Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«25» июня 2021 г.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ

Программа учебной дисциплины предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Информатика

(очная форма обучения)

Составители: Гришина С.А.
доцент кафедры высшей математики
Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «21» июня 2021 г. № 7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория чисел и числовые системы» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Информатика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин Алгебра, Введение в математический анализ, Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной.

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения ряда дисциплин и прохождения практик: Компьютерная алгебра, Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных, Компьютерное моделирование, Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, Теория линейных операторов, Теория функций действительного переменного, Элементы функционального анализа, Основы комплексного анализа, Учебная (научно-исследовательская работа, получение первичных навыков научно-исследовательской работы) Курсовая работа №1 и для прохождения государственной итоговой аттестации

Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины является подготовка учителя к будущей профессиональной деятельности: формирование способности к преподаванию учебного предмета алгебра, как в обычных общеобразовательных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Задачей освоения дисциплины является закрепление умений проводить математические преобразования выражений, отработка понятийного аппарата математики, техники проведения математических расчетов, формирование и закрепление умения проводить строгие абстрактно-логические доказательства, решать задачи повышенной сложности школьного курса математики.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-12 - Способен выделять структурные элементы, входящие в систему познания предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения), анализировать их в единстве содержания, формы и выполняемых функций.			

ПК-12.1. Знает формулировки определений, содержательное значение терминов и понятий предметной области, правила и алгоритмы оперирования с объектами предметной области, понимает взаимосвязь между структурными элементами; имеет представление о функциях и практическом применении изучаемых объектов. ПК-12.2. Умеет выделять и анализировать структурные элементы, входящие в систему познания предметной области; определять логическую взаимосвязь между компонентами предметной области; строить логически верные и обоснованные рассуждения; решать задачи предметной области.	ОР-1. Основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач	ОР-2 Решать задачи по дисциплине, проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения	
ПК-14. Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями ИПК-14.1. Знает роль и возможности применения	ОР-3. возможности применения полученных	ОР-4. решать задачи школьного курса математики	

аппарата предметной области в смежных научных областях, их методологическое и мировоззренческое значение; имеет представление о междисциплинарных связях, научных методах смежных областей ИПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач.	сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях	повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине	

1. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
3	3	108	18	30	-	33	экзамен (27)
Итого:	3	108	18	30	-	33	

2. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1 .Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
3 семестр				
Аксиоматическая теория натуральных чисел	6	-	8	9
Целые числа. Теория делимости	4	-	4	9
Теория сравнений и диофантовы уравнения	6	-	12	6
Рациональные и действительные числа	2		4	9
Экзамен				27
Всего по дисциплине:	18	-	30	60

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса

1. Аксиоматическая теория натуральных чисел

Аксиоматический метод в математике. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел. Метод математической индукции. Независимость аксиомы индукции и её роль в арифметике. Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории натуральных чисел. Сложение и умножение натуральных чисел. Свойства. Сравнение натуральных чисел. Теорема о наименьшем элементе.

2. Целые числа. Теория делимости

Аксиоматическая теория целых чисел. Свойства целых чисел, непротиворечивость, категоричность аксиоматической теории. Предмет теории чисел, краткая история развития теории чисел. Теорема о делении с остатком. Отношение делимости в кольце целых чисел. НОД и НОК целых чисел, их свойства. Алгоритм Евклида и его приложения. Свойства взаимно простых чисел. Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел в натуральном ряду. Теорема о разложении натурального числа на простые множители. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение натурального числа. Сумма делителей $\sigma(n)$ и число делителей $\tau(n)$. Функция Эйлера $\varphi(n)$. Мультипликативность и явные формулы. Тождество Гаусса для функции Эйлера

3. Полная и приведенная системы вычетов по данному модулю и их свойства. Теоремы о вычетах линейных форм. Теоремы Эйлера и Ферма. Сравнение и система сравнений с неизвестной величиной. Решение системы сравнений с неизвестной величиной. Сравнения 1-ой степени. Теорема о числе решений сравнения 1-ой степени. Различные способы решения. Системы сравнений. Показатели чисел и классов по данному модулю. Первообразные корни. Индексы чисел и классов по данному модулю. Свойства индексов. Применение индексов к решению сравнений 1-ой степени. Проверка правильности выполнения арифметических операций. Нахождение остатков от деления степеней числа. Решение неопределенных уравнений 1-ой степени. Вывод признаков делимости.

