Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н.Титов
«25» июня 2021 г.

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Программа учебной дисциплины
модуля Специальные разделы предметной области
основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Информатика

(очная форма обучения)

Составитель: Гришина С.А.,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «21» июня 2021 г. № 7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Избранные вопросы алгебры и теории чисел» относится к дисциплинам по выбору части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) модуля Специальные вопросы предметной области учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Информатика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Алгебра», «Геометрия», «Теория чисел и числовые системы».

Результаты изучения дисциплины являются основой для выполнения и защиты выпускной квалификационной работы, подготовке и сдаче государственного экзамена.

Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины «Избранные вопросы алгебры и теории чисел» является обобщении и углублении знаний по общему курсу алгебры, формировании представления об их приложениях, о возможностях продолжения образования в области алгебры, о современных проблемах алгебры, а также в формировании абстрактно-логического мышления и умения оперировать такими общематематическими понятиями. Существенной частью курса является обучение студентов самостоятельному изучению вопросов, оказывается помощь в работе с литературой, формируются навыки выступления с докладами. В процессе изучения дисциплины будущие учителя знакомятся с различными методами проведения строгих логических доказательств, готовятся к грамотному и логичному изложению материала на уроках математики, а также обучаются решению некоторых задач повышенной сложности школьного курса, олимпиадных задач.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Избранные вопросы алгебры и теории чисел» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11 Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования ПК-11.1. Знает основные научные понятия и	ОР-1 Знает основные		

особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач.	фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области.		
ПК-14. Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями ИПК-14.1. Знает роль и возможности применения аппарата предметной области в смежных научных областях, их методологическое и мировоззренческое значение; имеет представление о междисциплинарных связях, научных	ОР-3. возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях	ОР-4. решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине	

методах смежных областей ИПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач.			

1. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
9	2	72	12	20	-	40	зачёт
10	2	72	12	20	-	40	зачёт
Итого:	4	144	24	40	-	80	

2. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование разделов и тем (с разбивкой на модули)	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
	9 семестр				

1.	Дополнительные главы теории матриц и определителей	12		20	40
	Итого	**12**		**20**	**40**
	10 семестр				
1.	Элементы теории чисел и систем линейных неравенств	12		20	40
	Итого	**12**		**20**	**40**
	Всего	**24**		**4**	**200**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса

№ п/п	Наименование темы/раздела	Содержание
1.	Дополнительные главы теории матриц и определителей	Клеточные матрицы и особенности операций над ними. Распавшиеся и полураспавшиеся матрицы. Методы «экономного» умножения матриц. Теорема об определителе распавшейся матрицы. Элементарные делители распавшейся матрицы. След и определитель линейного оператора, их инвариантность относительно базиса. Понятие минора k-того порядка данной матрицы. Вывод формулы, выражающей определитель квадратной матрицы, представляющей собой произведение двух прямоугольных матриц, через миноры матриц – множителей (формулы Бине – Коши). Ранг произведения двух прямоугольных матриц. Жорданова клетка и жорданова нормальная форма матрицы. Понятие ассоциированной матрицы, некоторые свойства, примеры. Вывод формулы, выражающей миноры обратной матрицы через миноры данной матрицы. Понятие скелетного разложения произвольной прямоугольной матрицы. Псевдообратные матрицы. Метод Гревилля. Понятие преобразующей матрицы. Теорема о возможности представления квадратной матрицы в виде произведения нижней треугольной матрицы на верхнюю треугольную матрицу. Некоторые следствия из теоремы. Интерактивные формы занятий: работа в микрогруппах
2.	Элементы теории чисел и систем линейных неравенств	Числовые функции. Числа Фибоначчи. Совершенные числа, простые числа Мерсенна и Ферма. Формула Мёбиуса. Представление рациональных чисел цепными дробями. Подходящие дроби. Их свойства. Некоторые приложения комплексных чисел. Комплексные числа и кривые второго порядка. Индекс чисел и классов по данному модулю. Свойства. Двучленные сравнения по простому модулю. Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра. Теорема Дирихле. Системы линейных неравенств, понятие о совместности систем линейных неравенств. Задачи линейного программирования (ЗЛП). Примеры ЗЛП. Задачи о ресурсах. Стандартный и канонический вид ЗЛП. Решение экономических задач линейного программирования с использованием геометрического метода.

		Интерактивные формы занятий: работа в микрогруппах

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения самостоятельных и контрольных работ по дисциплине.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

ОС-1. Контрольная работа

1. Найти матрицу квадратичной формы $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2$. Определить её вид, индекс инерции и сигнатуру. Привести квадратичную форму к каноническому виду.
2. Пусть вектор $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Выяснить, можно ли скалярное произведение задать по формуле: $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$. Найти матрицу данной билинейной формы и привести её к каноническому виду. Указать соответствующий базис.
3. Построить ортонормированные базисы пространств, натянутых на векторы:

a_1 (1, 2, 2, -1); a_2 (1, 1, -5, 3); a_3 (3, 2, 8, -7). Найти ортогональное дополнение данного пространства до базиса пространства R_4

4. Найти минимальный многочлен для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ОС-1. Контрольная работа

1. Перечислить все неприводимые многочлены четвёртой степени над конечным полем классов вычетов по модулю 2.
2. Разложите на множители многочлен $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

1. .Разложить простую дробь в цепную дробь и найти ее подходящие дроби:

а) $\frac{77}{187}$; б) $\frac{571}{359}$.

2. Разложите число 150 на два положительных слагаемых, одно из которых кратно 11, а второе – 17.

ОС-2.Вопросы для самостоятельного изучения обучающимися (темы мини-выступлений и рефератов)

1. Симметрические многочлены и их приложения.
2. Билинейные и квадратичные формы.
3. Функции от матриц.
4. Матричные уравнения.
5. Прикладные вопросы теории симметрических многочленов.
6. Результант и дискриминант.
7. Алгебра линейных операторов и полная матричная алгебра.
8. Элементарные преобразования многочленных матриц.
9. Характеристический многочлен матрицы.
10. Структура линейного оператора в n-мерном пространстве.
11. Некоторые многочлены матрицы.
12. Нормальные формы матриц.
13. Методы вычисления определителей n-го порядка.
14. Линейные операторы в унитарном пространстве.
15. Эквивалентные преобразования многочленных матриц.
16. Разложимые и неразложимые неотрицательные матрицы.
17. Теория матриц и линейные дифференциальные уравнения.
18. Пучки матриц.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Глухова Н.В., Гришина С.А., Еремеева А.Н., Куренева Т.Н., Рацеев С.М., Череватенко О.И. Алгебра. Часть 1.Основы высшей алгебры. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 33 с.
2. Карпова С.А. Алгебра и теория чисел. Часть 1. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ, 1998. – 24 с.
3. Ильязова Д.З. Алгебра и теория чисел. Часть 2. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ.

4. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Алгебра. Часть 3. Основы алгебраических структур. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 25 с.
5. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Алгебра. Часть 4. Алгебра многочленов Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 42 с.
6. Богомолова И.В., Ильязова Д.З. Алгебра и теория чисел. Часть 4. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ, 1999. – 24 с.
7. Глухов В.П., Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть I. – Ульяновск: УлГПУ, 1996. – 58 с.
8. Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть 2. – Ульяновск: УлГПУ, 1999. – 36 с.

3. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Контрольная работа ОС-2. Выступление с рефератами	ОР-1. Знает основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-3 Зачет в форме устного собеседования по вопросам	

		предметной области. ОР-3. Знает возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях ОР-4. Умеет решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Избранные вопросы алгебры и теории чисел».

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-3. Зачет

1. Клеточные матрицы и особенности операций над ними.
2. Распавшиеся и полураспавшиеся матрицы.
3. Методы «экономного» умножения матриц.
4. Теорема об определителе распавшейся матрицы.
5. Элементарные делители распавшейся матрицы.
6. След матрицы.
7. Инвариантность следа и определителя относительно выбора базиса.
8. Инвариантность характеристического многочлена и спектра относительно выбора базиса.
9. Миноры k-того порядка данной матрицы.
10. λ-матрицы. Эквивалентные и подобные матрицы.
11. Наибольшие общие делители миноров. Элементарные делители распавшейся матрицы.
12. Вывод формулы, выражающей определитель квадратной матрицы, представляющей собой произведение двух прямоугольных матриц, через миноры матриц – множителей (формулы Бине – Коши).
13. Ранг произведения двух прямоугольных матриц.
14. Жорданова клетка
15. Инвариантные подпространства линейного оператора.
16. Алгебраические и геометрические кратности собственных значений.
17. Собственные и корневые подпространства. Высота собственного значения.
18. Теорема о разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств.
19. Жорданова нормальная форма матрицы.
20. Теорема о приведении матрицы оператора к Жордановой нормальной форме.

21. Единственность жордановой нормальной формы.
22. Присоединённые векторы. Определение базиса, в котором матрица оператора имеет жорданову нормальную форму.
23. Понятие ассоциированной матрицы, некоторые свойства, примеры.
24. Вывод формулы, выражающей миноры обратной матрицы через миноры данной матрицы.
25. Понятие скелетного разложения произвольной прямоугольной матрицы.
26. Псевдообратные матрицы и их свойства.
27. Псевдообратная матрица A^{+} как наилучшее приближённое решение (по методу наименьших квадратов) матричного уравнения $A \cdot X = E$. Примеры.
28. Метод Гревилля.
29. Понятие преобразующей матрицы.
30. Теорема о возможности представления квадратной матрицы в виде произведения нижней треугольной матрицы на верхнюю треугольную матрицу.

ОС-3. Зачет

1. Числовые функции.
2. Функция Мёбиуса.
3. Числа Фибоначчи.
4. Совершенные числа.
5. Простые числа Мерсенна
6. Числа Ферма.
7. Формула обращения Мёбиуса.
8. Представление рациональных чисел цепными дробями.
9. Подходящие дроби. Их свойства.
10. Комплексных числа и их применения.
11. Комплексные числа и кривые второго порядка.
12. Индекс чисел и классов по данному модулю. Свойства.
13. Двучленные сравнения по простому модулю.
14. Квадратичные вычеты и невычеты.
15. Символ Лежандра.
16. Теорема Дирихле.
17. Системы линейных неравенств, понятие о совместности систем линейных неравенств.
18. Задачи линейного программирования (ЗЛП). Примеры ЗЛП.
19. Задачи о ресурсах.
20. Стандартный и канонический вид ЗЛП.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачёт
9,10 семестры	Разбалловка по видам работ	6 х 1=6 баллов	10 х 1=10 баллов	152 балла	32 балла
	Суммарный макс. балл	6 баллов max	16 баллов max	168 балла max	200 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося

	Баллы (2 ЗЕ)
«зачтено»	более 100
«не зачтено»	100 и менее

4. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Смолин Ю.Н. Числовые системы. – М.: Флинта, 2021. – 112 с («университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=54576).

2. Веселова, Л. В. Алгебра и теория чисел: учебное пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. – Казань : Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2014. – 107 с. : ил. – Режим доступа. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428287)

3. Михалева, М. М. Алгебра и теория чисел : учебное пособие / М. М. Михалева, Б. М. Веретенников. – Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. – Часть 1. – 51 с. – Режим доступа: – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276012

Дополнительная литература

1. Смолин, Ю.Н. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие / Ю.Н. Смолин. — 5-е изд., стер.—Москва : ФЛИНТА, 2017. — 464 с. - ISBN 978-5-9765-0050-1. - Текст : электронный. (URL: https://znanium.com/catalog/product/1034573) https://znanium.com/read?id=342728
2. Данилова Т. В. Теория чисел : Задачи с примерами решений; учебное пособие / Т.В. Данилова. - Архангельск : САФУ, 2015. - 104 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436368
3. Дадаян А.А. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=397662)

Интернет-ресурсы

http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал