

Университетская предметная олимпиада по математике

1. Решите систему

$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 20, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

2. Упростите выражение $\frac{(\sqrt{14} + \sqrt{6})(\sqrt{21} - 5)}{\sqrt{10 - 2\sqrt{21}}}$

3. В тупоугольном треугольнике $AB = BC = 5$, $AC = 8$, на продолжении стороны BC опущена высота $АН$. Из точки $Н$ к сторону AB опущен перпендикуляр $НК$, а к стороне AC – перпендикуляр $НМ$. Найдите $МК$.

4. Василий ездил в путешествие в Южную Корею. Возвращаясь назад, в аэропорту Сеула он обнаружил, что у него в кармане осталось 1490 южнокорейских вон (денежная единица Кореи – Вона). Подумав, что обменять их на рубли в ульяновском банке будет затруднительно, Василий решил приобрести на них сувениры для друзей. Он нашел подходящие сувениры стоимостью 30 и 50 вон. а) Какое наибольшее количество сувениров может приобрести Василий, если он хочет обязательно истратить все деньги так, чтобы сдачи не осталось?

б) Василий подумал, что сувениры лучше дарить сразу парами (за 30 и за 50 вон), а уж кому-то по одному сувениру – что останется. Как тогда лучше следует распорядиться деньгами Василию, чтобы потратить их все без сдачи?