Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«_25_» __июня___ 2021 г.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И КОМБИНАТОРИКА

Программа учебной дисциплины модуля
Специальные разделы предметной области

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Физика. Математика

(очная форма обучения)

Составитель: Куренева Т.Н.,
старший преподаватель
кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21 июня 2021г. №_7_

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0233C9D60038B01A9E48C1A3FBB4A9D9F6
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 07.07.2023 до 28.04.2038

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дискретная математика и комбинаторика» относится к дисциплинам по выбору части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Физика. Математика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин: Алгебра с элементами теории чисел, Математическая логика, Основы математической обработки информации.

Результаты изучения дисциплины являются основой для прохождения практики: Производственная (научно-исследовательская работа) Преддипломная практика и государственной итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения данной дисциплины является формирование представлений об основных объектах, моделях и методах дискретной математики и теории графов, развитие абстрактно-логического мышления.

Задачей освоения дисциплины является овладение студентами основными методами дискретной математики и теории графов и применение их в будущей профессиональной деятельности.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11 Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования ПК-11.1. Знает основные научные понятия и особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской	ОР-1 основные научные понятия дисциплины, особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных;	ОР-2 самостоятельно и в составе научного коллектива решать конкретные задачи профессиональной деятельности; самостоятельно и под научным руководством осуществлять сбор и обработку информации; способен применять полученные знания	ОР-3 навыками комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием научной и учебной литературы, информационных баз данных

деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач. ПК-11.3. Владеет базовыми представлениями о принципах организации и осуществления исследований, практическими навыками осуществления исследований; применяет навыки комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием научной и учебной литературы, информационных баз данных.	интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач	для объяснения актуальных проблем и тенденций развития предмета	
ПК-13. Способен соотносить основные этапы развития предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) с ее актуальными задачами, методами и концептуальными подходами, тенденциями и	ОР-4 основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов		ОР-5 приёмами систематизации и периодизации знаний в предметной области; навыками использования систематизированного теоретического и

перспективами ее современного развития. ИПК-13.1. Знает основные этапы исторического развития предметной области. ИПК-13.3. Владеет приёмами систематизации и периодизации знаний в предметной области; навыками использования систематизированного теоретического и практического знания для постановки и решения задач предметной области.			практического знания для постановки и решения задач предметной области

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
7	2	72	12	20	-	40	зачет
Итого:	2	72	12	20	-	40	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения

	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
7 семестр				
Графы	8	10		16
Рекуррентные соотношения	2	4		12
Исчисление сумм	2	6		12
Всего по дисциплине:	**12**	**20**	**-**	**40**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

1. Графы.

Основные понятия теории графов. Смежность и инцидентность. Способы задания графов. Степень вершины графа. Теорема о сумме степеней вершин графа и её следствие. Подграф. Путь, цепь, простая цепь, цикл, простой цикл. Связные графы. Компоненты связности графа и их число. Изоморфные графы. Операции над графами. Метрические характеристики графа. Эйлеровы и полуэйлеровы графы. Критерии эйлеровости и полуэйлеровости графов. Гамильтоновы и полугамильтоновы графы. Деревья. Код Прюфера. Ориентированные и корневые деревья. Паросочетания, независимые множества и клики. Укладка графа. Планарные графы. Плоские графы. Теорема Эйлера и ее следствия. Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$. Раскраска вершин и ребер графа. Хроматическое число графа. Раскрашиваемость вершин планарного графа пятью красками. Гипотеза четырех красок.

2. Рекуррентные соотношения

Рекуррентные соотношения. Задачи, приводящие к рекуррентным соотношениям. Способы решения рекуррентных соотношений. Линейные однородные и неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Числа Фибоначчи. Формула Бине.

3. Исчисление сумм

Конечная сумма. Обозначения сумм. Преобразования сумм. Суммы и рекуррентности. Кратные суммы. Общие методы суммирования. Бином Ньютона. Ряд Ньютона. Полиномиальная формула.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы

состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, письменных проверочных работ по дисциплине.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения домашних заданий.

ОС-1. Примерный перечень тем рефератов

1. Графы с цветными ребрами.
2. Число различных графов с n вершинами.
3. Раскрашиваемость вершин планарного графа шестью красками.
4. Восстановление графов.
5. Раскраска карт.
6. Покрытия и упаковки в теории графов.
7. Методы линейной алгебры в теории графов.
8. Нелинейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.
9. Метод производящих функций в решении рекуррентных соотношений.
10. Вычисление сумм вида $\sum_{k=1}^{n} k^s$, s = 1, 2, 3, ...

ОС-2. Примерные задания для самостоятельной работы.

Задача. Граф задан списком ребер.

Считая данный граф неориентированным, обозначить его вершины и рёбра разными символами и определить.

1. Вид графа.
2. Степени каждой вершины
3. Построить матрицы инцидентности и смежности
4. Рассмотреть части графа. Показать подграф, состоящий из трёх вершин. Сколько таких подграфов можно найти в данном графе? Показать примеры пересечения и объединения частей графа
5. Привести примеры циклического маршрута, цепи, простой цепи.
6. Определить центр, диаметр и радиус графа.

Считая граф ориентированным, определить

1. Степени вершин
2. Матрицы инцидентности и смежности.
3. Привести примеры пути, ориентированной цепи, простой цепи, контура, цикла и простого цикла.

ОС-3. Примерные задания для самостоятельной работы.

1. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением.

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1, \quad a_1 = 0, a_2 = 1.$$

2. Вычислить сумму.

$$\sum_{k=3}^{20}(2k-3^k)$$.

ОС-4. Примерные задания для контрольной работы.

1. Неориентированный граф задан списком ребер f = (1,2,1,2,3,3,3)
g = (2,1,3,4,4,2,5) .
Определить вид графа. Вычислить степень вершины 4. Найти матрицу смежности графа. Выяснить, является ли граф связным? Если да, то найти радиус и диаметр графа, центр и периферийные вершины. Определить мосты и шарниры (если они есть).

2. Неориентированный граф задан своей матрицей смежности А. Выяснить, является ли граф эйлеровым, полуэйлеровым, гамильтоновым, полугамильтоновым, планарным? Найти хроматическое число графа.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Ориентированное дерево с корнем в вершине максимального типа задано кодом Прюфера (1,1,1,2,2,7,7,7,6,11). Составить его матрицу инцидентности. Вычислить степени входа и выхода вершины 2 и ее уровень. Определить высоту дерева.

4. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением.

$$a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0,\quad a_0=0,\ a_1=2,\ a_2=16.$$

5. $\{a_n\}$- последовательность Фибоначчи. Доказать:

$$a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2=a_n\cdot a_{n+1}\ .$$

6. Вычислить сумму:

$$\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\cdot 3^k\cdot C_n^k\ .$$

7. Вычислить приближенно с точностью до четвертого десятичного знака.

1) $(4{,}98)^4$; 2) $\sqrt{101}$.

8. Найти коэффициент при x^m в разложении полинома.

$$(1+x^2+x^3)^7,\quad m=11.$$

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Куренева Т.Н. Элементы теории графов. Учебно – методическое пособие для студентов педагогических вузов.- Ульяновск: УлГПУ, 2011.
2. Куренева Т.Н. Дискретная математика. Учебно-методическое пособие для бакалавров педагогических направлений подготовки – Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2017. Том Часть 1.– 25 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и

личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

<table>
<tr><th></th><th>СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,
используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции</th><th>Образовательные результаты дисциплины</th></tr>
<tr><td></td><td>Оценочные средства для текущей аттестации
ОС-1 Защита реферата
ОС-2 Самостоятельная работа
ОС-3 Самостоятельная работа
ОС-4 Контрольная работа</td><td rowspan="2">ОР-1
Знать основные научные понятия дисциплины, особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области;
основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики;
ОР-2
Уметь самостоятельно и в составе научного коллектива решать конкретные задачи профессиональной деятельности; самостоятельно и под научным руководством осуществлять сбор и обработку информации; способен применять полученные знания для объяснения актуальных проблем и тенденций развития предмета;
ОР-3
Владеть навыками комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием научной и учебной литературы, информационных баз данных;
ОР-4
Знать основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов;
ОР-5
Владеть приёмами систематизации и</td></tr>
<tr><td></td><td>Оценочные средства для промежуточной аттестации зачет (экзамен)
ОС-5 Зачет в форме устного собеседования</td></tr>
</table>

		периодизации знаний в предметной области; навыками использования систематизированного теоретического и практического знания для постановки и решения задач предметной области

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-5. Примерный перечень вопросов к зачету

1. Основные понятия теории графов. Способы задания графов. Степень вершины графа. Теорема о сумме степеней вершин графа. Подграф.
2. Операции над графами.
3. Маршрут, цепь, простая цепь, цикл, простой цикл. Связные графы. Компоненты связности графа, их число. Мосты и шарниры. Сильно связный орграф.
4. Изоморфные графы.
5. Метрические характеристики графа.
6. Эйлеровы и полуэйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа. Алгоритм Флери. Критерий полуэйлеровости графа. Эйлеровы и полуэйлеровы орграфы.
7. Гамильтоновы и полугамильтоновы графы. Достаточные условия гамильтоновости графа. Гамильтоновы и полугамильтоновы орграфы.
8. Деревья и их свойства. Число деревьев с пронумерованными вершинами. Код Прюфера. Ориентированные деревья. Вершины максимального типа.
9. Паросочетания, независимые множества и клики.
10. Укладка графа. Планарные графы. Плоские графы. Теорема Эйлера. Непланарность графов в К5 и К3,3.
11. Критерии планарности графа.
12. Раскраска вершин и ребер графа. Основная задача раскраски. Хроматическое число.
13. Раскрашивание вершин планарного графа пятью красками. Гипотеза четырех красок.
14. Рекуррентные соотношения. Задачи, приводящие к рекуррентным соотношениям.
15. Возвратные последовательности.
16. Способы решения рекуррентных соотношений.
17. Числа Фибоначчи и их свойства. Формула Бине.
18. Конечные суммы. Преобразования сумм. Кратные суммы.
19. Суммы и рекуррентности.
20. Общие методы суммирования.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачет
7 семестр	Разбалловка по видам работ	6 х 1=6 баллов	10 х 1=10 баллов	152 балла	32 балла
	Суммарный макс. балл	6 баллов max	16 баллов max	168 баллов max	200 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

	Баллы (2 ЗЕ)
«зачтено»	**более 100**
«не зачтено»	**100менее**

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

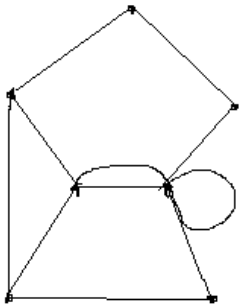
Практическое занятие № 1. *Основные понятия теории графов.*

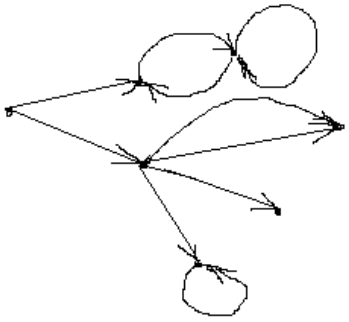
Вопросы к занятию:

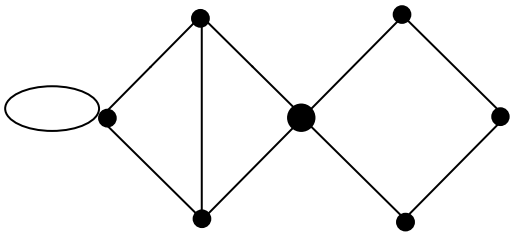
1. Граф. Вершины и ребра графа, отношение инцидентности между ними.
2. Неориентированное ребро, ориентированное ребро, кратные ребра. Смежные ребра, смежные вершины.
3. Основные виды графов.
4. Способы задания графов.
5. Степень вершины графа. Теорема о сумме степеней вершин графа.

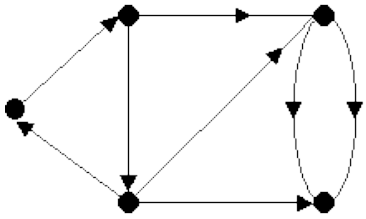
Задачи:

1. Определить вид графов. Занумеровать вершины графов. Задать графы различными способами. Определить степени всех вершин.









2. По матрице смежности вершин графов найти матрицу инцидентности, построить изображения графов.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Найти матрицы смежности и инцидентности графа (неориентированного и ориентированного), заданного списком ребер.
   1) f = (1,2,1,2,3,3,4)
      g =(2,1,3,4,4,2,4) .
   2) f = (1,3,2,2,1,3,2)
      g= (1,2,3,4,4,4,2).
4. Выяснить, существуют ли графы с данным набором степеней вершин.
   1) (0,2,2,3,3); 2) (2,2,2,3,3);
   3) (2,2,3,3,3); 4) (0,1,2,3,4).
5. В сарае 10 корыт с едой и 20 поросят. Через некоторое время поросята перебегают от одного корыта к другому. Известно, что от каждого корыта к каждому пробегал какой-нибудь поросенок. Докажите, что хоть один поросенок перебегал не менее трех раз.
6. Маша сказала своей подружке Лене: «У нас в классе двадцать пять человек. И представь, каждый из них дружит ровно с семью одноклассниками». «Не может этого быть» - ответила Лена. Почему она так решила?
7. Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый из участников должен сыграть с каждым из остальных по одному разу). Докажите, что в любой момент найдутся двое, закончившие одинаковое число партий.

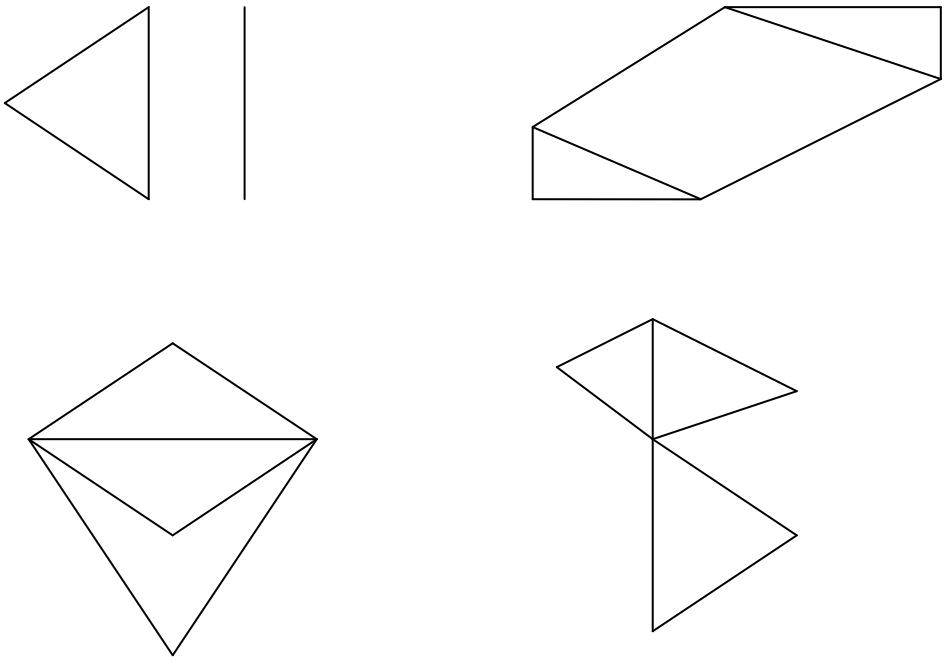
Практическое занятие № 2. *Связные графы. Метрические характеристики графа.*

Вопросы к занятию:

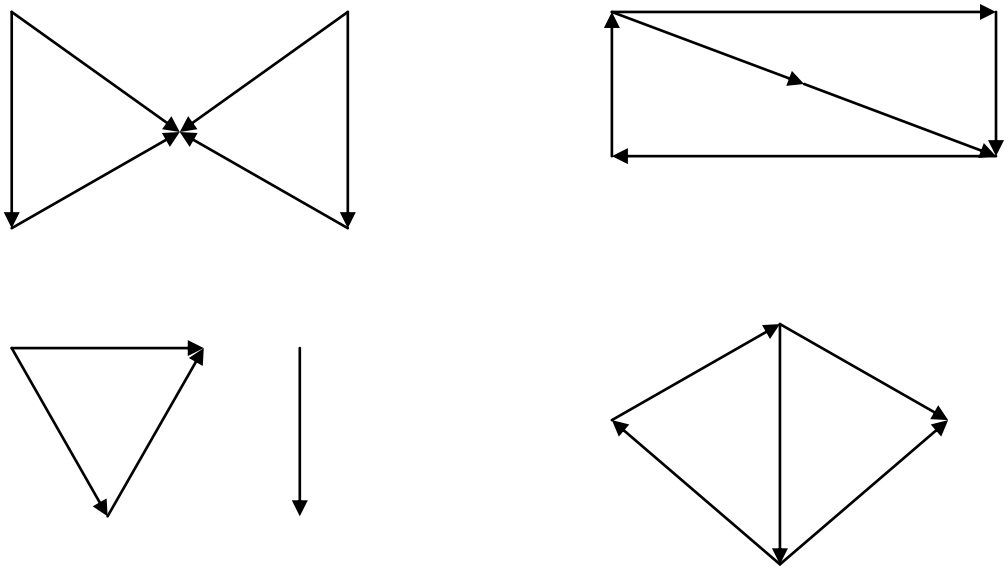
1.Маршруты, цепи и циклы в графе.
2. Связные вершины.
3. Отношение связности, заданное на множестве вершин н-графа.
4. Отношение достижимости, заданное на множестве вершин орграфа.
5. Компоненты связности.
6. Шарниры, блоки и мосты.
7. Основные метрические характеристики графа: длина маршрута, расстояние между вершинами. Эксцентриситет вершины.
8. Матрица расстояний.
9. Радиус и диаметр графа.
10. Центральные и периферийные вершины. Центр графа.

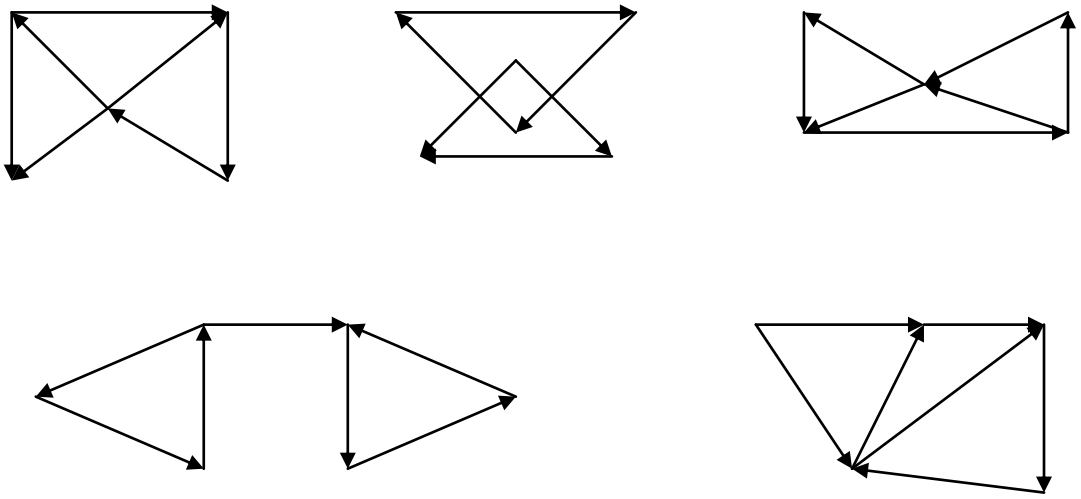
Задачи

1. Определить, какие из графов являются связными. Найти все простые циклы и циклы, не являющиеся простыми.

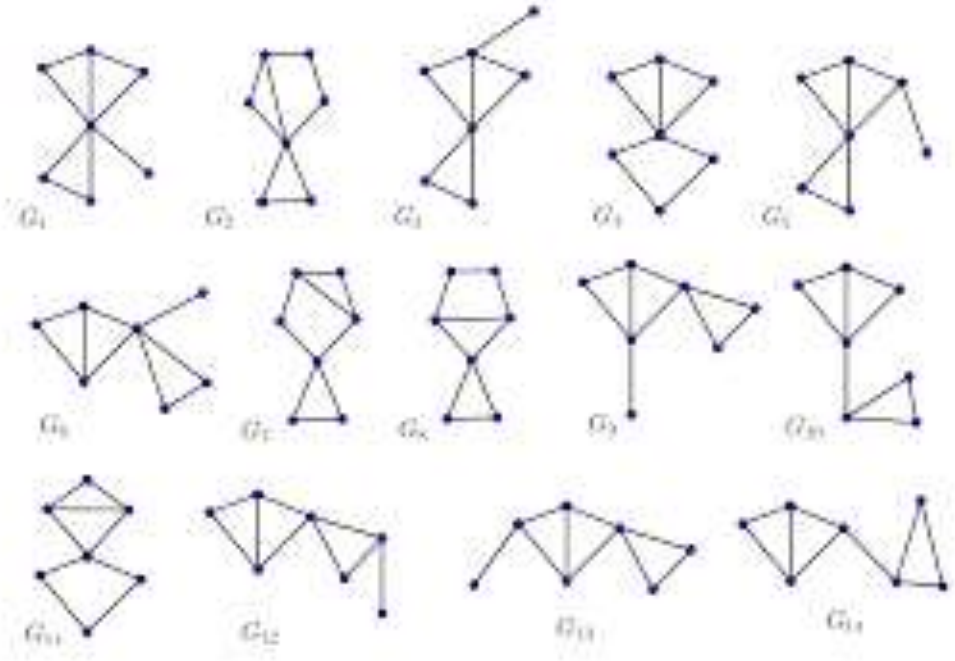


2. Определить, какие из орграфов являются связными, сильно связными.

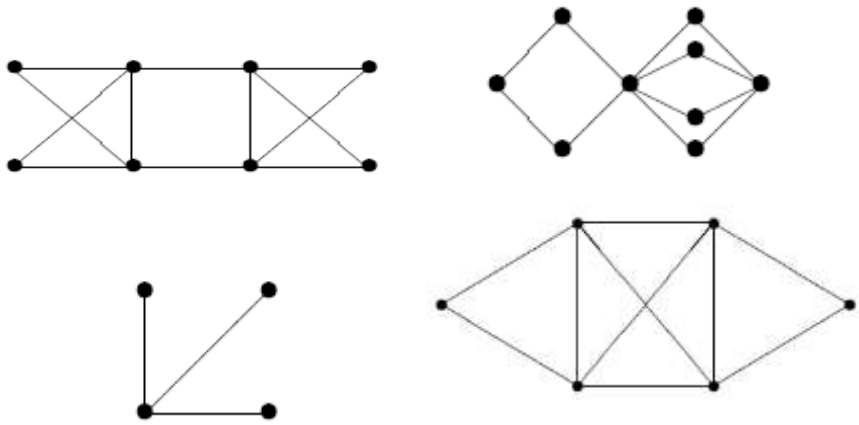


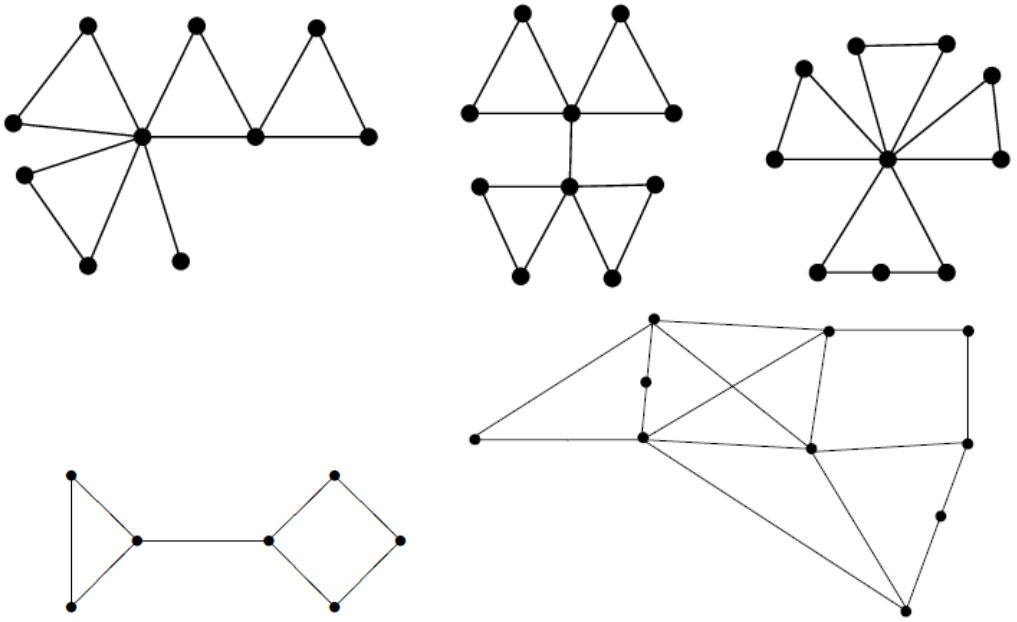


3. Определить мосты и шарниры графов



4. Найти эксцентриситеты вершин, радиусы и диаметры графов, периферийные, центральные вершины.



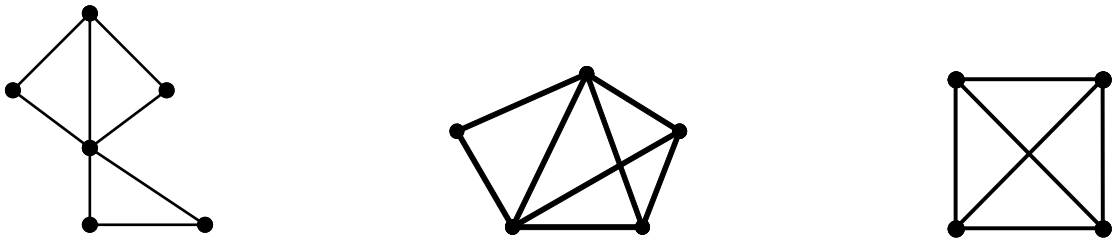


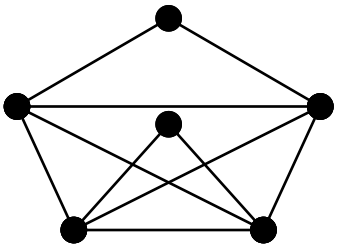
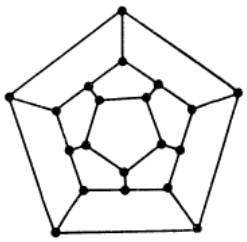
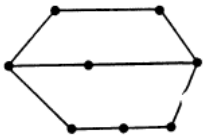
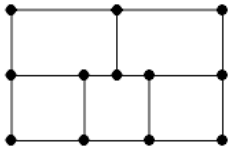
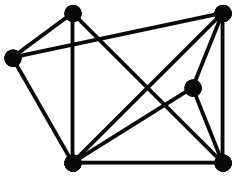
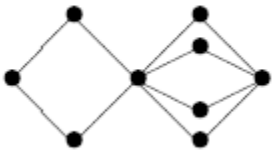
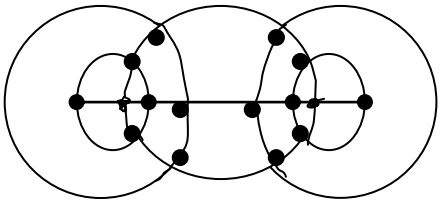
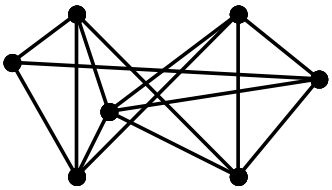
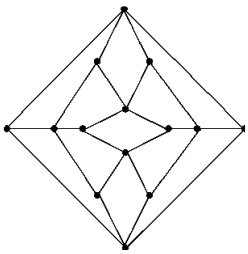
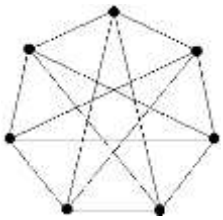
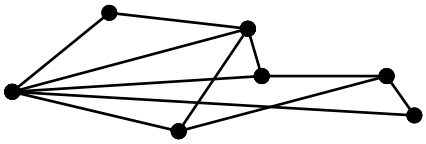
5. Построить граф, центр которого:
1) состоит ровно из одной вершины; 2) состоит ровно из трех вершин и не совпадает с множеством вершин; 3) совпадает с множеством всех вершин.
6. Доказать, что диаметр графа не превосходит его удвоенного радиуса.

Практическое занятие № 3. *Эйлеровы и полуэйлеровы графы. Гамильтоновы и полугамильтоновы графы.*

Вопросы к занятию:
1. Эйлеров цикл. Эйлеров граф.
2. Критерии эйлеровости графов.
3. Эйлерова цепь. Полуэйлеров граф.
4. Критерии полуэйлеровости графов.
5. Гамильтонов цикл. Гамильтонов граф.
6. Достаточные условия гамильтоновости графа.
7. Гамильтонова цепь. Полугамильтонов граф.

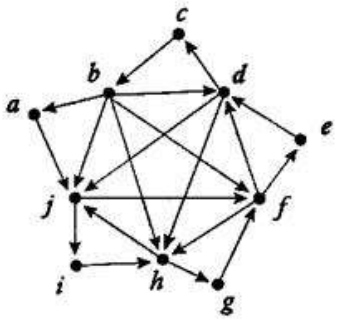
Задачи:
1. Определить, являются ли н-графы эйлеровыми, полуэйлеровыми, гамильтоновыми, полугамильтоновыми.? Если да, то найти эйлеров цикл, эйлерову цепь, гамильтонов цикл, гамильтонову цепь.



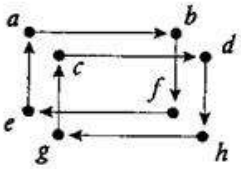












2. Определить, являются ли орграфы эйлеровыми, полуэйлеровыми, гамильтоновыми, полугамильтоновыми.? Если да, то найти эйлеров цикл, эйлерову цепь, гамильтонов цикл, гамильтонову цепь.

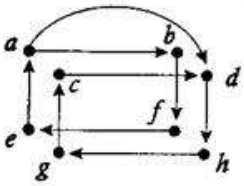
а)



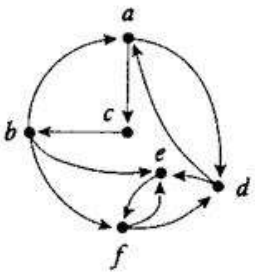
б)

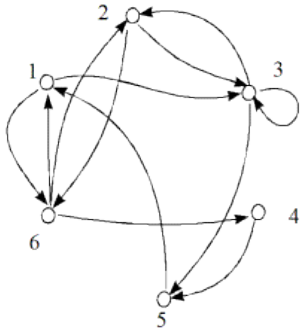


в)

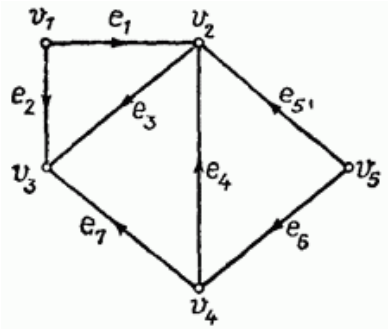


г)





д)



е)

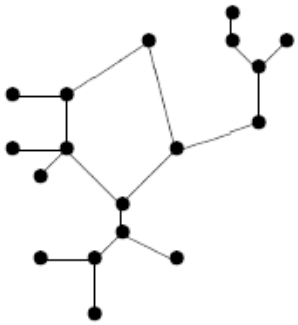
Практическое занятие № 4. *Древья и их свойства.*

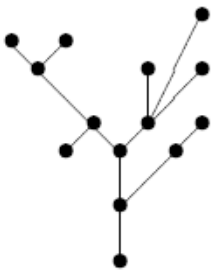
Вопросы к занятию:

1. Дерево.
2. Лес.
3. Свойства деревьев.
4. Вершина максимального типа дерева.
5. Алгоритм нахождения центра неориентированного дерева.
6. Кодирование деревьев.
7. Код Прюфера.
8. Восстановление дерева по коду Прюфера.
9. Ориентированное дерево.
10. Лист, ветвь, ярус ордерева. Высота ордерева.

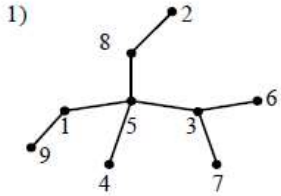
Задачи:

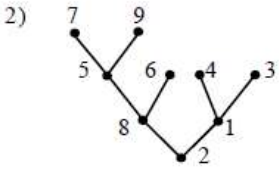
1. Среди графов, изображенных на рисунке, определить дерево. Занумеровать вершины дерева. Определить его радиус, диаметр и центр.

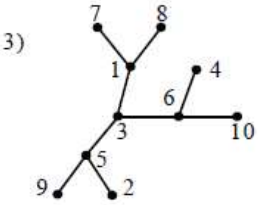


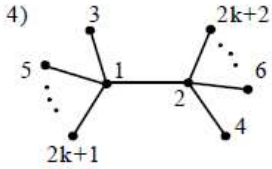


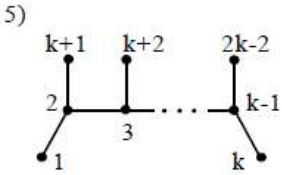
2. Построить код Прюфера для деревьев:

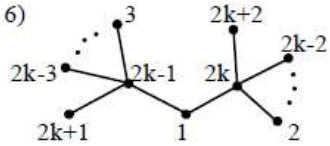












3. Является ли н-граф, заданный списком ребер, деревом? Если да, то определить вершины максимального типа. Найти код Прюфера.

1) f= (1,2,3,4,7,7,7,8,8,10,11,10)

g = (4,3,4,7,5,6,8,9,10,11,12,13)

2) f= (1,2,3,4,5,8,5,6,5,9,11,11)

g= (4,4,4,5,7,7,6,10,9,11,12,13).

4.Задать дерево списком ребер, если его код Прюфера имеет вид:

1) (1,1,1,2,2,7,7,7,6,11); 2) (7,7,5,5,5,9,7,9,9,11).

5. Дерево задано списком ребер.

1) f= (1,2,3,4,7,7,7,8,8,10,11,10)

g = (4,3,4,7,5,6,8,9,10,11,12,13)

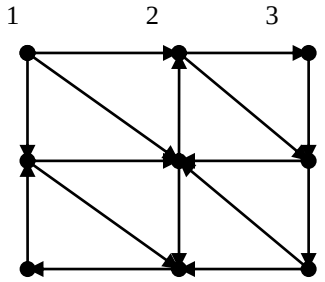
2) f= (1,2,3,4,5,8,5,6,5,9,11,11)

g= (4,4,4,5,7,7,6,10,9,11,12,13).

Ориентировать дерево, выбрав в качестве корня:

а) вершину степени 2; б) висячую вершину; в) вершину максимального типа. Определить ярусы и высоту дерева.

6. Движение из пункта 1 в пункт 8 разрешается только в направлении стрелок. В каждом пункте можно бывать не более одного раза. Сколькими способами можно попасть из пункта 1 в пункт 8? Какой из этих путей кратчайший, какой самый длинный?



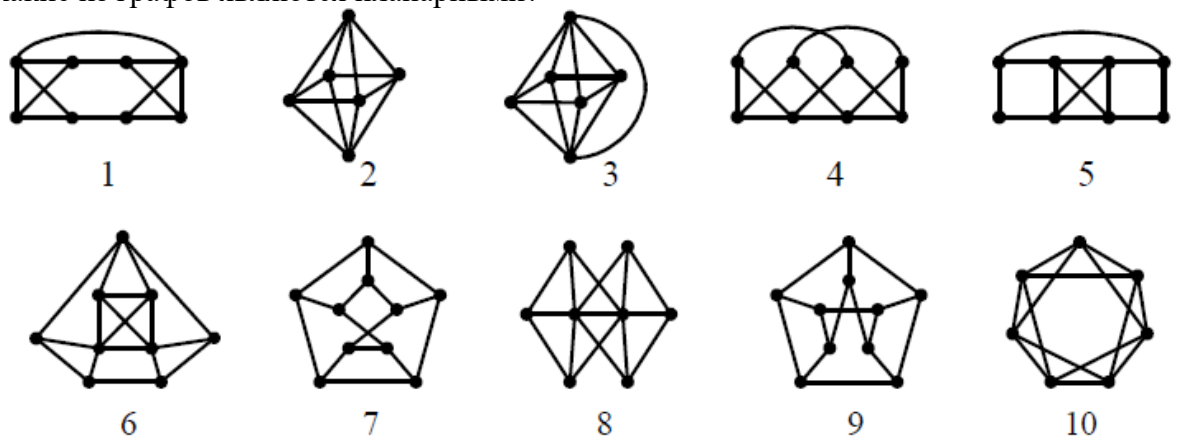
Практическое занятие № 5 . *Планарность графов. Раскраска графа.*

Вопросы к занятию:

1. Укладка графа.
2. Планарные графы.
3. Плоские графы.
4. Теорема Эйлера и ее следствия.
5. Критерии планарности графа
6. Понятие раскраски, правильной раскраски.
7. Основная задача теории раскраски.
8. Хроматическое число графа.
9. Раскрашиваемость планарного графа пятью красками. Гипотеза четырех красок.
10. Алгоритмы раскрашивания графа.

Задачи:

1. Какие из графов являются планарными?

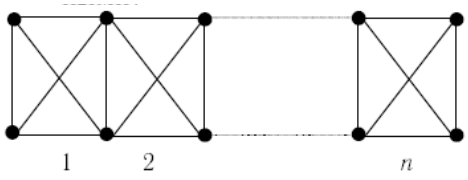


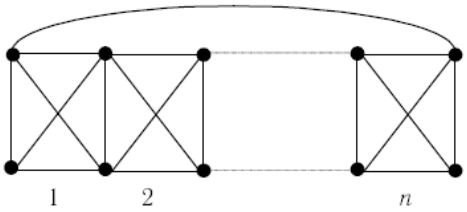
2. Выяснить, существует ли планарный граф, у которого:

1) 7 вершин и 16 ребер;

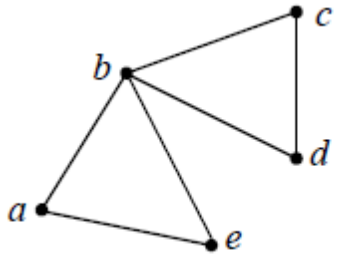
2) 8 вершин и 17 ребер.

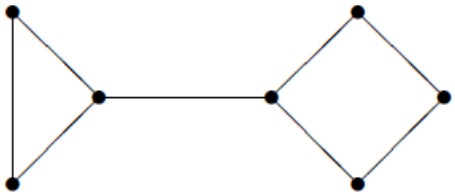
3. При каких n графы порядка $2n$ являются планарными?

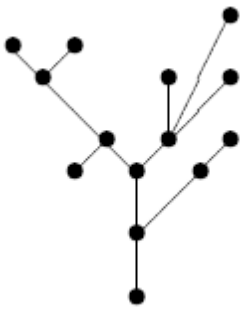


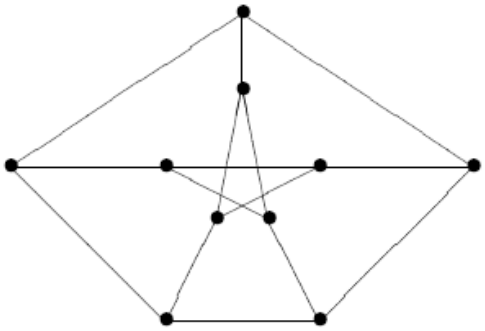


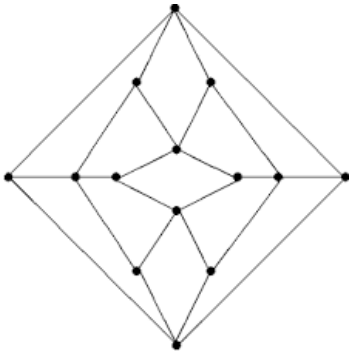
4. Найти хроматическое число графов:

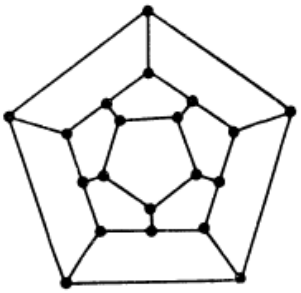


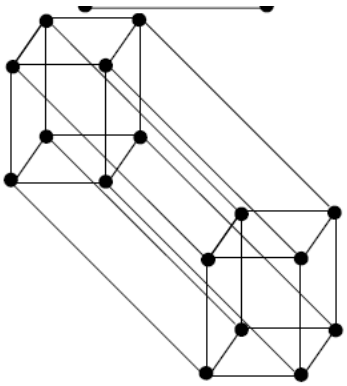












Практическое занятие № 6. *Рекуррентные соотношения. Линейные однородные и неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.*

Вопросы к занятию:

1. Возвратная последовательность.
2. Линейное однородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами.
3. Характеристический многочлен возвратной последовательности.
4. Теоремы о нахождении общего решения линейного однородного рекуррентного соотношения.
5. Линейное неоднородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами
6. Теорема о нахождении общего решения линейного неоднородного рекуррентного соотношения.

7. Теорема о нахождении частного решения линейного неоднородного рекуррентного соотношения.

Задачи:

1. Найти общее решение линейных однородных рекуррентных соотношений:

1) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0;$
2) $a_{n+2} + 3a_n = 0;$
3) $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n;$
4) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0;$
5) $a_{n+2} - 2\cos\varphi\, a_{n+1} + a_n = 0;$
6) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0;$
7) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0;$
8) $a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n = 0.$

2. Решить линейные однородные рекуррентные соотношения:

1) $a_{n+2} - 9a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = 0;$
2) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0,\ a_1 = 10,\ a_2 = 16;$
3) $a_{n+2} - 2\cos\varphi\, a_{n+1} + a_n = 0,\ a_1 = \cos\varphi,\ a_2 = 2\cos\varphi;$
4) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0,\ a_1 = 6,\ a_2 = 27;$
5) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0,\ a_1 = 3,\ a_2 = 7, a_3 = 27;$
6) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0,\ a_1 = a,\ a_2 = b, a_3 = c;$
7) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = -3;$
8) $a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_{n+1} + a_n, a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 8;$
9) $a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3;$
10) $a_{n+4} - 4a_{n+2} + 4a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0.$

3. Решить неоднородные линейные рекуррентные соотношения:

1) $a_{n+1} - a_n = n,\ a_1 = 1;$
2) $a_{n+1} + 2a_n = n+1,\ a_0 = 1;$
3) $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = n,\ a_1 = 1, a_2 = -2;$
4) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = -4,\ a_0 = 1, a_1 = -7;$
5) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = n^2 - 3n + 1,\ a_1 = 0, a_2 = -1;$
6) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n,\ a_0 = 5, a_1 = 7;$
7) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 2;$
8) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n,\ a_0 = 1, a_1 = 2;$
9) $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n + 2^{-n}, a_0 = 1, a_1 = \frac{3}{2}.;$
10) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n,\ a_1 = -9,\ a_2 = 45.$

4. Решить задачи:

1) **Задача о Ханойской башне** *(головоломку под названием «ханойская башня» придумал французский математик Эдуард Люка в 1883 г.)*

Башня представляет собой восемь дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Требуется определить наименьшее число перекладываний, удовлетворяющих правилу.

2) **Задача о разрезании пиццы (***впервые задача была решена в 1826 г. Швейцарским математиком Яковом Штейнером).*

Сколько кусков пиццы можно получить, делая *n* прямолинейных разрезов ножом? Или: каково максимальное число областей, на которые плоскость делится *n* прямыми?

Практическое занятие № 7. *Числа Фибоначчи и их свойства.*

Вопросы к занятию:
1. Последовательность чисел Фибоначчи.
2. Формула Бине.
3. Основные свойства чисел Фибоначчи.

Задачи
1. **Задача Фибоначчи** (1202 г.)
Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?
2. Доказать следующие свойства чисел Фибоначчи:
1) $(\forall m,n)\quad f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}$;
2) $(\forall\, m,n)\ \ m \vdots n \Rightarrow f_m \vdots f_n$;
3) $(\forall n)\ \ HOD(f_n, f_{n+1}) = 1$;
4) любое натуральное число $N > 1$ может быть однозначно представлено в виде суммы чисел Фибоначчи, причем каждое число входит в сумму не более одного раза, и никакие два соседних числа не входят вместе;
5) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;
6) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n+1} = f_{2n+2}$;
7) $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;
8) $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots + f_{2n-1} - f_{2n} = 1 - f_{2n-1}$;
9) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;
10) $f_1 f_2 + f_2 f_3 + \ldots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$;
11) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$;
12) $f_{n+1}^2 = f_n f_{n+2} + (-1)^n$;
13) $f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 = f_{3n}$;
14) $f_n^4 - f_{n-2}f_{n-1}f_{n+1}f_{n+2} = 1$.

3. Найти наибольший общий делитель 1000-го и 770-го членов последовательности Фибоначчи.

4. В последовательности Фибоначчи выбрано 8 подряд идущих чисел. Доказать, что их сумма не входит в этот ряд.

Практическое занятие № 8. *Конечные суммы. Преобразование сумм. Общие методы суммирования.*
Вопросы к занятию:
1. Конечная сумма. Способы ее обозначения.
2. Правила преобразования сумм.
3. Простейшие методы суммирования.
4. Метод приведения.
5. Суммы и рекуррентности.

Задачи.
1. Вычислить сумму:

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$; 2) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$; 3) $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k+1)}$;

4) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$; 5) $\sum_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{k(k+1)(4k^2-1)}$; 6) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$;

7) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!}$; 8) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$; 9) $\sum_{k=2}^{n}(3^k+3)$;

10) $\sum_{k=1}^{10} \frac{5^k-1}{5^{k-1}}$; 11) $\sum_{k=m}^{n}(3^k+3k)$; 12) $\sum_{k=0}^{n}(2k+3)$;

13) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{5^k}$; 14); $\sum_{k=3}^{999}(5\kappa-7+5\cdot 7^{k+1})$;

15) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2$; 16) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1)\,(k+2)$;

17) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot(2k-1)$; 18) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^{k-1}}$.

11. Найти сумму ряда:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$;

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}$; 4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$.

Практическое занятие № 9. *Бином Ньютона. Ряд Ньютона. Полиномиальная формула.*

Вопросы к занятию:

1. Бином Ньютона.
2. Биномиальные коэффициенты и их основные свойства.
3. Ряд Ньютона.
4. Полиномиальная формула.
5. Полиномиальные коэффициенты.

Задачи:

1. Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении:

1) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{20}$; 2) $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{50}$; 3) $\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{2}\right)^{100}$; 4) $\left(\sqrt[3]{12}+\sqrt[6]{3}\right)^{30}$?

2. Найти коэффициент при x^k в разложении:

1) $(2+x)^{10}$, k=3; 2) $(1-2x)^7$, k=4; 3) $(\sqrt{x}-\frac{2}{x})^8$, k= -5; 4) $(3\sqrt[3]{x}^2 - x\sqrt{x})^9$, k= 11; 5) $\left(2+x^4+x^7\right)^{15}$, к=17;

6) $\left(2+x-2x^3\right)^{20}$, k=10; 7) $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})^6$, k= 2.

12. Какое число больше: $99^{50}+100^{50}$ или 101^{50}?

13. Доказать утверждение для любого натурального *n:*

1) $(3^{2n+3}-24n+37) \vdots 64$; 2) $(4^n+15n-1) \vdots 9$;

3) $(6^{2n}-1) \vdots 35$; 4) $(2^{n+2}3^n+5n-4) \vdots 25$.

14. Вычислить приближенно с точностью до четвертого десятичного знака:

1) $1{,}002^{10}$; 2) $1{,}004^5$; 3) $0{,}997^{20}$; 4) $0{,}9998^{10}$; 5) $\sqrt{9{,}09}$; 6) $\sqrt{26}$; 7) $\sqrt[3]{8{,}024}$; 8) $600^{\frac{3}{4}}$;

9) $\sqrt[3]{999}$; 10) $\frac{1}{\sqrt[5]{3120}}$.

6. Найти сумму коэффициентов в разложении

$$(7x^3-13y^2+5z^2)^{2004}(y^3-8y^2+6y+z)^2+(2x^2+18y^2-21)^{2005}.$$

Практическое занятие № 10. *Контрольная работа (ОС-4).*

4. **Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины**

Основная литература

1. Баврин, И.И. Дискретная математика : учебник и задачник для прикладного бакалавриата / МПГУ. - Москва: Юрайт, 2015. - 208 с.
2. Дискретная математика : учебное пособие. 1 / И.П. Болодурина; Т.М. Отрыванкина; О.С. Арапова; Т.А. Огурцова. - Оренбург : ОГУ, 2016. - 108 с. Электронный ресурс: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=467106
3. Костюкова, Н.И. Комбинаторные алгоритмы для программистов/ Н.И. Костюкова.- М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016- 217 с. Электронный ресурс: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=429067
4. Шапорев, С. Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий [Текст] : учеб. пособие для вузов. - Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2009. - 396 с.

Дополнительная литература

1. Виленкин, Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.- 329 с. Электронный ресурс: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=449583
2. Ковалева, Л. Ф. Дискретная математика в задачах : учебное пособие / Л.Ф. Ковалева. - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - 142 с. Электронный ресурс: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273
3. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов [Текст] : учеб. пособие для вузов, обуч. по [спец.], "Информатика и вычислительная техника". - Санкт-Петербург : Питер, 2002. - 301 с.
4. Окулов, С.М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике [Текст] : учеб. пособие [для вузов]. - Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 422 с.
5. Палий, И. Б. Дискретная математика. Курс лекций [Текст] : учеб. пособие [для вузов]. - Москва : Эксмо, 2008. - 349 с.

Интернет-ресурсы

- Электронная библиотека http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=231616
- Электронная библиотека http://znanium.com/bookread2.php?book=241722
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru