Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
25 июня 2021 г.

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ И МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Программа учебной дисциплины Предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика.

(очная форма обучения)

Составитель: Гришина С.А., доцент кафедры высшей математики
Череватенко О.И., доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Основания геометрии и методы изображений» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Информатика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Аналитическая геометрия на плоскости», «Аналитическая геометрия в пространстве» «Алгебра и теория чисел», школьного курса математики.

Результаты изучения дисциплины являются теоретической и методологической основой для изучения дисциплин: «Основания геометрии и методы изображений», «Проективная геометрия», «Теоретический и прикладной математический анализ», «Теория и методика обучения математике», «Элементарная математика», а также спецкурса «Дополнительные вопросы алгебры и геометрии», для прохождения практик «Учебная (научно-исследовательская работа, получение первичных навыков научно-исследовательской работы) Курсовая работа №1» и итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целями освоения дисциплины «Основания геометрии и методы изображений» являются

- раскрытие значение геометрии, углубление представления о месте геометрии в изучении окружающего мира;
- изучение основных разделов геометрии и воспитание общей геометрической культуры, необходимой будущему учителю для понимания как основного курса математики, так и школьных факультативных курсов;
- способствовать развитию пространственного мышления.

Задачей освоения дисциплины является развитие умения самостоятельной работы с математической литературой, курс «Основания геометрии и методы изображений» должен дать студентам знания, навыки и умения, необходимые для успешного изучения других разделов математики

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Основания геометрии и методы изображений» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11 Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной			

области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования ПК-11.1. Знает основные научные понятия и особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач.	ОР-1 Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области.		
ПК-13. Способен соотносить основные этапы развития предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) с ее актуальными задачами, методами и концептуальными подходами,	ОР-3 Знает основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов		

тенденциями и перспективами ее современного развития. ПК-13.1. Знает основные этапы исторического развития предметной области.			

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
3	4	144	24	40		53	экзамен
Итого:	4	144	24	40		53	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
3 семестр				
Преобразования плоскости и пространства	4	6		8
Геометрические построения	2	10		8

Методы изображений	4	4		8
Основания геометрии. Общие вопросы аксиоматики	4			8
Исторический обзор обоснования геометрии	4			8
Обоснование евклидовой геометрии по Вейлю	4			8
Измерение скалярных величин	2			5
Задачи по планиметрии		20		
Итого по 3 семестру	**24**	**40**	**-**	**53**
Всего по дисциплине:	**24**	**40**	**-**	**53**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса (3 семестр)

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА.

Преобразования, примеры. Группа преобразований, подгруппа группы преобразований.

Движение плоскости. Примеры. Аналитическое выражение движения. Осевая симметрия, разложение движений в произведение осевых симметрии. Классификация движений плоскости. Группа движений плоскости и ее подгруппы

Преобразования подобия. Аналитическое выражение. Гомотетия. Подобие как произведение гомотетии на движение. Группа преобразований подобия плоскости и ее подгруппы.

Аффинные преобразования. Аналитическое выражение. Группа аффинных преобразований плоскости и ее подгруппы. Теоретико-групповой принцип построения геометрии.

Преобразования пространства.

II. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ.

Аксиоматика конструктивной геометрии. Основные построения и основные задачи. Методы решения задач на построение.

III. МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Параллельное проектирование. Изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции. Изображение окружности и сферы. Понятие о методе Монжа.

Аксонометрия. Теорема Польке-Шварца. Изображение прямых и плоскостей. Полные и неполные изображения, их применение при изучении стереометрии. Позиционные и метрические задачи.

IV. ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИКИ

Понятие об аксиоматическом методе. Понятие об интерпретации (модели) системы аксиом. Непротиворечивость, независимость и полнота системы аксиом проективной геометрии.

V. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ОБОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика системы Евклида. Пятый постулат. Предложения, эквивалентные пятому постулату.
Предшественники и творцы неевклидовой геометрии (Саккери, Ламберт, Лежандр, Гаусс, Больяи, Н И. Лобачевский).
Аксиома Лобачевского. Основные факты геометрии Лобачевского. Система аксиом Гильберта (обзор).

VI. ОБОСНОВАНИЕ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО ВЕЙЛЮ

Непротиворечивость и полнота системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Определение прямых, плоскостей, лучей, отрезков, углов. Примеры доказательств некоторых теорем.
Аксиоматика школьного курса геометрии.

VII. ИЗМЕРЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН

Длина отрезка, аксиомы. Теорема существования и единственности. Площадь многоугольника, аксиомы. Теорема существования и единственности. Равновеликость и равносоставленность. Теория объемов (обзор).

VIII. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Линии и замечательные точки в треугольнике. Окружности. Метод вспомогательного элемента в решении задач.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

ОС-1. *Темы рефератов*

1. Решение задач стереометрии в пространстве Лобачевского.
2. Планиметрия на плоскости Лобачевского.
3. Геометрия на сфере.

…

ОС-2. Самостоятельная работа
вариант

1. Построить отрезок, равный данному.
2. По данным отрезка а, в и с постройте отрезок, длина которого выражается следующей формулой: 1) $x = \sqrt{a b + a c^2 / b}$; 2) $x = \sqrt{c \cdot a^2 + 2 b^2 / a + b}$;
3) $x = \sqrt{a c / b \sqrt{2 a^2 + c^2}}$.
3. ГМТП, из которых заданный отрезок виден под прямым углом, => окружность, построенная на отрезке АВ, как на диаметре.

ОС-3. Контрольная работа

1. Данный эллипс представляет параллельную проекцию окружности. Постройте проекции правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника, вписанных в окружность, приняв произвольно выбранную точку эллипса за одну из вершин многоугольника.
2. Треугольник АВС служит изображением равнобедренного треугольника $A_1B_1C_1$ у которого $A_1C_1 = B_1C_1$ и высота равна основанию. Постройте изображение:
   1) центра описанной окружности. 2) центра вписанной окружности.
3. Построить сечение правильной пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки М и Р на боковых ребрах призмы, не принадлежащие одной грани, и точку К на боковой грани, не содержащей указанных ребер.
4. Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, заданной следом, не пересекающим основания призмы и точкой, лежащей в плоскости верхнего основания призмы.
5. Через точку М в основании шестиугольной пирамиды ОАВСДЕН проведена плоскость, параллельная боковой грани ОАН. Построить сечение пирамиды этой плоскостью (за точку М взять центроид треугольника АВН).
6. Построить сечение пятиугольной призмы $АВСДЕА_0В_0С_0Д_0Е_0$ плоскостью, проходящей через точку М на ребре $С_0Д_0$ а параллельно прямым $С_0Е_0$ и $А_0Е_0$.
7. Через точку $М_0$ на ребре $А_0В_0$ куба $А_0В_0С_0Д_0АВСД$ провести сечение перпендикулярно диагонали $АС_0$.

8. В кубе $A_0B_0C_0Д_0ABCД$ точка M середина ребра AA_0, точка P делит отрезок BB_0 в отношении 1:2 (считая от вершины B). Как выбрать точку K на ребре CC_0, чтобы в сечении куба плоскостью MPK получился: а) параллелограмм, б) ромб, в) прямоугольник, г) квадрат? Построить эти сечения.
9. Основанием пирамиды SABCД является квадрат, а ее ребро SA перпендикулярно плоскости основания и SA = AB. На ребрах SB и SC взяты соответственно точки K и L такие, что
10. SK : SB = 1 : 4 и SL : SC = 3 : 4. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую KL перпендикулярно плоскости SBC.
11. Дан прямой круговой конус. Задайте секущую плоскость так, чтобы в сечении конуса получился: а) эллипс, б) парабола, в) гипербола и построить эти сечения

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 1. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 12 с..
2. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 2. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 11 с..
3. Прокопьев Г.С., Салдаева Г.В. Методические указания и контрольная работа № 1 по теме «Геометрия на плоскости». Для студентов – заочников 1 курса физико-математического факультета.- Ульяновск, 1996. (Библиотека УлГПУ).
4. Прокопьев Г.С., Череватенко О.И. Методические рекомендации и контрольная работа № 2 по теме «Геометрия в пространстве». Для студентов – заочников 2 курса физико-математического факультета .- Ульяновск, 2010. (Библиотека УлГПУ).
5. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 3. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 112 с..
6. Куренева Т.Н. Методические указания и контрольная работа № 3 по теме «Методы изображений. Проективная геометрия». Для студентов – заочников 3 курса физико-математического факультета .- Ульяновск, 2004. (Библиотека УлГПУ).

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Защита реферата ОС-2 Самостоятельная работа ОС-3 Контрольная работа	ОР-1 Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области. ОР-3 Знает основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-4 экзамен в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-4 Экзамен в форме устного собеседования по вопросам

Перечень вопросов к экзамену (3 семестр)

1. Отображение и преобразование множеств. Группа преобразований множества. Подгруппа группы преобразований.
2. Движение плоскости, определение. Примеры движений: перенос, поворот, симметрия.

3. Движение плоскости. Свойства движений общего вида.
4. Аналитическое выражение движений. Классификация движений.
5. О разложении движений в произведении осевых симметрий.
6. Преобразование гомотетии.
7. Преобразование подобия. Теорема о разложении подобия. Аналитическое выражение подобия. Группа преобразований подобия.
8. Аффинные преобразования плоскости. Аналитическое выражение. Частные виды аффинных преобразований.
9. Группа переносов пространства.
10. Вращение пространства вокруг оси, вокруг точки.
11. Аксиоматика конструктивной геометрии. Основные построения и основные задачи.
12. Схема решения задачи на построение. Методы решения задач на построение.
13. Основные замечательные множества точек на плоскости. Построение их циркулем и линейкой. Метод пресечения множеств.
14. Метод геометрических преобразований.
15. Алгебраический метод решения задач на построение.
16. Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой, примеры.
17. Параллельное проектирование и его свойства.
18. Изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.
19. Основы метода Монжа. Изображение точек, прямых и плоскостей. Решение позиционных задач.
20. Аксонометрические проекции. Теорема Польке-Шварца.
21. Полные и неполные изображения. Решение основных позиционных задач на полном изображении.
22. Понятие об аксиоматическом методе. Понятие об интерпретации (модели) системы аксиом.
23. Требования, предъявляемые к системе аксиом: непротиворечивость, независимость, полнота.
24. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика «Начал».
25. Проблема пятого постулата.
26. Н.И. Лобачевский и его геометрия. Аксиома Лобачевского.
27. Система аксиом Гильберта.
28. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского.
29. Непротиворечивость геометрии Лобачевского. Независимость пятого постулата от остальных аксиом Гильберта.
30. Аксиоматика Вейля евклидовой геометрии.
31. Непротиворечивость системы аксиом Вейля.
32. Полнота системы аксиом Вейля трехмерного пространства.
33. Определение прямых, лучей, отрезков, плоскостей, углов. Доказательство некоторых теорем планиметрии и стереометрии.
34. Определение длины отрезка. Теорема существования и единственности.
35. Понятие площади многоугольника. Теорема существования и единственности.
36. Равновеликость и равносоставленность многоугольников. Теорема Бояи-Гервина.
37. Теория объемов (обзор).