4. Рациональные и действительные числа
Поле рациональных чисел. Модели. Существовании нерациональных чисел Последовательности в нормированных полях. Аксиоматическая теория действительных чисел. Действительное число как предел последовательности рациональных чисел. Существование корня натуральной степени из положительного действительного числа. Интерактивная форма: подготовка тестов по микрогруппам.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестов, контрольных и самостоятельных работ.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:
- подготовки к устным докладам;
- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий

Самостоятельная работа № 1

Примерный вариант . Выяснить, удовлетворяет ли множество N с заданным на нем отношением «следовать за» аксиомам из определения натуральных чисел (аксиомам Пеано); определить, какие аксиомы выполнены, а какие – нет.
$N = \{1, 2, 3\}$, $1^{/} = 3$, $2^{/} = 3$, $3^{/} = 2$.

Самостоятельная работа № 2

1.Найти число, сумму натуральных делителей числа 1400 и число натуральных чисел меньших и взаимно простых с числом 1400.
2. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 252 и 468.

3. Найти все простые числа между 2320 и 2350.
4.Написать полную и приведенную систему наименьших неотрицательных вычетов по модулю 10
5.Найти остаток от деления числа 123203 на число 35.

Контрольная работа

Примерный вариант:
1.Решить сравнения а) $9x \equiv 7 \pmod{10}$; б) $24x \equiv 18 \pmod{36}$; в) $37x \equiv 21 \pmod{117}$
2. Решить уравнение в целых числах $13x + 17y = 19$
3. Представить в виде цепной дроби 9/13.

Самостоятельная работа № 3

1.Доказать рациональность $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.
2. Доказать иррациональность $\cos 20^0$.

Групповое интерактивное задание.

Студенты разбиваются на микрогруппы по 4 человека и готовят доклад по темам

1. Арифметические прогрессии, содержащие бесконечно много простых чисел.
2. Числа рациональные и иррациональные.
3. Иррациональные числа.
4. Число решений уравнения $\varphi(x) = m$.
5. Суммы по простым числам.
6. Мультипликативные теоретико-числовые функции.
7. Характеры Дирихле.
8. Оценки сумм с характерами.
9. Распределение значений характеров.
10. Характеры мультипликативной полугруппы натуральных чисел.
11. Теоретико-числовые работы П.Л. Чебышева.
12. Квадратичный закон взаимности.
13. Основная теорема арифметики в различных кольцах.
14. Теорема Ван-дер Вардена об арифметических прогрессиях.
15. Магические квадраты.
16. Специальные простые числа.
17. Кольцо чисел Гаусса.
18. Арифметика квадратичных колец.
19. Дружественные и совершенные числа.
20. Число делителей и их сумма.
21. Некоторые специальные теоретико-числовые функции.
22. Различные способы суммирования функций.
23. Представление натуральных чисел суммами квадратов.
24. Средние значения теоретико-числовых функций.
25. Распределение квадратичных вычетов и невычетов.
26. Асимптотический закон распределения простых чисел.
27. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
28. Числа и многочлены Бернулли.
29. Ряды и функции Дирихле.

Составление тестов в микрогруппах.
Составление теста по одному из разделов

Студенты разбиваются на микрогруппы по 3-4 человека. При помощи системы Moodle (http://do.ulspu.ru), либо любой другой программы по выбору студентов составляются 8 тестовых заданий по одному из разделов курса

Варианты:

1. Метод математической индукции
2. Натуральные числа и их свойства
3. Целые числа и их свойства
4. Рациональные числа и их свойства
5. Действительные числа и их свойства

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

Глухова Н.В. Числовые системы: учебное пособие для направления подготовки бакалавров 050100.62 «Педагогическое образование» Профиль: Математика. – Ульяновск, УлГПУ, 2014. – 82 с.

Гришина С.А., Кувшинова А.Н. Теория чисел. Учебно-методические рекомендации. – Ульяновск, УлГПУ, 2014. – 14 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Самостоятельная работа № 1 ОС-2 Самостоятельная работа № 2 ОС-3 Контрольная работа ОС-4 Самостоятельная работа № 3 ОС-5. Выступление с докладами (интерактивное задание) Составление тестов	ОР-1. Знает оновные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач ОР-2. Решает задачи по дисциплине, проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения ОР-3. знает возможности применения полученных сведений
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-6 Экзамен в форме устного собеседования	

		к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях ОР-4. умеет решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-6 Экзамен в форме устного собеседования

Примерные вопросы к экзамену

1. Аксиоматические теории. Основные требования, предъявляемые к аксиоматическим теориям и методы их проверки.
2. Аксиоматическое определение натуральных чисел.
3. Непротиворечивость и независимость системы аксиом Пеано.
4. Определение сложения натуральных чисел.
5. Ассоциативный закон сложения натуральных чисел. Коммутативный закон сложения натуральных чисел.
6. Определение умножения натуральных чисел.
7. Дистрибутивный закон для натуральных чисел. Коммутативный закон умножения натуральных чисел.
8. Ассоциативный закон умножения натуральных чисел. Другие свойства умножения.
9. Неравенства на множестве натуральных чисел.
10. Теорема о наименьшем элементе для натуральных чисел.
11. Эквивалентность аксиомы о наименьшем элементе и аксиомы индукции.
12. Метод математической индукции. Принципы обобщённой и усиленной математической индукции.
13. Различные определения кольца целых чисел, их эквивалентность.
14. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
15. Вычисления в модели целых чисел.
16. Свойства операций над целыми числами.
17. Отношение делимости в кольце целых чисел Z и его свойства.
18. Деление целых чисел с остатком. Теорема о делении целых чисел с остатком.
19. НОД и НОК целых чисел. Алгоритм Евклида.
20. Взаимно простые числа и их свойства.
21. Основная теорема арифметики и следствия из нее.
22. Числовые функции σ и τ. Теоремы о вычислении значений функций σ и τ.
23. Конечная цепная дробь. Представление рационального числа в виде конечной дроби.
24. Подходящие дроби и их свойства.
25. Сравнение целых чисел и его свойства.

26. Кольцо классов вычетов.
27. Полная система вычетов.
28. Приведенная система вычетов.
29. Теоремы: о группе классов вычетов взаимно простых с модулем; о поле классов вычетов по простому модулю.
30. Функция Эйлера φ и ее мультипликативность.
31. Теоремы о вычислении φ (n); $n \in N$.
32. Теоремы Эйлера и Ферма. Следствие из теоремы Ферма.
33. Сравнения n-ой степени с одним неизвестным.
34. Линейные сравнения с одним неизвестным. Исследование решения.
35. Способы решения линейных сравнений с одним неизвестным.
36. Порядок числа, класса вычетов. Свойства порядка.
37. Первообразный корень. Теорема о числе первообразных корней по простому модулю.
38. Индекс числа по простому модулю. Свойства.
39. Таблица индексов, применение индексов для решения сравнений.
40. Признак делимости Паскаля и следствия из него.
41. Расположенные кольца и их общие свойства.
42. Расположенность кольца целых чисел.
43. Определения поля рациональных чисел. Основные операции над рациональными числами.
44. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.
45. Вычисления в модели рациональных чисел.
46. Основные свойства рациональных чисел.
47. Действительные числа. Различные подходы к определению.

Примерные практические задания к экзамену

1. Доказать иррациональность $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$
2. Решить в целых числах уравнение: $2x^2 - 11xy + 12y^2 = 17$
3. Решить сравнения а) $12x \equiv 10 \pmod{16}$;

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
3 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Планы лабораторных (практических) занятий

ЗАНЯТИЕ № 1. Метод математической индукции

Обсуждается Значение дисциплины числовые системы. Дискуссия

Интерактивная форма – групповая дискуссия. Найти ошибку в рассуждении:

$$1 = \frac{1}{3}+\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{2}=\frac{2}{6}+\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{7-5}{2}=\frac{7-5}{6}+\frac{7-5}{3} \Rightarrow \frac{7}{2}-\frac{5}{2}=\frac{7}{6}-\frac{5}{6}+\frac{7}{3}-\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2}-\frac{7}{6}-\frac{7}{3}=\frac{5}{2}-\frac{5}{6}-\frac{5}{3} \Rightarrow 7(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}) = 5(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}) \Rightarrow 7 = 5.$$

Задания для самостоятельного решения:

Доказать равенства для любого натурального n: д/з

а) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; в) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; г) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Задания для самостоятельного решения:

Выяснить, какие из перечисленных систем удовлетворяют аксиомам Пеано (являются моделями множества натуральных чисел), определить, какие аксиомы выполнены, а какие – нет.

а) $\{3, 4, 5 \ldots\}$; $n' = n + 1$ б) $\{n \geq a, n \in \mathbf{N}\}$; $n' = n + 1$

в) $\{n \geq -2, n \in \mathbf{N}\}$; $n' = n + 2$ или $n' = n + 1$ г) нечётные числа, $n' = n + 1$

д) {1, 2, 3, 4, 5}; $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 4$, $4' = 5$, $5' = 1$,

е) Целые числа, $n' = \begin{cases} -n, & n > 0 \\ -n+1, & n \le 0 \end{cases}$

Д/з

ж) Натуральные числа с отношением $n' = n + 2$

з){1, 2, 3}. Следовать за: $1' = 3$, $2' = 3$, $3' = 2$.

и){1, 2, 3}. Следовать за: $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 1$.

к) Натуральные числа, кратные 3 с отношением $n' = n + 3$

л) Чётные натуральные числа с отношением $n' = n + 2$

ЗАНЯТИЕ № 2. Натуральные числа

Вопросы для обсуждения:

Доказательство свойств натуральных чисел.

Задания для решения:

Докажите, что для любого натурального n

а) $n^3 - n$ делится на 3.

б) $n^7 - n$ делится на 7

в) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7

г) $2^{2n+1} \cdot 3^{n+3} + 1$ делится на 11

Сложить на основании определения сложения натуральных чисел 5 + 3. Выполнить то же действие в представленных ниже моделях натуральных чисел, если такие числа есть. Если таких чисел нет, то сложить пятый и третий элемент модели

а) {3, 4, 5 …}; $n' = n + 1$

б) $\{n \ge -2, n \in \mathbf{N}\}$; $n' = n + 1$

в) нечётные положительные числа, $n' = n + 2$

г) Целые числа, $n' = \begin{cases} -n, & n > 0 \\ -n+1, & n \le 0 \end{cases}$

д) Натуральные числа, кратные 3 с отношением $n' = n + 3$

е) Чётные натуральные числа с отношением $n' = n + 2$

ЗАНЯТИЕ №3. . Сложение и умножение на моделях

1. Обсуждаются свойства умножения натуральных чисел и их доказательства.

2. Задания для решения:

Умножить на основании определения сложения натуральных чисел 5 и 3. Выполнить то же действие в представленных ниже моделях натуральных чисел

а) {3, 4, 5 …}; $n' = n + 1$

б) $\{n \ge -2, n \in \mathbf{N}\}$; $n' = n + 1$

в) нечётные положительные числа, $n' = n + 2$

г) Целые числа, $n' = \begin{cases} -n, & n > 0 \\ -n+1, & n \le 0 \end{cases}$

д) Натуральные числа, кратные 3 с отношением $n' = n + 3$

е) Чётные натуральные числа с отношением $n' = n + 2$

3. Докажите свойства:

1) $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$.

2) $(a^n)^m = a^{nm}$.

3) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

ЗАНЯТИЕ №4. Доказательство неравенств методом индукции

1. Докажите антирефлексивность и транзитивность отношения «больше» на множестве натуральных чисел.

2. Докажите неравенства для всех натуральных n

а) $5^n > 7n - 3$;

б) $2^{n+2} > 2n + 5$;

в) $2^{n+2} > n^2 + 2$;

г) $2^n > n$;

д) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1$.

Задания для самостоятельного решения:

Доказать неравенство для всех натуральных чисел, больших данного n.

а) $3^n > 2^n + n$ при $n > 1$

б) $2^n > n^2 + n + 2$ при $n > 5$

в) $2^{n-1} \geq n(n+1)$ при $n > 6$

г) $n^2 < 2^n$ при $n > 4$

ЗАНЯТИЕ №5. Аксиоматическая теория целых чисел. Решение уравнений в целых числах

Задания для решения:

1. Указать пары натуральных чисел эквивалентные между собой

а) <7, 5>	1) <5, 7>
б) <2, 3>	2) <1, 10>
в) <10, 10>	3) <5, 4>
г) <6, 2>	4) <15, 5>
	5) <1, 5>
	6) <9, 9>

Указать пары противоположные данным.

2. Вычислить

а) [<1, 5>] + [<3, 2>]

б)[<3, 8>] + [<4, 7>]

в) [<7, 4>] – [<8, 3>]

г) [<1, 5>] – [<3, 2>]

д) [<1, 5>] · [<2, 2>]

е) [<2, 10>]· [<10, 2>]

Решить в целых числах уравнения:

а) $y^2 - 2xy - 2x = 6$

б) $2x^2 - 11xy - 12y^2 = 17$

в) $35xy + 5x - 7y = 1$

г) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$

д) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} = 1$

е) $xy + 3x - 5y + 3 = 0$

Занятие 6. Числовые функции. Функции τ и σ

1. Найти количество и сумму натуральных делителей числа 360, 957 (д/з числа 750, 375).
2. Найдите НОД и НОК чисел 360 и 504.
3. Сумма двух чисел 667, а отношение их НОК к НОД равно 120. Найти эти числа.
4. Найдите целое положительное число, зная, что оно имеет два простых делителя, число всех делителей равно 6, а сумма всех делителей – 28.
5. Число N имеет два простых делителя, N^2 имеет 15 различных натуральных делителей. Сколько делителей имеет N^3 (ответ 28)
6. Число $N = 2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot 7^{\gamma}$. 5N имеет на 8 делителей больше, чем N, 7N имеет на 12 делителей больше, чем N, 8N имеет на 18 делителей больше, чем N. Найдите это число.
7. Число $N = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma}$. Если N разделить на 2, то у нового числа будет на 30 делителей меньше, чем у N, если N разделить на 3, то у нового числа будет на 35 делителей меньше, чем у N, если N разделить на 5, то у нового числа будет на 42 делителей меньше, чем у N. Найдите это число.

Занятия 7. Системы вычетов. Цепные дроби.

1. Написать полную и приведённую систему наименьших положительных и наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 10 (по модулю 12).
2. Показать, что числа образуют полную систему вычетов
а) 25, -20, 16, 46, - 21, 18, 37, -17 по модулю 8.
б) 32, - 9, 15, 42, - 18, 30, 6 по модулю 7.
3. Показать, что числа образуют приведённую систему вычетов
а) 19, 23, 25, -19 по модулю 12
б) 11, -1, 17, -19.
4. Разложите в цепную дробь 13/67, 99/170.
5. Представьте цепную дробь |2; 1, 1, 3, 1, 2| (|3, 2, 2, 7| в виде обыкновенной.
6. С помощью разложения в цепную дробь сократить $\frac{1043}{3427}, \frac{3953}{871}$.

Занятие 8. Функция Эйлера.

Функция Эйлера φ(a) – количество чисел меньших, чем a и взаимно простых с a. Функция Эйлера мультипликативна (φ(ab) = φ(a) φ(b), если (a,b) = 1). Если число a представлено каноническим разложением $a = q_1^{\alpha 1} q_2^{\alpha 2} \dots q_n^{\alpha n}$, то

$$\varphi(a) = a\ (1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1}{q_2})...(1-\frac{1}{q_n})$$

1. Найти функцию Эйлера от чисел: 375, 720, 17, 31, 5·7·13, 3^5
Д/з 988 (отв. 432), 1200 (отв. 320), 71, 43, 12·17 (отв. 64), 5^4 (отв. 500).

2. Число имеет два простых делителя, разность между которыми равна 2. Функция Эйлера от числа равна 120. Найдите это число (отв. 143).
Д/з Число $a = 3^\alpha 5^\beta 7^\gamma$, φ(a) = 3600. Найти a. (отв. 7875).

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 16 (д/з 36, отв. 12).

4. Найти количество натуральных чисел, меньших 300 и имеющих с ним наибольший общий делитель число 20. Ответ: 8. (д/з числа, меньшие, чем 1665, НОД = 37, отв. 24)

Занятие 9. Теорема Эйлера

Если (a, m) = 1, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Теорема Ферма: Если целое число a не делится на простое число p, то

$a^{p-1} \equiv a \pmod p$.

5. Найти остаток от деления:

а) 109^{345} на 14 (отв. 1) б) 439^{291} на 60 (отв. 19) в) $3^{80} + 7^{80}$ на 11 (отв 2)
Д/з г) 385^{175} на 45 (отв. 32) д) 293^{275} на 48 (отв. 29) е) $3^{100} + 5^{100}$ на 7 (отв 6).

6. Найти последние две цифры числа 2^{100}. Ответ 76. (д/з последние 3 цифры 243^{402} – ответ 049).

Занятие 10. Линейные сравнения с одним неизвестным

1. Путём испытаний наименьших неотрицательных вычетов найти решения сравнений:

а) $5x^2 - 15x + 22 \equiv 0 \pmod 3$ б) $x^2 + 2x + 2 \equiv 1 \pmod 5$ – отв. 1, 2.

2. Решить сравнения по простому модулю на основании их свойств:

а) $12x \equiv 1 \pmod 7$; б) $6x \equiv 3 \pmod 7$; в) $6x + 5 \equiv 1 \pmod 7$
Д/з г) $6x + 5 \equiv 6 \pmod 7$; д) $3x + 4 \equiv 2 \pmod 5$; е) $15x + 4 \equiv 7 \pmod{11}$

3. Решить сравнения способом Эйлера:

а) $3x \equiv 1 \pmod 5$ Д/з в) $5x \equiv 6 \pmod 7$ отв. 4.

4. Решить сравнения:

а) $20x \equiv 10 \pmod{25}$; б) $5x \equiv 7 \pmod{10}$; в) $10x \equiv 25 \pmod{35}$
Д/з г) $12x \equiv 9 \pmod{15}$ д) $12x \equiv 9 \pmod{18}$; е) $14x \equiv 22 \pmod{36}$.

Отв. 2, 7, 12 нет 17, 35

4. Решить сравнения пользуясь разложением в цепную дробь

а) $37x \equiv 25 \pmod{117}$ Отв. 7; б) $143x \equiv 41 \pmod{221}$ – решений нет

в) $113x \equiv 89 \pmod{311}$ Отв. 46; г) $221x \equiv 111 \pmod{360}$ отв. 51.

Занятие 11. Неопределённые уравнения первой степени с двумя неизвестными. Системы линейных сравнений с одним неизвестным

а) $3x + 4y = 13$ б) $81x – 48y = 33$ в) $26x + 34y = 13$

Д/з г) $8x – 13y = 63$ д) $45x - 37y = 25$ е) $39x – 22y = 10$

Отв. $x = 3 + 13t, y = 8t – 3$ $x = 17 + 37t, y = 20 + 45t$ $x = 22t – 2, y = 39t – 4$.

2. Для перевозки зерна имеются мешки, вмещающие в себя 60 кг или 80 кг. Сколько нужно тех и других для перевозки 440 кг?

3. Сколько билетов по 30 и 50 р. можно купить на 1490 р?

4. Ставится водопровод длинной 105 м, имеются трубы 3 м и 4.5 м. Сколько нужно тех и других труб? (12 пар решений).

5. Сколько конвертов по 3 и 4 р. можно купить на 50 р? (4 пары решений).

6. Решите систему сравнений:

а) $x \equiv 4 \pmod{5}$

$x \equiv 1 \pmod{12}$

$x \equiv 7 \pmod{14}$.

Занятие 12. Показатели и индексы чисел по данному модулю. Двучленные сравнения по простому модулю.

1. Найти (путем возможно более простых вычислений) показатель, которому принадлежит

а) 7 по модулю 43

б) 5 по модулю 108

2. Найти все первообразные корни по модулям 17, 289, 578

3. Составить таблицы индексов и антиндексов по модулю 13. С помощью таблицы решить сравнение: $2x^8 \equiv 5 \pmod{13}$, $10x \equiv 7 \pmod{13}$.

4. Пользуясь таблицей индексов, указать число решений сравнения

а) $x^{60} \equiv 79 \pmod{97}$

б) $x^{55} \equiv 17 \pmod{97}$

в) $x^{15} \equiv 46 \pmod{97}$

г) $3x^{12} \equiv 31 \pmod{41}$

д) $7x^7 \equiv 11 \pmod{41}$

е) $5x^{30} \equiv 37 \pmod{41}$

ЗАНЯТИЕ № 13. Контрольная работа

ЗАНЯТИЕ №14. Рациональные числа

Задания для самостоятельного решения:

1. Доказать, что число рационально

а) $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$ в) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

б) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$ г) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+2\sqrt{6}$

д) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ е) $(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}})\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

2. Перевести из десятичной в систему с основанием g

а) 634,36 , g = 8 б) 52,37, g = 8
в) 36,6, g = 2 г) 156,5, g = 2
д) 52,21, g = 16 е) 812,32, g = 16

3.Представьте смешанную периодическую дробь в виде несократимого отношения двух целых чисел

а) 0, 233(37) б) 9, (387)
в) 11, (459) г) 7, 4(099)

ЗАНЯТИЕ №15. Действительные числа. Дальнейшие расширения

Задания для самостоятельного решения:

1. Доказать, что число иррационально:

а) $\sqrt{2}$, б) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{5}$; в) cos 10^0; г) $\log_7 6$; д) tg 5^0

2. (д/з)

а) $\sqrt{3}$, б) $\sqrt{4+\sqrt{5}}$; в) cos 20^0; г) $\log_2 3$; д) ctg 10^0

2. Дан кватернион q = 2 + 3*i* – 5*j* + *k*. Найти:

а) $q+\bar{q}$; б) $q-\bar{q}$; в) $q\cdot\bar{q}$.

2. Найти обратный кватернион к кватерниону $q = 1 + i + k$.

3. Найти левые и правые частные от деления кватерниона j + 2k на кватернион $1 + i + k$.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Смолин Ю.Н. Числовые системы. – М.: Флинта, 2021. – 112 с («университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=54576).

2. Веселова, Л. В. Алгебра и теория чисел: учебное пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. – Казань : Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2014. – 107 с. : ил. – Режим доступа. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428287)

3. Михалева, М. М. Алгебра и теория чисел : учебное пособие / М. М. Михалева, Б. М. Веретенников. – Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. – Часть 1. – 51 с. – Режим доступа: – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276012

Дополнительная литература

1. Смолин, Ю.Н. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие / Ю.Н. Смолин. — 5-е изд., стер.—Москва : ФЛИНТА, 2017. — 464 с. - ISBN 978-5-9765-0050-1. - Текст : электронный. (URL: https://znanium.com/catalog/product/1034573) https://znanium.com/read?id=342728
2. Данилова Т. В. Теория чисел : Задачи с примерами решений; учебное пособие / Т.В. Данилова. - Архангельск : САФУ, 2015. - 104 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436368
3. Дадаян А.А. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=397662)

Интернет-ресурсы

http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал