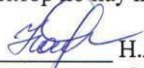


Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова»  
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования  
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной работе

  
Н.А. Ильина  
«30» августа 2016 г.

### ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Программа учебной дисциплины вариативной части  
для направления подготовки 01.06.01 Математика и механика  
Направленность (профиль): Вещественный, комплексный и функциональный анализ  
(очная и заочная форма обучения)

Составители:  
Штраус В.А., доктор физико-  
математических наук,  
Фолиадова Е.В., кандидат физико-  
математических наук

Рассмотрено и утверждено на заседании ученого совета факультета физико-  
математического и технологического образования  
(протокол от « 22 » июня 2016 г. № 9 ).

Ульяновск, 2016

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа дисциплины «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» составлена с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации), утверждённого приказом Министерством образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 года № 866 (зарегистрирован в Минюсте России 25.08.2014 № 33837), и с учебным планом.

**Цель дисциплины** «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» - ознакомление будущих научных работников и преподавателей математики с дополнительными (не входящими в программы педагогических университетов) разделами теории функций комплексной переменной, необходимыми при изучении различных разделов анализа и получении новых научных результатов в этой области.

**Задачи дисциплины:**

- 1) сформировать у аспирантов систему базовых понятий общей теории комплексных многообразий и их голоморфных отображений; углубить знание важнейших результатов теории функций комплексной переменной в сопоставлении их с соответствующими теоремами для функций действительной переменной; познакомить аспирантов с типичными для комплексного анализа принципами получения результатов и с возможностями их обобщения;
- 2) формировать умение проводить рассуждения, связанные с построением и исследованием римановых поверхностей многозначных функций комплексной переменной, с исследованием ветвей многозначных функций, с интегрированием по комплексным многообразиям, с интегральным определением многозначных функций, с оценками скорости роста функций, предельных значений функций на границе области и др.; совершенствовать умение применять аппарат комплексного анализа при решении задач различной природы;
- 3) развивать навыки использования геометрического языка в описании аналитических объектов, умение переводить утверждения с одного математического языка на другой;
- 4) подготовить аспирантов к восприятию результатов современных научных исследований в области комплексного и функционального анализа (монографий, статей в профильных научных журналах), к проведению собственных исследований и представлению их результатов.

### **Место дисциплины в структуре образовательной программы:**

Дисциплина «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» относится к вариативной части блока дисциплин (Б1.В.01) и изучается в шестом семестре при очной форме обучения, в восьмом семестре при заочной форме обучения.

### **Требования к усвоению дисциплины.**

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом и видами профессиональной деятельности, формируемыми в рамках ОПОП аспирантуры по профилю «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», аспирант должен обладать следующими компетенциями:

**общими профессиональными компетенциями:**

- способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);

### **профессиональными компетенциями:**

- готовность применять и самостоятельно пополнять знания о различных математических структурах, о типичных задачах математического анализа и методах их решения, о способах построения математических теорий и их развитии на протяжении истории математики (ПК-1).

В результате изучения курса аспирант должен:

#### **знать**

- базовые результаты вещественного, комплексного и функционального анализа вместе с их доказательствами;
- важнейшие результаты вещественного, комплексного и функционального анализа, включённые в программу кандидатского минимума по специальности 01.01.01, их связи с базовыми идеями и теоремами анализа;
- историю идей вещественного, комплексного и функционального анализа в её связи с современными подходами к введению понятий и получению фундаментальных результатов;
- границы применимости классических результатов и методов и возможности их модификации в более общих ситуациях;
- принципы применения вещественного, комплексного и функционального анализа к проблемам других разделов математики и её приложений;

#### **уметь**

- анализировать доказательства результатов вещественного, комплексного и функционального анализа, входящих в программу кандидатского минимума по специальности 01.01.01, выделять и осваивать соответствующие методы и приёмы рассуждений, воспроизводить основные этапы доказательств;
- решать типовые задачи вещественного, комплексного и функционального анализа;
- самостоятельно (с использованием математической литературы и сетевых источников) осваивать методы решения новых задач вещественного, комплексного и функционального анализа;
- выделять генезис, логику возникновения основных идей вещественного, комплексного и функционального анализа, их роль в построении теории, в том числе в других разделах математики;
- формулировать задачи исследовательского характера в области вещественного, комплексного и функционального анализа;

#### **владеть**

- языком и символикой вещественного, комплексного и функционального анализа, связанной с ними терминологией общей топологии, абстрактной алгебры, иных разделов математики;
- навыками чтения и понимания учебной и научной математической литературы по тематике, связанной с вещественным, комплексным и функциональным анализом и их приложениями;
- приёмами построения логических схем учебного материала различных разделов анализа;
- средствами пакетов компьютерной математики для визуализации результатов и решения других задач представления и обработки данных.

## Структура и содержание дисциплины «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы (72 часа): 2 часа – лекции, 10 часов практическая работа, 24 часа самостоятельной работы. Форма отчетности – экзамен.

№ п/п	Раздел дисциплины	Год обучения (очная/заочная форма)	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу аспирантов, и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (по неделям) Формы промежуточной аттестации (по итогам освоения дисциплины)
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	
1	2	3	4	5	6	7
1.	Тема 1. Вещественный анализ	3/4	2	2	8	Логические схемы учебного материала (ментальная карта темы) Презентации по теме
2.	Тема 2. Комплексный анализ			4	8	
3.	Тема 3. Функциональный анализ			4	8	
	Всего		2	10	24	Экзамен

### Содержание дисциплины

#### Вещественный анализ

**Меры, измеримые функции, интеграл.** Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

**Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования.** Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стильбеса.

**Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды.** Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства  $L_p$ , их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в  $L_2$  и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

**Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье.** Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования

Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье— Стильтьеса.

**Гладкие многообразия и дифференциальные формы.** Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа.

### Комплексный анализ

**Интегральные представления аналитических функций.** Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.

**Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты.** Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами.

**Целые и мероморфные функции.** Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг—Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

**Конформные отображения.** Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолиственности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

**Аналитическое продолжение.** Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля—Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара.

**Гармонические функции.** Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

### Функциональный анализ

**Метрические и топологические пространства.** Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.

**Нормированные и топологические линейные пространства.** Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха—Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах  $C$  и  $L_p$ . Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

**Линейные функционалы и линейные операторы в банаховых пространствах.** Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство.

Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма.

**Основные принципы функционального анализа в банаховых пространствах.** Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности). Теорема Банаха об обратном операторе и принцип открытых отображений. Замкнутые операторы. Теорема о замкнутом графике. Замыкание линейного оператора.

**Банаховы алгебры.** Банахова алгебра с единицей. Обратимые элементы, группа обратимых элементов как открытое множество. Идемпотенты. Разложение элементов в ряды. Резольвента и резольвентное множество элемента банаховой алгебры. Спектр элемента, преобразование спектра при полиномиальных отображениях. Аналитические функции (комплексной переменной) со значениями в банаховой алгебре. Непустота спектра элемента в банаховой алгебре с единицей. Алгебра функций, аналитических в окрестности спектра, интеграл Данфорда. Разложение функций в степенные ряды. Спектральный радиус элемента. Спектральное разложение. Применение к алгебрам ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве. Применение к интегральным операторам и теории линейных интегральных уравнений.

**Гильбертовы пространства и линейные операторы в них.** Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов.

**Спектральная теория неограниченных операторов в гильбертовом пространстве.** Симметрические и изометрические операторы, преобразование Кэли. Нормальные операторы. Классификация точек спектра линейного оператора в гильбертовом пространстве, поле регулярности, спектры симметрических и изометрических операторов. Индексы дефекта симметрического (изометрического) оператора, максимальные симметрические (изометрические) операторы, расширения операторов в исходном гильбертовом пространстве и с выходом из исходного пространства. Ортопроекторы и проекторы. Обобщенные резольвенты и обобщенные спектральные функции симметрического оператора. Квазисамосопряженные расширения, семейства расширений, зависящие от спектрального параметра, формула для обобщенных резольвент. Характеристические функции изометрических и симметрических операторов. Применение к дифференциальным операторам. Применение к разностным операторам. Классическая степенная проблема моментов и ее решение.

**Дифференциальное исчисление операторов в банаховых пространствах.** Дифференцирование в банаховых пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона.

**Обобщенные функции.** Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем.

**Элементы выпуклого функционального анализа.** Выпуклые функционалы и монотонные операторы. Достаточные условия существования экстремума выпуклого функционала. Теорема Крейна-Мильмана. Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Применение к задачам наилучшего приближения.

## Образовательные технологии

Успешное освоение материала курса «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» предполагает большую самостоятельную работу аспирантов и руководство этой работой со стороны преподавателей. Основой методики преподавания дисциплины должен быть мыслительный подход в математическом образовании. При реализации курса используются элементы следующих образовательных технологий:

- продуктивное обучение (образовательный процесс направлен на самостоятельное реконструирование системы знаний по дисциплине);
- контекстное обучение (образовательный процесс погружён в контекст будущей преподавательской и/или исследовательской деятельности аспиранта);
- технология развития критического мышления (образовательный процесс опирается на рефлексивную работу с математическими текстами);
- технологии взаимообучения, кооперативного обучения (в различных организационных формах, в зависимости от численности группы), при возможности – с использованием принципов социально-психологического обучения.

Реализация указанных технологий предполагает использование исследовательских и проектных методов обучения, различных приёмов визуализации математического содержания, диалогических форм взаимодействия преподавателя и аспирантов, по возможности - групповых форм работы (групповые доклады, «мозговой штурм»). В процессе обучения широко применяются информационно-коммуникационные технологии, как для ресурсного поиска и обмена информацией, так и для презентации интеллектуальных и педагогических продуктов.

Поскольку содержание данного учебного курса может лишь затронуть основы вещественного, комплексного и функционального анализа как обширной и разветвленной математической дисциплины, лекционный курс должен иметь проблемный характер: вводить важнейшие объекты, формулировать основополагающие теоремы и приводить лишь отдельные примеры их доказательств, демонстрировать возможности приложения абстрактных понятий, в том числе на самых простых примерах. Предполагается вынесение существенной части теоретического материала за рамки лекционного курса для самостоятельной работы магистрантов, в том числе с выбором ими разделов для более глубокого изучения и самостоятельного обоснования части результатов. Самостоятельная работа должна включать самостоятельное придумывание «микротеорем», касающихся простых свойств изучаемых объектов, их доказательство или опровержение с помощью контрпримеров.

Итоговый контроль осуществляется в форме кандидатского экзамена по специальности 01.01.01. – Математический анализ.

Изучение дисциплины предполагает уверенное владение аспирантом основами математического анализа в широком смысле (включая теорию функций действительной переменной, теорию функций комплексной переменной, функциональный анализ) в объеме стандартных курсов математических специальностей классических университетов и освоение фрагментов этих математических дисциплин на более высоком уровне в рамках программы аспирантуры (Б1.В.02, Б1.В.03, Б1.В.10). При этом изучение дисциплины должно включать не только непосредственное рассмотрение вопросов, входящих в кандидатский минимум по специальности 01.01.01, но и систематизацию соответствующих базовых знаний. Предполагается самостоятельное освоение аспирантами основной части материала с последующим обсуждением важнейших вопросов с преподавателем. Основой для допуска аспиранта к кандидатскому экзамену должно быть продемонстрированное им понимание основных результатов всех разделов математического анализа, способность разобраться в их обоснованиях, умение выделить

систему связей между фрагментами материала, между действительным анализом, комплексным анализом и функциональным анализом, между математическим анализом и другими разделами математики. Для диагностики таких умений в качестве оценочных средств по дисциплине предлагается разработка ментальных карт и презентаций, представляющих указанные связи.

Во время самостоятельной работы обучающиеся обеспечены доступом к базам данных и библиотечным фондам, а также доступом к сети Интернет.

### Фонд оценочных средств

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости,  
для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

№ п/п	КОНТРОЛИРУЕМЫЕ МОДУЛИ, РАЗДЕЛЫ (ТЕМЫ) ДИСЦИПЛИНЫ	НАИМЕНОВАНИЕ ОЦЕНОЧНОГО СРЕДСТВА	КОД ФОРМИРУЕМОЙ КОМПЕТЕНЦИИ <i>общепрофессиональные компетенции (ОПК):</i>	КОД ФОРМИРУЕМОЙ КОМПЕТЕНЦИИ <i>профессиональные компетенции (ПК):</i>
			ОПК-1	ПК- 1
1	Тема 1. Вещественный анализ	Терминологический диктант  Ментальная карта  Презентация		
2	Тема 2. Комплексный анализ			
3	Тема 3. Функциональный анализ.			
		НАИМЕНОВАНИЕ ОЦЕНОЧНОГО СРЕДСТВА	ОС 1-6	ОС 1-6

#### ОС-1: Терминологический диктант

**Задание:** Дать определения основных понятий, привести формулировки основных результатов по темам «Меры, измеримые функции, интеграл», «Метрические и топологические пространства», «Нормированные и линейные топологические пространства», «Линейные операторы в банаховых пространствах», «Линейные операторы в гильбертовых пространствах» (конкретный список понятий и теорем предъявляется преподавателем). Аспиранту рекомендуется предварительно составить глоссарий соответствующих разделов, обращая особое внимание на наличие в математической литературе различных подходов к введению основных понятий данных разделов, например, понятий меры Лебега и интеграла Лебега, а также на различие определений одноимённых понятий в рамках различных математических структур (например, понятие компакта в метрическом и в топологическом пространстве).

#### ОС-2: Логическая схема материала (ментальная карта темы)

**Задание:** Разработать представление содержания материала тем «Интегрирование и дифференцирование» (вещественный анализ), «Интегральные представления аналитических функций» (комплексный анализ) в виде ментальной карты с помощью одного из сервисов создания ментальных карт. Отрастить в схеме внутренние связи учебного материала, параллели и различия между двумя темами, а также связи материала с иными разделами вещественного и комплексного анализа. К отдельным точкам карты прикрепить текстовые документы, содержащие доказательства важнейших результатов, при необходимости – примеры решения типовых задач. Разрешается использовать карты, разработанные аспирантом при освоении дисциплин Б1.В.ОД.02 и Б1.В.ОД.10.



Ментальная карта представляется в электронном виде и хранится в портфолио аспиранта.

**ОС-3: Логическая схема материала (ментальная карта темы) с элементами конспекта**

Задание: Разработать представление содержания материала тем «Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды», «Тригонометрические ряды и преобразование Фурье» (вещественный анализ) в виде ментальной карты с помощью одного из сервисов создания ментальных карт. Отобразить в схеме внутренние связи учебного материала, связи между двумя темами, а также связи материала с иными разделами вещественного и комплексного анализа. Ко всем точкам карты, отражающим теоремы раздела, прикрепить текстовые документы, содержащие доказательства этих результатов, при необходимости – примеры решения типовых задач. Разрешается использовать карты и конспекты, разработанные аспирантом при освоении дисциплины Б1.В.ОД.02.

Ментальная карта представляется в электронном виде и хранится в портфолио аспиранта.

**ОС-4: Презентация по темам «Гладкие многообразия и дифференциальные формы», «Конформные отображения»**

Задание: Разработать презентацию с помощью выбранных программных средств, отразив в ней основное содержание указанных тем из вещественного и комплексного анализа. Рекомендуется обратить особое внимание на общее и различия в свойствах и строении вещественных и комплексных многообразий (например, кривых в многомерных пространствах и римановых поверхностей) и их морфизмов. Презентация должна содержать, в частности, описание общих свойств конформных отображений, основные этапы их доказательств, а также примеры построения касательных многообразий к заданным гладким вещественным многообразиям и конформных отображений заданных комплексных областей. Изображения вещественных кривых и поверхностей, а также римановых поверхностей должны быть построены с использованием компьютерных сред. Разрешается использовать презентации и конспекты, разработанные аспирантом при освоении дисциплины Б1.В.ОД.02, Б1.В.ОД.10.

Презентация представляется в электронном виде и хранится в портфолио

**ОС-5: Презентация по темам «Метрические и топологические, нормированные и линейные топологические пространства. Банаховы алгебры»**

Задание: Разработать презентацию с помощью выбранных программных средств, отразив в ней основное содержание указанных тем. Презентация должна содержать определения всех названных математических структур, примеры, по возможности с графическими иллюстрациями, определения базовых для каждой из структур понятий (желательно в виде схем, таблиц и др.), а также формулировки и идеи доказательства основных результатов.

Презентация представляется в электронном виде и хранится в портфолио аспиранта.

**ОС-6: Логическая схема материала (ментальная карта темы)**

Задание: Разработать представление содержания материала тем «Дифференциальное исчисление операторов в нормированных пространствах», «Элементы выпуклого анализа в банаховых пространствах» в виде ментальной карты с помощью одного из сервисов создания ментальных карт. Отобразить в схеме внутренние связи учебного материала, а также аналогии с классическим (многомерным) анализом и отличия от конечномерного случая, связи с классическим вариационным исчислением. К

отдельным точкам карты прикрепить текстовые документы, содержащие доказательства важнейших результатов, при необходимости – примеры решения типовых задач. Разрешается использовать карты, разработанные аспирантом при освоении дисциплины Б1.В.03.

Ментальная карта представляется в электронном виде и хранится в портфолио аспиранта.

## **Вопросы к кандидатскому экзамену по специальности 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ**

### **Общая часть**

#### **Раздел 1. Вещественный анализ**

1. Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения.
2. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина.
3. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана.
4. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.
5. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением.
6. Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима.
7. Интеграл Стильбеса.
8. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства  $L_p$ , их полнота.
9. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в  $L_2$  и равенство Парсеваля.
10. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.
11. Условие сходимости ряда Фурье. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Представление функций сингулярными интегралами.
12. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля.
13. Преобразование Лапласа.
14. Преобразование Фурье—Стилтьеса.
15. Гладкие многообразия. Касательное пространство к многообразию в точке.
16. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал.
17. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа.

#### **Раздел 2. Комплексный анализ**

18. Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры).
19. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца.
20. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.
21. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши.
22. Нули аналитических функций. Теорема единственности.

23. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов.
24. Принцип аргумента. Теорема Руше.
25. Приближение аналитических функций многочленами.
26. Целые функции. Порядок и тип целой функции.
27. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение.
28. Целые функций конечного порядка, теорема Адамара.
29. Мероморфные функции, теорема Миттаг—Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.
30. Конформные отображения первого и второго рода. Голоморфные функции как конформные отображения областей. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения и диффеоморфизмы.
31. Принцип сохранения области при конформном отображении. Теорема об открытом отображении. Голоморфность функции, обратной к голоморфной инъективной функции.
32. Критерии однолиственности функции комплексной переменной. Теорема Римана. Принцип соответствия границ при конформных отображениях.
33. Понятие аналитического продолжения вдоль кривой. Росток голоморфной функции в точке. Аналитическое продолжение. Полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса.
34. Понятие римановой поверхности аналитической функции. Примеры.
35. Теорема о монодромии.
36. Точки ветвления аналитических функций, порядок (индекс) точки ветвления, точки ветвления бесконечного порядка. Степень отображения.
37. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля—Шварца.
38. Модулярная группа. Модулярная функция.
39. Нормальные семейства голоморфных функций в области, в точке. Критерий нормальности семейства голоморфных функций (теорема Монделя). Теорема Пикара.

### **Раздел 3. Функциональный анализ**

40. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений.
41. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. Критерии компактности множеств в пространствах  $C$  и  $L_p$ .
42. Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха—Хана. Отделимость выпуклых множеств.
43. Топологические линейные пространства. Нормированные пространства. Теорема Банаха—Хана.
44. Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость.
45. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов.
46. Спектр и резольвента.
47. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма.
48. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств.
49. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах.
50. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов.

51. Неограниченные операторы в бесконечномерных гильбертовых пространствах.
52. Дифференцирование в банаховых пространствах. Сильный и слабый дифференциалы.
53. Производные и дифференциалы высших порядков.
54. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Экстремали.
55. Достаточные условия экстремума функционала. Выпуклые функционалы и существование экстремума.
56. Метод Ньютона.
57. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций.
58. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье.
59. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление).
60. Структура обобщенных функций с компактным носителем.

### Специальная часть

(формируется в соответствии с направлением исследований аспиранта, утверждается Советом факультета физико-математического и технологического образования по представлению кафедры высшей математики)

### Структура экзаменационного билета

**Вопрос №1:** Вещественный анализ.

**Вопрос №2:** Комплексный анализ.

**Вопрос №3:** Функциональный анализ.

**Вопрос №4:** Специальный вопрос (по направлению, связанному с исследованиями аспиранта).

### Критерии формирования экзаменационной отметки

№	Критерии	Отметка
1.	Аспирант демонстрирует уверенное владение всеми понятиями, относящимися к вопросу (теме, разделу), чётко формулирует основные результаты (теоремы), демонстрирует понимание логической конструкции и технических элементов доказательств, умеет устанавливать связи результатов со смежными темами, приводить примеры, иллюстрирующие абстрактные понятия. Речь грамотна и свободна, использует терминологию и символику соответствующего раздела математики и общематематические термины.	<b>«Отлично»</b>  5
2.	Аспирант в основном владеет понятиями, относящимися к вопросу (теме, разделу), формулирует основные результаты (теоремы), демонстрирует понимание логической конструкции доказательств; возможны отдельные затруднения или ошибки при воспроизведении технических элементов доказательства. Аспирант не во всех случаях умеет устанавливать связи результатов со смежными темами, возможны затруднения при иллюстрации некоторых абстрактных понятий примерами. Речь грамотна, использует терминологию и символику соответствующего раздела математики и общематематические термины; возможны некоторые погрешности в употреблении терминов или символики, не носящие принципиального характера.	<b>«Хорошо»</b>  4

3.	Аспирант недостаточно владеет понятиями, относящимися к вопросу (теме, разделу), не может сформулировать некоторые основные результаты (теоремы) либо формулирует их неверно, не в состоянии объяснить логическую конструкцию готового доказательства. Возможны принципиальные ошибки в употреблении терминов и/или символики раздела.	«Удовлетворительно»  3
4.	Аспирант не владеет материалом темы (раздела), не может дать определения основных понятий и сформулировать базовые результаты.	«Неудовлетворительно»  2

### Примечания:

- 1) При ответе на вопросы №№1-3 билета аспиранту разрешается пользоваться результатами его работы в рамках дисциплины в виде ментальных карт (ОС-2, ОС-3, ОС-6, ОС-9), презентаций (ОС-4, ОС-7), обзоров (ОС-8).
- 2) Специальный вопрос (№4) сообщается аспиранту за два дня до экзамена; по нему аспирант готовит план ответа, может подготовить презентацию для удобства изложения ответа.
- 2) Ответ на каждый из вопросов билета оценивается отдельно по пятибалльной шкале, итоговая отметка формируется как округлённое до целого значения среднее арифметическое выставленных отметок.
- 2) Аспирант считается успешно освоившим дисциплину, если он получил на кандидатском экзамене отметку «хорошо» или «отлично».

## Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### Основная литература

1. Быкова, О.Н. Теория функций действительного переменного : Учебное пособие. - Москва ; Москва : ООО "КУРС" : ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2016. - 196 с. - URL: <http://znanium.com/go.php?id=543159>
2. Крепкогорский, В.Л. Функциональный анализ : учебное пособие / В.Л. Крепкогорский. - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 116 с. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428727>
3. Половинкин, Е. С. Теория функций комплексного переменного : Учебник. - 1. - Москва : ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2017. - 254 с. - URL: <http://znanium.com/go.php?id=752312>
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. СПб.: Лань, 2008. 560 с. (Библиотека УлГПУ)
5. Шабунин, М.И. Теория функций комплексного переменного [Текст] : [учебник для вузов]. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва : Лаборатория знаний, 2016. - 300 с.

### Дополнительная литература

6. Авраменко, В.С. Теория функций действительного переменного : учебное пособие. 1 / В.С. Авраменко. - Елец : Елецкий государственный университет им И.А. Бунина, 2011. - 100 с. URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=271996>
7. Асташова, И. В. Функциональный анализ : учебно-методический комплекс / И.В. Асташова; В.А. Никишкин. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - 110 с. - ISBN 978-5-374-00486-1. URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90883>
8. Данилин, А. Р. Функциональный анализ : учебное пособие / А.Р. Данилин. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2012. - 200 с. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=239528>

9. Иосида К. Функциональный анализ. М.: ЛКИ, 2007. 624 с. (Библиотека УлГПУ)
10. Ревина, С. В. Функциональный анализ в примерах и задачах : учебное пособие / С.В. Ревина; Л.И. Сазонов. - Ростов-н/Д : Издательство Южного федерального университета, 2009. - 120 с. - ISBN 978-5-9275-0683-5.  
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=240944>
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 1981. - 572 с. (Библиотека УлГПУ)
12. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник; В.И. Соболев. - Изд. 2-е, перераб. - Москва : Наука, 1965. - 520 с. (Библиотека УлГПУ).  
То же: URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459769>
13. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу [Текст] : [учеб. пособие для ун-тов] / В.М. Писаревский, Т.С. Соболева. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Физматлит, 2002. - 259 с. (Библиотека УлГПУ)

### Информационное обеспечение дисциплины

1. <http://www.mathnet.ru/> - Общероссийский математический портал (свободный доступ к полным текстам статей журналов Академиздатцентра "Наука" РАН).
2. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm> (библиотека «Мир математических уравнений», книги по математике, математический анализ, функциональный анализ).
3. <http://www.mcsme.ru> – Московский центр непрерывного математического образования.
4. <http://ium.mcsme.ru/courses.php> - Московский центр непрерывного математического образования, библиотека курсов Независимого Московского университета.
5. <http://lib.mexmat.ru/books> - Электронная библиотека Попечительского совета МГУ.
6. <http://math-portal.ru>
7. <http://reslib.com> – Research library
8. <http://people.virginia.edu>
9. <http://projecteuclid.org>
10. <http://www.springerlink.com>
11. <http://www.encyclopediaofmath.org>
12. <http://myweb.facstaff.wvu.edu>

### Материально-техническое обеспечение дисциплины

Образовательный процесс обеспечивается достаточным аудиторным фондом, оснащенный необходимым учебным оборудованием.

Для проведения лекционных занятий могут быть использованы лекционные аудитории; специализированные лекционные аудитории (оснащенные аудиовизуальными и мультимедийными средствами). Для проведения практических занятий, а также промежуточного и итогового тестирования используются малые аудитории.

#### Для проведения аудиторных занятий:

Наименование специализированных аудиторий и лабораторий	Перечень оборудования
Аудитория № 417 (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	Посадочные места – 50 Преподавательский стол – 1 шт. Столы ученические двухместные – 14 шт. Столы ученические трехместные – 8 шт. Тумба под компьютер – 1 шт. Встроенные шкафы – 2 шт. Стулья – 50 шт. Мультимедийный класс в составе: интерактивная система SMART Board SB 685. Ноутбук HP Pavilion

	гб-2364. Доска – 1 шт. Жалюзи – 3 шт. Стул из кожи черный – 1 шт.
--	--

**Помещения для самостоятельной работы аспирантов:**  
 компьютерные классы (с выходом в Интернет), библиотека (с выходом в Интернет)

Медиациентр (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	73 моноблока, соединённых локальной компьютерной сетью; беспроводная сеть Wi-Fi; стационарный проектор; экран; 5 ЖК-мониторов, 2 ЖК-панели; система видеоконференцсвязи – PolycomHDX6000HD; акустическая система: вокальная аудиосистема и акустические колонки. Секционные столы-18шт.
Читальный зал (электронная библиотека, (УлГПУ им. И.Н. Ульянова, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина д. 4)	Ноутбуки 15,6 ACER Packard Bell EasyNote ENTE11HC-B9604G50MNKS 8 шт. Ноутбук Lenovo IdeaPad B590 Intel Pentium Dual-Core B960 2.2ГГц 4G/500G/DVD-RW15.6*/Windows 7 Home -7шт.