www.razym.ru (свободный доступ)
- http://nsportal.ru/sites/default/files/2012/12/10/tvorcheskiy_proekt_po_matematike_na_temu.docx (Дата обращения: 01.04.2015).