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
3 семестр	Разбалловка по видам работ	12 х 1= 12баллов	20 х 1=20 баллов	272 балла	96 баллов
	Суммарный макс. балл	12 баллов max	32 балла max	304 балла max	400 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 3 семестра

Оценка	**Баллы (4 ЗЕ)**
«отлично»	361-400
«хорошо»	281-360
«удовлетворительно»	201-280
«неудовлетворительно»	200 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение

работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий (3 семестр)

Занятие 1,2. Преобразования плоскости. Движения. Движения первого и второго рода. Формулы движений. Применение к решению задач.

1. Существует ли: параллельный перенос, поворот, симметрия, - отображающие: а) прямую на себя;
   б) пару параллельных прямых на себя;
   в) один отрезок на другой отрезок;
   г) луч на сонаправленный с ним;
   д) пару пересекающихся прямых на себя;
   е) точку А на точку В.

2. Параллельный перенос задан парой соответствующих точек М(1;-3) и М´(7;0). Записать формулы параллельного переноса и найти образ прямой 2x +3y-2=0.

3. Параллельный перенос задан формулами x' = x + 2, y' = y – 8. На прямой ℓ: 2x – 3y – 7 = 0. Найти точку, которая при данном переносе попадает на прямую m: 7x – y + 5 = 0.

4. Даны два равных непараллельных отрезка АВ, А'В' и прямая ℓ. Построить образ прямой ℓ при повороте, переводящим точки А и В соответственно в точки А' и В'.

5. На прямых ℓ: x+2y-8=0 и m: 5x-3y+1=0. Найдите точки, симметричные относительно начала координат.

6. Даны две различные точки В, В' и прямая ℓ. Построить образ прямой ℓ при осевой симметрии. для которой точки В, В' являются соответствующими.

7. Найти координаты образа точки А (1, 1) при скользящей симметрии, при которой точка О (0, 0)и В (1, 2), переходящие соответственно в точки О' (2, 5) и В' (4, 4).

8. Составить формулы движения первого рода, при котором прямая x - y= 0 является образом прямой x - y - 4 = 0, а точка А (2, 0) – инвариантна.

9. Выяснить, какие из данных формул являются формулами движений. Определить вид движения.

а) x' = ¾ x – 4/5y + 1 б) x' = 2 x + y + 1 в) x' = - x + 2
y' = 4/5x + 3/5y - 1 y' = x + 2 y' = - y - 4

1. В трапеции АВСД точки О и М середины отрезков АС и СД соответственно. Построить образ Δ ВСМ при композиции преобразований $S_{AB}° T_{BA} ° Z_O$.

Занятие 3. Преобразования плоскости. Подобие и гомотетия.

1. Существует ли гомотетия, отображающая: а) одну из двух пересекающихся (параллельных) прямых на другую; б) луч в ему сонаправленный (противоположно направленный); в) окружность на неравную ей окружность.
2. Каким преобразованием является произведение двух гомотетий с общим центром (с различными центрами)?
3. Какое из данных преобразований является подобием:
   $x'=3x-4y+1$ $x'=8x+y+3$
   $y'=4x+3y-2$ $y'=x+8y-3$
4. Найти координаты образа точки А (2;-4) при гомотетии с центром С (1;-8) и коэффициентом к = - 3.
5. Найти центр и коэффициент гомотетии отображающего точки А(-2;1), В(2;-1) соответственно в точки А'(6;5), В'(6,11).

6. АВСД – трапеция, М и К – середины отрезков СД и ВД соответственно, О- точка пересечения диагоналей. Построить образ четырехугольника КМСО при композиции преобразований $S_{AB}° R^{60}{}_{A}° T_{CB} ° H^{2}{}_{D}$.
7. Доказать, что если A_1,B_1,C_1 – середины сторон треугольника АВС, то треугольник АВС гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$.
8. В АВСД точки $A_1,B_1,C_1,Д_1$ – центры тяжести треугольников ВСД, СДА, ДАВ, АВС соответственно. Найти площадь четырехугольника $A_1B_1C_1Д_1$, если $S_{АВСД}$=Р.
9. Доказать, что точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения продолжения боковых сторон лежат на прямой, проходящей через середины оснований трапеции.

Занятие 4,5. Построения циркулем и линейкой.

1. На плоскости нарисована окружность, но центр ее не отмечен. Постройте его.
2. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.
3. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.
4. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.
5. Проведите касательную к окружности, проходящую через данную точку вне окружности.
6. Проведите общую касательную к двум данным окружностям.
7. Дан отрезок длины a и натуральное число n. Построить отрезок длины .
8. Дан отрезок длины a и натуральные числа m и n. Построить отрезок длины m/n a.
9. Даны отрезки с длинами a, b, c. Построить отрезок, длина которого равна ab/c.
10. Даны отрезки с длинами a и b. Построить отрезок длины .
11. Дан угол. Внутри угла найти точку, находящуюся на заданных расстояниях от сторон угла.
12. Построить треугольник по стороне, опущенной на нее высоте и радиусу описанной окружности. Сколько получится треугольников?
13. В данном треугольнике провести прямую, параллельную основанию так, чтобы сумма отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием, была равна основанию.
14. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Провести прямую, пересекающую отрезок AC в точке X, а отрезок BC — в точке Y таким образом, что AX = XY = YB.

Занятие 6,7. Построение двусторонней линейкой.

1. Постройте центр данной окружности с помощью двусторонней линейки, если известно, что ширина линейки меньше диаметра окружности.
2. Даны угол AOB, прямая l и точка P на ней. С помощью одной двусторонней линейки проведите через точку P прямые, образующие с прямой l угол, равный углу AOB.
3. Даны отрезок AB, непараллельная ему прямая l и точка M на ней. С помощью одной двусторонней линейки постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса AB с центром M.
4. Даны прямая l и отрезок OA, параллельный l. С помощью одной двусторонней линейки постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса OA с центром O.
5. Даны отрезки O_1A_1 и O_2A_2. С помощью одной двусторонней линейки постройте радикальную ось окружностей радиуса O_1A_1 и O_2A_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно.
6. Выполните построения с помощью линейки с двумя параллельными краями (двусторонней линейки) без циркуля.

   а) Постройте биссектрису данного угла AOB.

б) Дан острый угол АОВ. Постройте угол ВОС, биссектрисой которого является луч ОА.

7. С помощью одной двусторонней линейки восставьте перпендикуляр к данной прямой l в данной точке А.

8. С помощью одной двусторонней линейки:

а) через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой;

б) постройте середину данного отрезка.

9. Дана линейка постоянной ширины (т.е. с параллельными краями) и без делений. Постройте биссектрису данного угла.

10. Разделите данный отрезок пополам с помощью линейки с параллельными краями и без делений.

Занятие 8. Построение линейкой с эталоном длины.

1. Соединить две точки прямою и найти точку пересечения двух прямых в случае, если эти прямые непараллельны.
2. Отложить данный отрезок на данной прямой от некоторой точки.
3. Данный угол отложить при данной прямой или построить прямую, пересекающую данную прямую под данным углом.
4. Через данную точку провести параллельную к данной прямой .
5. К данной прямой провести перпендикуляр.

Занятие 9, 10. Параллельное проектирование. Изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.

Цель: Основные факты параллельной геометрии; изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.

1. Постройте параллельную проекцию равностороннего треугольника. В нем изобразите:

а) среднюю линию;

б) радиус вписанной окружности;

в) радиус описанной окружности.

2. Дано изображение ромба. Найдите изображение его высоты, если острый угол ромба равен 60°.

3. Дано изображение треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около данного треугольника.

4. Дано изображение равнобедренного треугольника, в котором боковая сторона в два раза больше его основания. Постройте изображения всех его замечательных точек.

5. Постройте параллельную проекцию фигуры, являющуюся объединением квадрата и равностороннего треугольника, имеющих общую сторону.

6. Постройте изображение окружности с заданным радиусом.

Домашнее задание.

1. Постройте параллельную проекцию квадрата. В нем изобразите:

а) радиус вписанной окружности;

б) Радиус описанной окружности;

в) перпендикуляр, проведенный из вершины А на прямую DM, где М – середина стороны АВ.

2.Дано изображение треугольника АВС, одна сторона АВ которого равна 10см., а другая сторона АС – 8см. Постройте изображение биссектрисы данного треугольника, проведенной из вершины А.

3. Постройте параллельную проекцию квадрата, вписанного в правильный треугольник.

Занятие 11, 12. Треугольники. Сумма углов треугольника. Замечательные точки и линии треугольника. Теорема Пифагора. Признаки равенства треугольников.

На занятии систематизируются знания учащихся о треугольниках и его высотах, его медианах, учащиеся формулируют и доказывают теоремы о точке пересечения медиан, о подобии треугольников, выводят формулу нахождения медианы треугольника, если известны его стороны, формулируют и доказывают теоремы о точке пересечения высот, о подобии треугольников, образованных высотой, опущенной и вершины прямого угла данного треугольника; выводят формулу нахождения высоты треугольника, если известны его стороны; знакомятся с минимальным свойством треугольника.

Теорема. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
Замечание: В случае тупоугольного треугольника основания его высот находятся на продолжениях сторон, прилежащих к тупому углу:
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется ортоцентром.
Определение 2. Треугольник, образованный основаниями высот треугольника, называется ортоцентрическим.
Задания:
1. Доказать, что для произвольного треугольника АВС верно равенство: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$, где r - радиус вписанной в треугольник окружности.

2. Пусть О, Q, М и Н – соответственно центры описанной, вписанной окружностей, точка пересечения медиан и точка пересечения высот треугольника АВС. Докажите, что если две любые из этих точек совпадают, то этот треугольник – равносторонний.

3. Высоты остроугольного треугольника АВС пересекаются в точке О, а на отрезках ОВ и ОС выбраны точки B^1 и C^1, для которых $\angle AB^1C = = \angle AC^1B = 90°$. Доказать, что $AB^1 = AC^1$.
(Зарубежные математические олимпиады: Нью-Йорк, 76).

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется центроидом.
1. Длина медианы треугольника выражается формулой
$m_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}}$,
где a, b, c – длины сторон треугольника.

2. Для всякого треугольника выполняется соотношение:
$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

4. m_a, m_b и m_c – медианы треугольника. Докажите, что если $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{27R^2}{4}$, то треугольник равносторонний, где R – радиус описанной окружности.

Теорема. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется инцентром.

5. Пусть l_a, l_b, l_c – биссектрисы треугольника, p – его полупериметр. Докажите, что если
$l^2_a + l^2_b + l^2_c = p^2$, то треугольник равносторонний.

6. Дан ΔABC. Биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 его внутренних углов пересекаются в точке O. Известно, что треугольники AOB_1 и AOC_1 симметричны относительно прямой AO, треугольники A_1OB и BOC_1 – относительно BO, а треугольники A_1OC и B_1OC – относительно OC. Доказать, что ΔABC – равносторонний.

Домашнее задание.
1. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B и C , для которых AB C = = AC B = . Доказать, что AB = AC .
2. Треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника. (Всероссийская олимпиада, 1964г.(Москва)).
3. Пусть m_a, m_b, m_c – медианы треугольника, а h_a, h_b, h_c – его высоты. Докажите, что если $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} = 3$, то треугольник равносторонний.

Занятие 13. Параллелограмм. Трапеция.

1. На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника ABCD отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что AM = CP, BN = DQ, BM = DP, NC = QA. Докажите, что ABCD и MNPQ — параллелограммы.

2. Пусть M — середина стороны BC параллелограмма ABCD. В каком отношении отрезок AM делит диагональ BD?

3. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60o. Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие через середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.

4. Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

5. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 41, высота равна 40 и средняя линия равна 45. Найдите основания.

6. Середину более длинной боковой стороны прямоугольной трапеции соединили с вершинами трапеции. При этом трапеция разделилась на три равнобедренных треугольника. Найдите величину острого угла трапеции.

Домашнее задание.
1. Два различных параллелограмма ABCD и A1B1C1D1 с соответственно параллельными сторонами вписаны в четырехугольник PQRS (точки A и A1 лежат на стороне PQ, B и B1- на QR и т. д.). Докажите, что диагонали четырехугольника параллельны сторонам параллелограммов.

2. В трапеции ABCD с основаниями AB = a и CD = b проведён отрезок A1B1, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции проведён отрезок A2B2, тоже соединяющий середины диагоналей, и так далее. Может ли в последовательности длин отрезков AB, A1B1, A2B2,... какое-то число встретиться дважды? Является ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей)? Стремится ли она к какому-нибудь пределу?

3. Основания трапеции равны a и b (a > b). Отрезки, соединяющие середину большего основания с концами меньшего основания, пересекают диагонали трапеции в точках M и N. Найдите MN.

Занятие 14, 15. Четырехугольники.

1. Угол между сторонами AB и CD четырехугольника ABCD равен j. Докажите, что AD2 = AB2 + BC2 + CD2 – 2(AB · BCcos B + BC · CDcos C + CD · ABcos j).

2. Середины M и N диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника ABCD не совпадают. Прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках M1 и N1. Докажите, что если MM1 = NN1, то AD||BC.

3. Четырёхугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Найдите EF, если BC = 1.

4. Докажите, что если для вписанного четырехугольника ABCD выполнено равенство CD = AD + BC, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.

5. Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

6. Четырёхугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвёртого треугольника. Найдите площадь данного четырёхугольника.

Домашнее задание.

1. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что AB > BC > KC, BK = 4 + , а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найдите DC.

2. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что BC > AB > KC, KC = 6 + , а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 22 и 11. Найдите DC.

3. В трапеции основания равны a и b, диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен A. Найдите площадь трапеции.

Занятие 16, 17, 18. Окружность. Углы связанные с окружностью. Вписанный и описанный четырехугольник.

Основные сведения

1. Угол ABC, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют вписанным в окружность. Пусть O — центр окружности. Тогда

PABC = 1
2 PAOC,

если точки B и O лежат по одну сторону от AC, и PABC = 180° – 1
2 PAOC,

если точки B и O лежат по разные стороны от AC. Важнейшим и наиболее часто используемым следствием этого факта является то, что величины углов, опирающихся на равные хорды, либо равны, либо составляют в сумме 180°.

2. Величина угла между хордой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, равна половине угловой величины дуги AB.

3. Угловые величины дуг, заключенных между параллельными хордами, равны.

4. Как уже говорилось, величины углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме 180°. Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введем понятие «ориентированный угол между прямыми». Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD (обозначение: P(AB,CD)) будем называть величину угла. на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на n · 180°, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме 180° или, что по нашему соглашению то же самое, 0°).
Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:
а) P(AB,BC) = – P(BC,AB);
б) P(AB,CD) + P(CD,EF) = P(AB,EF);
в) точки A,B,C,D, не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда P(AB,BC) = P(AD,DC) (для доказательства этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки B и D лежат по одну сторону от AC; точки B и D лежат по разные стороны от AC).

ЗАДАЧИ

1.а) Из точки A, лежащей вне окружности, выходят лучи AB и AC, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла BAC равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

б) Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла BAC равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричного ему относительно вершины A.

2.Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC1 и PB1 на прямые AB и AC. Докажите, что PC1AP = PC1B1P.

1.Докажите, что если центр вписанной в четырехугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей, то этот четырехугольник- ромб.

2.Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. Докажите, что PAOB + PCOD = 180°.

3.Докажите, что если существует окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника ABCD, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника перпендикулярны.

4.Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Домашнее задание.

1Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

2.Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. В треугольнике AOB проведены высоты AA1 и BB1, а в треугольнике COD- высоты CC1 и DD1. Докажите, что точки A1,B1,C1 и D1 лежат на одной прямой.

3. Углы при основании AD трапеции ABCD равны 2a и 2b. Докажите, что трапеция описанная тогда и только тогда, когда BC/AD = tg atg b.

6. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если BC = 4, а AK = 6.

Домашнее задание.
1. В выпуклом четырёхугольнике ABCD известно, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD. Докажите, что ABCD — трапеция или параллелограмм.
2. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH, а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что треугольники MNC и ABC подобны.
3. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что его можно разрезать на два равных треугольника.

Занятие 19. Площадь фигур.

1. Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найдите угол CBD, если площади треугольников DCM и ACB относятся как 1:4.
2. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.
3. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника ABCD и пересекает сторону DC в единственной точке F и сторону BC в единственной точке E. Найдите площадь трапеции AFCB, если AB = 32, AD = 40 и BE = 1.
4. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

5. Два прямоугольника положены на плоскость так, что их границы имеют восемь точек пересечения. Эти точки соединены через одну. Доказать, что площадь полученного четырёхугольника не изменится при поступательном перемещении одного из прямоугольников.
6. На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника построены квадраты, расположенные вне треугольника. Вычислить площадь шестиугольника, вершины которого совпадают с теми вершинами квадратов, которые не принадлежат данному треугольнику. Длина гипотенузы c и сумма длин катетов s известны.

Домашнее задание.
1. Докажите, что площадь треугольника можно выразить по формуле S = (p - a)ra, где ra — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны, равной a, p — полупериметр треугольника.
2. В трапецию ABCD с основаниями BC и AD и боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром O. Найдите площадь трапеции, если угол DAB прямой, OC = 2, OD = 4.
3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в семь раз меньше площади четырёхугольника ABDE. Найдите хорду DE и радиус окружности, если AB = 4 и C = 45°.

Занятие 20 Контрольная работа.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Атанасян Л. С. Геометрия: в 2 ч.: учеб. пособие для физ. - мат. фак. пед. вузов / Л. С. Атанасян, Базылев, В. Т.; В. Т. Базылев. - 2-е изд., стер. - М.: КноРус, 2011. - Часть 1. - 396 с.: ил. - Список лит.: с. 391. (Библиотека УлГПУ).
2. Атанасян Л. С. Геометрия: в 2 ч.: учеб. пособие для физ. - мат. фак. пед. вузов / Л. С. Атанасян, Базылев, В. Т.; В. Т. Базылев. - 2-е изд., стер. - М.: КноРус, 2011. - Часть 2. - 422 с.: ил. - Список лит.: с. 417. (Библиотека УлГПУ).
3. Атанасян, С. Л. Сборник задач по геометрии : [в 2 ч.]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. вузов. Ч. 1. - М. : ЭКСМО, 2007. – 333. (Библиотека УлГПУ).
4. Атанасян, С. Л. Сборник задач по геометрии : [в 2 ч.]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. вузов. Ч. 2 - М. : ЭКСМО, 2008. (Библиотека УлГПУ).
5. Остыловский, А. Н. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. Н. Остыловский. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. - 92 с. - ISBN 978-5-7638-2196-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/443221
6. Ефимов Н.В. Высшая геометрия: учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, - 2011. - 585 с. (http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=544579)

Дополнительная литература

1. Атанасян С.Л., Базылев В.Т. Геометрия Ч. 1. – М.: Просвещение, 1986 – 335с. (Библиотека УлГПУ).
2. Атанасян С.Л., Базылев В.Т. Геометрия Ч. 2. – М.: Просвещение, 1987 – 351с. (Библиотека УлГПУ).
3. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. - 2-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с. (http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=515990)

Интернет-ресурсы

- http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал